

תרגיל 2 מבין אינסטיטוט 2 89-733

7 נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

- (א) (5 נק') מצא גורם הקרה
 (ב) (5 נק') מצא נקודות מימין וימין
 (ג) (5 נק') מצא נקודות קיצון
 (ד) (5 נק') מצא תחומי עלייה וירידה
 (ה) (5 נק') מצא נקודות פיתוח
 (ו) (5 נק') מצא תחומי קטירות וקטירות
 (ז) (5 נק') מצא אסימפטוטות
 (ח) (5 נק') צייר את גרף הפונקציה

(ב) (5 נק') העב':

$$\int x^2 \cos(x^3) e^{\sin(x^3)} \cos(\sin(x^3)) dx$$

(ג) (5 נק') העב':

$$\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-3e^x+2)(e^x-2)} dx$$

$$\int (\cos(x))^3 dx$$

(ד) (5 נק') העב':

$$\int x^5 e^{-x^2} dx$$

(ה) (5 נק') העב':

$$\text{מצא את המקסימום והמינימום של } f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \text{ על } \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \quad : \text{ פונקציה}$$

(1) הפונקציה מתאפסת, נמצא את נקודות הקיצון $\mathbb{R}$ כל x ו- y (כאן $y=f(x)$)

(2) נמצא את נקודות הקיצון של f בנקודה $x=0$ $y=f(0)=2$ $\angle = x=0$
 y נמצא $x=0$
 $(0,2)$

... $x \in \mathbb{R}$ $x^2+2=0 \angle = y=0$ אין פתרון

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad : (2) + (3)$$

$$(0,2) \quad x=0 \quad y=2 \quad \angle = f'(x)=0 \quad \text{נקודה קריטית}$$

כאשר $x > 0$, $f'(x) < 0$ (הפונקציה יורדת)

כאשר $x < 0$, $f'(x) > 0$ (הפונקציה עולה)

לכן $(0,2)$ היא נקודה מקסימום.

(3) נמצא את נקודות הקיצון של f בנקודה $x=0$ $y=f(0)=2$ $\angle = x=0$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$(\pm\sqrt{1/3}, 7/4) \quad y_1=y_2=\frac{7}{4} \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{1/3} \quad \angle = f''(x)=0 \quad \text{נקודות קיצון}$$

אם $x < -\sqrt{1/3}$ או $x > \sqrt{1/3}$: $f''(x) > 0$ (הפונקציה קמורה)

אם $-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}$: $f''(x) < 0$ (הפונקציה קעורה)

לכן $(-\sqrt{1/3}, 7/4)$ ו- $(\sqrt{1/3}, 7/4)$ הן נקודות מינימום.

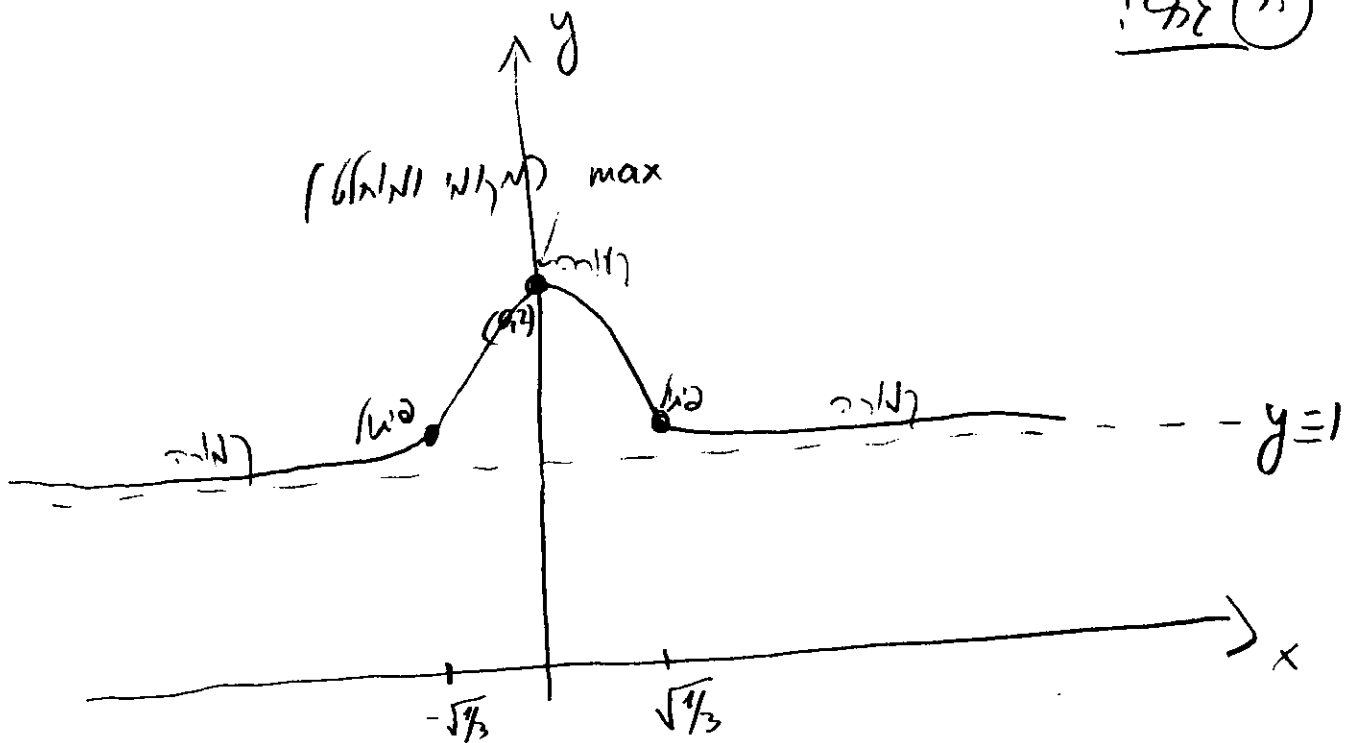
(2)

