

## 88-320 פיסיקה למתמטיקאים

### עבודה מסכמת – חלק ב' - קוונטים

### תשס"ה – סמסטר ב'

3. באטום מימן אלקטרון ופרוטון נעים תחת פוטנציאל משיכה אלקטרומגנטית הדידית. נסמן ב-  $\vec{r}_1$  את (אופרטור) מיקום האלקטרון ו ב-  $m_1$  את מסתו וכן ב-  $\vec{r}_2$  ו-  $m_2$  את מיקום ומסת הפרוטון. ההמילטוניאן נתון ע"י:

$$H\Psi = \frac{-\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \Psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \Psi - \frac{ke^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \Psi$$

כאשר  $\nabla_1^2 \Psi$  ו-  $\nabla_2^2 \Psi$  הם הלפלסיאנים לפי  $\vec{r}_1$  ו-  $\vec{r}_2$  בהתאמה.

(א) כתבו את משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן (משוואת הערכים העצמיים של ההמילטוניאן).

(ב) הראו כי ניתן לעבור לקואורדינאטות מרכז מסה והפרש המיקום,  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / (m_1 + m_2)$  ולקבל הפרדת משתנים.

(ג) כתבו את הלפלסיאן לפי  $\vec{r}$  בקואורדינאטות פולאריות  $r, \theta, \phi$  כך שהמשתנים יופרדו. הפתרון יהיה מהצורה  $\Psi = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ .

(ד) עבור החלק הזוויתי של הפתרון, מהם  $l$  ו-  $m$  המותרים ע"מ שהפונקציה תהיה חד ערכית? (רמז: תנע זוויתי)

(ה) עבור החלק הרדיאלי עברו למשתנה חסר יחידות:  $\rho = \sqrt{\frac{8m|E|}{\hbar^2}} r$ .

נחשו פתרון מהצורה  $u(\rho) = s(\rho) \rho^{l+1} e^{-\rho/2}$ . פתחו את  $s$  לטור ומצאו יחס רקורסיבי בין מקדמי הטור.

(ו) מהי ההתנהגות האסימפטוטית של מקדמי הטור? מה תהיה ההתנהגות האסימפטוטית של  $s(\rho)$ ? האם הפונקציה ניתנת לנרמול?

(ז) ע"מ לפתור את הבעיה נחפש פונקציות עבורן הטור מכיל מספר סופי של איברים. מצאו מהם התנאים לכך, ומהן רמות האנרגיה המותרות באטום מימן.

4. נתונות המטריצות:

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מהם יחסי הקומוטציה בין המטריצות. איזו אלגברה הן מייצגות?

(ב) חשבו את  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ . מהו המספר הקוונטי של התנע הזוויתי?

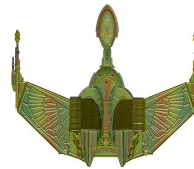
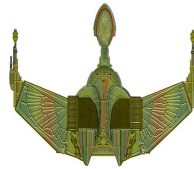
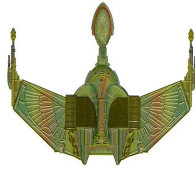
(ג) מהם  $J_+$  ו-  $J_-$  בהצגה זו?

(ד) מהו  $e^{i\theta J_z / \hbar}$ ? עבור אילו ערכי  $\theta$  חוזרים למטריצת היחידה?

5. (בונוס! לא חובה) תורת היחסות הפרטית: ספינת האנטרפרייז נקלעה שוב לצרות. הקלינגונים הציבו את צי ספינות החלל שלהם במרחקים קבועים בקרבת ציר ה-x בצד השלילי של ציר ה-y, בנקודות  $x=1000n$  מטר עבור כל  $n$  שלם. בזמן  $t=10000/c$  לפי שעון הקלינגונים, יירו כל הספינות הקלינגוניות לכוון y. אורכה של האנטרפרייז (שנמדד במנוחה) 2000 מטר. הניחו כי בזמן  $t=0$  לפי שעון הקלינגונים (הנייח) הקצה הקדמי של האנטרפרייז נמצא בנקודה  $x=0$ . כמו כן, הניחו שרוחב האנטרפרייז זניח יחסית למהירות האור.

(א) מצאו את המהירות המינימלי שבה על האנטרפרייז לנוע ע"מ שאף ספינה קלינגונית לא תפגע בה. (רמז: בזמן  $t=10000/c$  לפי השעון הקלינגוני עליה להיות בשלמות בין הספינה ה-m וה-m+1 עבור m כלשהו)

(ב) מנקודת ראותה של האנטרפרייז, מה אורכה ומה המרחק בין ספינות קלינגוניות שכנות? כיצד תצליח בכל זאת להתחמק מפגיעה? (רמז: מתי לפי שעונה יורה הספינה ה-m, ומתי יורה הספינה ה-m+1?)



Qapla'