

פיסיקה למתמטיקאים

21 במאי 2021

תוכן עניינים

4	1 הקדמה
4	1.1 יחידות
4	1.2 וקטורים
5	1.3 אנליזה וקטורית
6	1.4 קואורדינטות פולריות
6	1.5 קואורדינטות כדוריות
7	1.6 הפונקציות ההיפרבולית
7	1.7 פונקציות מבחן
8	1.8 פונקצית הדלתא של דיראק
9	I מכניקה
10	2 קינמטיקה
10	2.1 תנועה במהירות קבועה
10	2.2 תנועה בתאוצה קבועה
11	2.3 תנועה קצובה במעגל
12	2.4 תנועה כללית במעגל
13	3 מכניקה ניוטונית
13	3.1 חוקי התנועה של ניוטון
13	3.1.1 כוחות במקרים שונים
18	3.2 חוקי השימור
18	3.2.1 שימור התנע
20	3.2.2 שימור האנרגיה
23	3.2.3 שימור התנע הזוויתי
24	3.3 גרביטציה
26	4 מכניקה אנליטית
26	4.1 פונקציונלים
26	4.1.1 הגדרה
26	4.1.2 מינימיזציה של פונקציונלים
29	4.2 עקרון הפעולה המינימלית
30	4.2.1 קואורדינטות ציקליות

31	מכניקה המילטונית	4.3
31	טרנספורם לז'נדר	4.3.1
31	ההמילטוניאן ומשוואות המילטון	4.3.2
33	סוגרי פואסון	4.3.3
34	מרחב הפאזה ומשפט ליוביל	4.3.4
38	סימטריות וחוקי שימור	4.4
38	חבורות לי	4.4.1
41	משפט נתר (Noether)	4.4.2
43	בעיית קפלר	4.5
48	תנודות קטנות ואופני תנודה	4.6
48	תנודות קטנות ותדירות אפיינית	4.6.1
51	אוסילטורים מצומדים ואופני תנודה נורמליים	4.6.2

56	מערכות ייחוס	5
56	טרנספורמציות גליליי	5.1
58	מערכות מואצות ומסתובבות	5.2
59	חבורת לורנץ	5.3

II מכניקת הקוונטים 67

68	הקדמה: מרחבי הילברט	6
68	מרחבי הילברט כלליים	6.1
68	הגדרה: מרחב הילברט	6.1.1
69	אופרטורים במרחב הילברט	6.2
69	הגדרה	6.2.1
71	קומוטטורים	6.2.2
73	פונקציות של אופרטורים	6.2.3
74	מרחב הפונקציות L^2	6.3
75	אופרטורים במרחב L^2	6.4

77	מכניקת הקוונטים	7
77	האקסיומות של תורת הקוונטים	7.1
77	מרחב המצבים	7.1.1
77	התפתחות בזמן	7.1.2
78	מדידה	7.1.3
80	משוואת שרדינגר	7.2
80	מיקום ותנע	7.2.1
82	עקרון אי הוודאות	7.2.2
84	משוואת שרדינגר	7.2.3
86	בור פוטנציאל	7.2.4
89	אוסילטור הרמוני קוונטי	7.2.5
95	תנע זוויתי	7.3
95	הצגות של חבורות ואלגברות לי	7.3.1
96	הצגות התנע הזוויתי	7.3.2
101	אטום המימן הקוונטי	7.4

7.5 אי שיויון בל 105

פרק 1

הקדמה

1.1 יחידות

מקובל בפיסיקה כי כל גודל נמדד ביחידות. מערכת היחידות המקובלת, שבה נשתמש, נקראות mks והיחידות הבסיסיות בה הן מטר (m) קילוגרם (kg) ושניה (s). יחידה בסיסית נוספת המצורפת לעתים קרובות היא אמפר (A). אנו לא נשתמש בה, שכן לא נדון בחשמל בקורס זה.

היחידות של גדלים אחרים ניתנות לבניה מתוך יחידות אלה. לדוגמה, מהירות נמדדת ביחידות $\frac{[x]}{[t]} = \frac{m}{s}$. נשתמש גם ביחידות הבאות:
עבור כח נשתמש בניוטון

$$N \equiv \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

עבור אנרגיה נשתמש בג'אול

$$J \equiv \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

1.2 וקטורים

בקורס זה נסמן את ווקטורי היחידה במרחב התלת ממדי ב $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. כמו כן נשתמש בסימון

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

לכל וקטור נשתמש בסימון

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

והמוחלף (transpose) של הוקטור יהיה

$$\vec{v}^t = (v_x, v_y, v_z)$$

מכפלה סקלרית תוגדר להיות

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \vec{v}^t \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$

מכפלה וקטורית מוגדרת להיות

$$\vec{v} \times \vec{u} \equiv \hat{x}(v_y u_z - v_z u_y) + \hat{y}(v_z u_x - v_x u_z) + \hat{z}(v_x u_y - v_y u_x) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

שימו לב שהדטרמיננטה איננה דטרמיננטה אמיתית, אלא יש לראותה כשיטה לזכירת המכפלה.

