

חשבון אינפי 2 למדמ"ח - 89133

תרגיל מספר 5 - טורי חזקות

שאלה 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}} : \text{נתון טור חזקות}$$

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות).

שאלה 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\ln n} : \text{נתון הטור}$$

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור. מצאו את התחום המקסימלי שבו הטור מתכנס בהחלט. האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההיתכנסות?

שאלה 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{n^2} : \text{נתון הטור}$$

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות). האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההיתכנסות?

שאלה 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} (2x+1)^n : \text{מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא}$$

שאלה 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} : \text{ידוע שטור החזקות מתכנס לכל } x \in (-1, 1] \text{ וסכומו שווה ל-}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} : \text{מצאו קירוב של } \ln 1.2, \text{ כך שהשגיאה לא תעלה על } 10^{-4}.$$

פתרו את השאלה בשתי דרכים:

א. בעזרת הערכה של השארית בצורת Lagrange.

ב. בעזרת טור Leibnitz מתאים.

שאלה 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} : \text{נתון הטור}$$

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות). האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט עבור $x = -1$ או $x = 5$? מצאו את סכום הטור עבור $x = 5$.

שאלה 7

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) x^n \quad \text{נתון הטור}$$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?
ב. מצאו את סכום הטור עבור כל $|x| < 1$ ששיד לתחום ההתכנסות.

ג. מצאו טור Leibnitz שמתכנס לאינטגרל $\int_0^{1/2} S(x) dx$.

שאלה 8

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n} x^n = \frac{1}{6} x - \frac{1}{72} x^2 + \frac{1}{648} x^3 - \dots \quad \text{נתון הטור}$$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?
ב. מצאו את סכום הטור עבור כל x ששיד לתחום ההתכנסות.

ג. מצאו טור Leibnitz שמתכנס ל- $I = \int_0^1 S(x) dx$ ונמקו למה המספר $\frac{1}{6 \cdot 2} - \frac{1}{36 \cdot 6} = \frac{17}{216}$

מהווה קרוב של האינטגרל I .

שאלה 9

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n!} \right) \frac{x^n}{2^n} \quad \text{נתון הטור}$$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?
ב. מצאו את סכום הטור עבור כל $0 < x < 2$.

ג. מצאו טור מספרי שמתכנס לאינטגרל $\int_0^1 S(x) dx$.

שאלה 10

מצאו את הסכום של הטורים : א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$ ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n+n!)}{(n+1)!}$

שאלה 11

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \quad \text{נתון הטור}$$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל- $\frac{\ln(1+x)}{x}$, לכל $0 < |x| < 1$.

ג. בדקו ש- $\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \frac{31}{36} \right| < 0.0625$

שאלה 12

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^3}{4! \cdot 3} - \frac{x^4}{6! \cdot 4} \pm \dots$$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל- $f(x) = \int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt$, לכל $x > 0$.

$$\left| \int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt - \frac{55}{72} \right| \leq \frac{1}{6! \cdot 4} = \frac{1}{2880}$$

ג. הוכיחו ש- $I = \frac{55}{72}$ מהווה קירוב של האינטגרל $\int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt$ והשגיאה לא עולה על $\frac{1}{2880}$.

שאלה 13

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \dots$$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.

האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל- $\frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, לכל $0 < x \leq 1$.

$$\left| \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx - \frac{76}{105} \right| < 0.1111\dots$$

שאלה 14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}}$$

א. מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא :

חקרו את ההתנהגות של הטור בקצוות של תחום ההתכנסות.

ב. נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}}$, לכל $-1 < x < 0$. מצאו סדרה של מספרים ממשיים $(a_n)_{n \geq 0}$

כך שהנגזרת של $f(x)$ שווה ל- $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$