<u>שאלה 1</u>

א)

$$\vec{r}(\theta,\varphi)=L\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$

ב)

$$\dot{\vec{r}}=L\dot{\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\end{pmatrix}+L\dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$T=\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}=\frac{mL^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\qquad U=mgz=-mgL\cos\theta$$

$$\mathcal{L}=T-U=\frac{mL^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)+mgL\cos\theta$$

ג)

$$\text{(I)}\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\Rightarrow\frac{d}{dt}(\sin^2\theta\,\dot{\varphi})=0\Rightarrow\sin^2\theta\,\ddot{\varphi}+(\sin2\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi}=0$$

$$\text{(II)}\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}\Rightarrow mL^2\ddot{\theta}=\frac{mL^2}{2}\sin2\theta\cdot\dot{\varphi}^2-mgL\sin\theta$$

ד) φ קואורדינטה ציקלית (לא מופיעה בלגרנז'יאן) ולכן

$$C=\text{const}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=mL^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\qquad\text{(תנע זוויתי סביב ציר } z\text{)}$$

ה) נקודות שיווי משקל מתקבלות כאשר אין תאוצה במשוואה II

מאפסים את ;

$$mL^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2=mgL\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{g}{\dot{\varphi}^2}\Rightarrow\cos\theta_0=\frac{gm^2L^4\sin^4\theta_0}{C^2}$$

θ_0 נקודת ש"מ

$$mL^2\ddot{\theta}=mL^2\sin\theta\cos\theta\frac{C^2}{m^2L^4\sin^4\theta}-mgL\sin\theta$$

נסמן ב F-ד

$$mL^2\ddot{\theta}=0+\frac{\partial F}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_0}=\left[\frac{C^2}{mL^2}\left(\sin^{-2}\theta_0-3\frac{\cos^2\theta_0}{\sin^4\theta_0}\right)-mgL\cos\theta\right]_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0)=-A(\theta_0)(\theta-\theta_0)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{A(\theta_0)}{mL^2}}$$

לכן

שאלה 2

א) נסמן את מהירות גוף 1 לאחר ההתנגשות u_1 ואת מהירות גוף 2 ב u_2.

משימור התנע $m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2$

משימור האנרגיה + התנע (פיתחנו דומה) $u_2 - u_1 = v$

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 (u_1 + v)$$

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} \qquad u_2 = u_1 + v = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$$

ב) מהסעיף הקודם - התנאי ל u_1 שלילי הוא $m_2 > m_1$

ג) נסמן $u_1^{(x)}$ $u_1^{(y)}$ $u_2^{(x)}$ $u_2^{(y)}$

שימור התנע בציר x: $m_1 v = m_1 u_1^{(x)} + m_2 u_2^{(x)}$

שימור התנע בציר y: $m_2 u_2^{(y)} + m_1 u_1^{(y)} = 0$

שימור האנרגיה: $\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 {u_1^{(x)}}^2}{2} + \frac{m_1 {u_1^{(y)}}^2}{2} + \frac{m_2 {u_2^{(x)}}^2}{2} + \frac{m_2 {u_2^{(y)}}^2}{2}$

(יש פה רק שלוש משוואות ו-4 נעלמים - לא ניתן לפתור מה יהיו המהירויות ללא מידע נוסף על אופן ההתנגשות)

ד) מהסעיף א׳ u_2 שואף למקסימום כאשר $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$ מקסימלי

כלומר $\frac{m_2}{m_1} \to 0$ ואז $u_2 \to 2v$

שאלה 3

א) נניח שהבור נמצא בין $x=-a$ ל $x=a$

המשוואות הרלוונטיות

$$-\frac{\hbar^2\psi''}{2m}=E\psi \qquad -a\le x<0$$

$$-\frac{\hbar^2\psi''}{2m}+V\psi=E\psi \qquad 0<x\le a$$

בתנאי שפה $\psi(a)=\psi(-a)=0$

תחום א' $(E>V)$

$$\psi(x)=\begin{cases}A\sin\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(x+a)\right] & x<0\\ B\sin\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}(x-a)\right] & x>0\end{cases}$$

