

88-320 פיסיקה למתמטיקאים
עבודה מסכמת – חלק א' - מכניקה
תשס"ח – סמסטר ב'

1. שני כוכבים, בעלי מסות m_1 ו- m_2 נעים במרחב. הגופים מפעילים זה על זה כח גרביטציוני המתואר ע"י האנרגיה הפוטנציאלית $-\frac{G m_1 m_2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}$ כאשר \vec{R}_1 ו- \vec{R}_2 הם מיקומי הכוכבים.
- א. כתבו את האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית ואת הלגרנז'יאן של המערכת.
- ב. הראו כי במעבר לקואורדינטות של מרכז המסה, $\vec{R} = (m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2) / (m_1 + m_2)$ ושל המיקום היחסי $\vec{r} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$ הלגרנז'יאן מתפרק לסכום איברים התלויים בנפרד בכל אחד מהווקטורים. השתמשו בהגדרה $\mu = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$ (מסה מצומצמת).
- ג. מצאו את משוואות התנועה.
- ד. נגדיר $\vec{r} = (x, y, z)$ ונניח $z(t=0) = 0$ וכן $\dot{z}(t=0) = 0$. הראו כי $z(t) = 0$ לכל t . כלומר, התנועה נשארת במישור.
- ה. הניחו $\vec{r}(t=0) = (x_0, 0, 0)$ ו- $\dot{\vec{r}}(t=0) = (0, v_0, 0)$. משיקולי אנרגיה מצאו עבור אילו ערכי v התנועה חסומה, ועבור אילו ערכים הכוכבים יתרחקו לאינסוף.
- ו. מצאו את ההמילטוניאן.
- ז. הראו כי הגדלים הבאים נשמרים: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ו- $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - k \hat{r}$ (מצאו מהו ה- k המתאים). רמז: ניתן להשתמש בסוגרי פואסון.
- ח. כתבו את הלגרנז'יאן וההמילטוניאן בקואורדינטות המוכללות r, θ (הניחו תנועה במישור). מצאו את משוואות התנועה מתוך ההמילטוניאן.
- ט. עבור תנאי ההתחלה בסעיף ה' מצאו משוואה עבור צורת המסלול $y(x)$ או $r(\theta)$. אילו צורות מסלול אפשריות?

2. שרשרת של N חרוזים, שמסת כל אחד מהם m , מחוברים ביניהם בקפיצים בעלי קבוע קפיץ k_s ואורך רפוי a . כמו כן, החרוז הראשון והחרוז האחרון מחוברים לקיר ע"י קפיץ. ראו איור. א. מצאו את משוואות התנועה.
- ב. נחשו פתרון מהצורה $q_i = \sum_k A_k \sin(k a i) \sin(\omega_k t + \phi_k)$ כאשר A_k , ω_k ו- ϕ_k קבועים בזמן, ותלויים רק ב- k . הציבו את הפתרון והראו כי המשוואות המתקבלות בלתי תלויות. מצאו את התלות בין ω_k ל- k .
- ג. בעזרת משוואות התנועה עבור המסה האחרונה (N) מצאו את ערכי ה- k המותרים.

