

Infinitesimal Calculus 2 for CS - 89133

תרגיל מספר 8 - דיפרנציאביליות

1. תהי $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

הראה/י כי $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ קיימות, אך f אינה רציפה ב- $O = (0, 0)$.

האם f דיפרנציאבילית ב- $O = (0, 0)$?

2. הראה/י כי $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ מקיימת את משוואת Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

בתחום $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y, z) \neq 0\}$.

3. בדוק/י רציפות ודיפרנציאביליות הפונקציה:

$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ בנקודה $O = (0, 0)$.

4. בדוק רציפות ודיפרנציאביליות הפונקציה $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $O = (0, 0)$ (רמז: השתמש בחסימות ה- $\sin$ כדי להראות רציפות).

5. תהי $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$.
 הסברי/י מדוע שלוש הפונקציות f , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות בנקודה $P = (1, 2)$.
 הסק מכך – האם f דיפרנציאבילית ב- $P = (1, 2)$?

6.

Show that the following function, $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$ is differentiable at $(0, 0)$.

(ז"א בדוק/י דיפרנציאביליות של הפונקציה $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$ בנקודה $O = (0, 0)$).

7. בדוק/י רציפות ודיפרנציאביליות הפונקציה:

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $O = (0, 0)$.

8. בדוק/י דיפרנציאביליות הפונקציה: $f(x, y) = 2 \ln(x^2 + y^2 + 1)$ בכל תחום הגדרתה.

9. נתונה הפונקציה $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבי/י נגזרות חלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. בדוק/י רציפות הפונקציה.
 ג. בדוק/י דיפרנציאביליות הפונקציה.