תחום ב' $(E<V)$

$$\psi(x)=\begin{cases}A\sin\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(x+a)\right]\\ B\left\{\exp\left[\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}(x-a)\right]-\exp\left[\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}(x-a)\right]\right\}\end{cases}$$

תנאי תפירה $(I)\ \psi'(0^+)=\psi'(0^-)$ $(II)\ \psi(0^-)=\psi(0^+)$

ב) מתנאי התפירה; עבור תחום א':

$$(I)\ A\sin\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(0+a)\right]=B\sin\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}(0-a)\right]$$

$$(II)\ A\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a\right)=\pm B\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}\cos\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}(a)\right]$$

כדי שיתקבל פתרון לא טריוויאלי עבור A,B, הדטרמיננטה של המקדמים צריכה להתאפס

$$\begin{vmatrix}\sin\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a\right] & \sin\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}a\right]\\ \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cos\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a\right] & -\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}\cos\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}a\right]\end{vmatrix}=0$$

מכאן E צריך לקיים את המשוואה:

$$\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}\cos\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}a\right]\sin\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a\right]\pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cos\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a\right]\sin\left[\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}a\right]=0$$

כנ"ל עבור תחום ב'

יש לציין כי במקרה בו $E=V$ [illegible] רק [illegible]

[illegible] לגבי [illegible] גם כבקרה של המקרה [illegible]

שאלה 3 - המשך

ג) במקרה V=0 מדובר בפשוט בחלקיק בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב 2a

כפי שלמדנו בכיתה.

המצבים העצמיים הם (עבור בור בין x=0 ל-x=2a)

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

עם רמות אנרגיה

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8 m a^2}$$

ד) עבור כל אחת מהפונקציות העצמיות ψ_n, ההסתברות למצוא בצד השמאלי היא בדיוק $\frac{1}{2}$ בגלל הסימטריות/אנטי סימטריות של הפונקציה ב-x=a

(עבור מצב כללי שאינו מצב עצמי, יתכן כמובן כל ערך להסתברות כן)

שאלה 4

הוקטורים המנורמלים

$V_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\lambda_3=5$ $\quad$ $V_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\lambda_2=3$ $\quad$ $V_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\lambda_1=5$

א)

$$A=5\,V_3^{+}V_3+3\,V_2^{+}V_2+5\,V_1^{+}V_1$$

$$=5\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&2\end{pmatrix}+3\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}+5\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-1&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

ב) הערך 3 - קיים רק בוקטור V_2

$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ לכן $\quad p=|\langle V_2|\psi\rangle|^2$

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)\left|\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}\right|^2=\frac{1}{4}|1+i|^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ג) חישוב: $[A,B]=AB-BA=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

ד) $V_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ לא מנוון לכן הוא ו"ע של B.

נמצא צירוף לינארי של V_1 ו-V_3 שגם הוא ו"ע של B.

למשל — מצרפים הלינארית — ל-$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ו"ע של מיפ.

ל-B ו"ע לא מנוון $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ זה ערך עצמי 4, לכן הוא גם ו"ע של A.

<u>שאלה 5</u>

זמני השידור במערכת החללית $T = 0, 1, 2 \ldots$ $(0, T)$

במערכת כדוה"א $(\gamma\beta T, \gamma T)$

האור נע במהירות האור ולכן אות שנוצר ברגע $T\gamma\beta$ בזמן γT יגיע לכדוה"א בזמן $\gamma T + \gamma\beta T$

לכן ההפרש בין שידורים הוא $\gamma\beta + \gamma$

$$\gamma\beta + \gamma = 2$$

$$\gamma(\beta + 1) = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta + 1) = 2$$

$$(\beta + 1)^2 = 4(1 - \beta^2)$$

$$5\beta^2 + 2\beta - 3 = 0$$

$$\beta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10}$$

הפתרון ההגיוני: $\beta = \frac{3}{5}$