

משוואות דיפרנציאליות רגילות 88-240  
תשס"ט סמסטר קיץ מועד ב'

יש לענות על חמש משבע השאלות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).  
משך הבחינה: שעתיים וחצי  
אנא רשמו בבירור על איזו שאלה וסעיף אתם עונים והקיפו את התשובות הסופיות במלבן.

1. מחוררים חור בתחתית חבית גלילית שרדיוסה  $r$ . שטח החור 1 סמ"ר. גובה המים בחבית  $h$ . מהירות יציאת המים מהחבית היא  $\sqrt{2gh}$  כאשר  $h$  גובה המים ו- $g$  קבוע. קצב שינוי הנפח שווה למהירות זו כפול שטח החור.  
א. כתבו את המשוואה על גובה המים.  
ב. אם גובה המים בזמן 0 הוא  $H$ , תוך כמה זמן תתרוקן החבית.

2. נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 4z$$

$$\frac{dz}{dt} = -4z + x$$

- א. פתרו את המערכת.  
ב. נתון  $x(0)=y(0)=z(0)=1$ . מהו  $x(t)+y(t)+z(t)$  כפונקציה של  $t$ ?  
ג. בהנתן תנאי ההתחלה מסעיף ב', מהם  $x, y, z$  כאשר  $t \rightarrow \infty$ ?

3.

- א. פתרו את המשוואה  $y'' - 3y' + 2y = x^2$ ?  
ב. מהו הפתרון בהנתן תנאי ההתחלה  $y(0)=1, y'(0)=2$ ?

4. פתרו את המשוואה  $x^2 y'' - 3xy' + y = x^2$ .

5. מצאו פתרונות רגולריים וסינגולריים למשוואה  $(y^2 + 2xy + 3y)y' + (2y^2 + 4xy + 8y) = 0$

6. פתרו:  $2x^2 \sin(x^2 + y) dx + x \sin(x^2 + y) dy = 0$

7. פתרו:  $y'' = -ky - ry' + \cos \omega t$  ( $k > 0$ )

- א. עבור  $r > 0$ .  
ב. עבור  $r = 0$  (הבדילו בין מקרים שונים ב- $\omega$ ).  
ג. עבור  $r = 0$  מצאו את הפתרון לבעיית תנאי ההתחלה  $y(0)=1, y'(0)=2$ .

בהצלחה!