הפונקציה $f(x)$ היא פולינום ממעלה 3.
 נניח $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$.
 נמצא את המקסימום של $f(x)$ על $\mathbb{R}$.
 נגזרת: $f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$.
 נפתור $f'(x) = 0$: $3x^2 + 2x + 2 = 0$.
 דיסקרימיננטה: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 - 24 = -20 < 0$.
 לכן, אין נקודות קיצון פנימי.
 הפונקציה $f(x)$ היא פולינום ממעלה 3, ולכן $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
 לכן, אין מקסימום גלובלי.

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow y = 1$$



התשובה היא: אין מקסימום גלובלי.

(3)

$$(1) \int \frac{1}{3} (3x^2 \cos(x^3)) e^{\sin(x^3)} \cos(\sin(x^3)) dx$$

$\frac{d}{dt}$

no 1/3

$$t = \sin(x^3) \quad \frac{d}{dt} = 3x^2 \cos(x^3) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int e^t \cos t dt = \dots$$

(part by part)
x = t, dx = dt

$$(2) \int (\cos x)^3 dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$t = \sin x$
 $dt = \cos x dx$

$$= \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$(3) \int x^5 e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int t^2 \cdot (-2x) e^t dx = \frac{-1}{2} \int t^2 e^t dt$$

$t = -x^2$
 $dt = -2x dx$

u = t, v' = e^t
u' = 2t, v = e^t

$$= -\frac{1}{2} [t^2 e^t - \int 2t e^t dt] = -\frac{1}{2} [t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t] + C$$

u = t, v' = e^t
u' = 2, v = e^t

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2) + C$$

$$(4) \int \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 3e^x + 2)(e^x - 2)} dx = \int \frac{t}{(t^2 - 3t + 2)(t - 2)} dt$$

$t = e^x$
 $dt = e^x dx$

$$= \int \frac{t}{(t-2)^2(t-1)} dt = \left| \frac{t}{(t-2)^2(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{t-1} \right|$$

partial fraction

(4)

$$\frac{t}{(t-2)^2(t-1)} = \frac{A(t-2)(t-1) + \frac{2}{(t-2)^2} + \frac{1}{(t-2)^2}}{(t-2)^2(t-1)}$$

'partial' fractions

$$C=1 \quad : t=1$$

$$B=2 \quad : t=2$$

$$A=-1 \quad \text{for } 0=2A+2 \quad : t=0$$

$$\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-3e^x+2)(e^x-2)} dx = \int \left(\frac{1}{t-2} + \frac{2}{(t-2)^2} + \frac{1}{t-1} \right) dt$$

ipf

$$= \ln \left| \frac{t-1}{t-2} \right| - \frac{2}{t-2} + C =_{t=e^x} \ln \left| \frac{e^x-1}{e^x-2} \right| - \frac{2}{e^x-2} + C.$$