1.3 אנליזה וקטורית

נשתמש בסימונים הבאים:

$$d\vec{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$\text{grad}f(\vec{r}) \equiv \nabla f(\vec{r}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \quad (1.2)$$

$$\text{div}\vec{v}(\vec{r}) \equiv \nabla \vec{v}(\vec{r}) \equiv \frac{dv_x}{dx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\text{curl}\vec{v}(\vec{r}) \equiv \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad (1.4)$$

והלפלסיאן הוא:

$$\nabla^2 f(\vec{r}) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

1.4 קואורדינטות פולריות

בשני ממדים, x, y נוח לעתים להשתמש בקואורדינטות פולריות, r ו- θ המוגדרות עפ"י המשוואות

$$x = r \cos \theta \quad (1.6)$$

$$y = r \sin \theta \quad (1.7)$$

1.5 קואורדינטות כדוריות

לעיתים נח להשתמש בקואורדינטות כדוריות במקום קואורדינטות קרטזיות. זה נכון במיוחד כאשר לבעיה סימטריה כדורית. נגדיר קואורדינטות $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ כך שמתקיים

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (1.8)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (1.9)$$

$$z = r \cos \theta \quad (1.10)$$

הלפלסיאן בקואורדינטות כדוריות הוא

$$\nabla^2 f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.11)$$

היעקוביאן של הקואורדינטות הכדוריות הוא

$$dx dy dz = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dy}{d\varphi} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{dz}{d\varphi} \end{vmatrix} dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1.12)$$

וקטור היחידה $\hat{r}$ מוגדר להיות

$$\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.13)$$

1.6 הפונקציות ההיפרבוליות

נזכיר את הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

$$\sinh u \equiv \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad (1.14)$$

$$\cosh u \equiv \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad (1.15)$$

$$\tanh u \equiv \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \quad (1.16)$$

ומחישוב מפורש ניתן לראות כי (בדקו)

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \sinh v \cosh u \quad (1.17)$$

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v \quad (1.18)$$

1.7 פונקציות מבחן

פונקצית מבחן חלקה היא פונקציה בעלת תומך קומפקטי (כלומר, מתאפסת זהותית מחוץ לקבוצה סגורה) ודיפרנציאבילית בכל מקום. דוגמה לפונקציות מבחן היא משפחת הפונקציות

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x_1-x} + \frac{1}{x-x_2}\right) & x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

עבור כל בחירה של x_1, x_2 התומך של הפונקציה הוא (x_1, x_2) והפונקציה חלקה C^∞ (בעלת נגזרות חלקות מכל סדר). המשפט הבא שימושי:

משפט 1

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בתחום $[a, b]$. אם לכל פונקציית מבחן, $g(x)$, המתאפסת בקצות הקטע, מתקיים

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

אז $f(x) \equiv 0$ (זהותית) בקטע $[a, b]$.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים $x_0 \in (a, b)$ כך ש $f(x_0) = c \neq 0$, ונניח, ללא הגבלת כלליות $c > 0$. מרציפות f משמע שקיים $\epsilon > 0$ כך שמתקיים $f(x) > c/2$ לכל $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$. נגדיר

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x_0 - \epsilon - x} + \frac{1}{x + \epsilon - x_0}\right) & |x - x_0| < \epsilon \\ 0 & |x - x_0| \geq \epsilon \end{cases}$$

לכן,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{c}{2} \int_a^b g(x)dx > 0$$

□

בסתירה להנחה.

1.8 פונקצית הדלתא של דיראק

פונקצית הדלתא של דיראק $\delta(x)$ איננה באמת פונקציה. ניתן לראותה כצפיפות של מידה מסוימת על הממשיים או כפונקציונל מפונקציות מבחן לממשיים. היא מוגדרת ע"פ התנהגותה באינטגרציה, ומקיימת

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

וכן, עבור $f(x)$ רציפה ב-0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

חלק I

מכניקה

פרק 2

קינמטיקה

הקינמטיקה עוסקת בתאור התנועה באופן מתמטי.¹ לכל זמן $t \in \mathbb{R}$ מוגדר מרחב תלת ממדי, כאשר המיקום של גוף נקודתי מהווה נקודה במרחב. נוח לתאר את תלות המיקום בזמן כפונקציה ווקטורית $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. כלומר, בכל זמן המיקום הוא ווקטור במרחב התלת מימדי $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$. ההעתק הוא שינוי המיקום בין שני זמנים $\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$. המהירות הממוצעת היא $\vec{v} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$. המהירות הרגעית היא

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \quad (2.1)$$

שימו לב כי בפיסיקה מקובל לסמן גזירה לפי הזמן בנקודה למעלה. התאוצה הרגעית מוגדרת כשינוי המהירות לפי הזמן

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}} \quad (2.2)$$

2.1 תנועה במהירות קבועה

גוף נע במהירות קבועה $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$. מאינטגרציה על משוואה 2.1 מקבלים $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$. הגוף, אם כן, נע בקו ישר.

2.2 תנועה בתאוצה קבועה

גוף נע בתאוצה קבועה $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$. מאינטגרציה על משוואה 2.2 מקבלים $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t$ וכן $\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0 t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$. הגוף, אם כן, נע במישור המקביל לווקטורים $\vec{v}_0$ ו $\vec{a}_0$ והעובר דרך הנקודה $\vec{r}_0$. במקרה הכללי, מסלול התנועה הוא פרבולה, שציר הסימטריה שלה מקביל לווקטור $\vec{a}$. אם הווקטורים $\vec{v}_0$ ו $\vec{a}$ מקבילים התנועה תהיה בקו ישר. במקרה זה, גרף המיקום כתלות בזמן יהיה פרבולי.

¹לכאורה, הקינמטיקה איננה מכילה תוכן פיסיקלי. למעשה, נראה בהמשך כי גם ההנחות שגניח פה אינן נכונות בהכרח בפיסיקה המודרנית.

דוגמה: בקרבת כדור הארץ גופים חפשיים נעים בתאוצה קבועה של $\vec{a} = -g\hat{z}$, כאשר $g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$ ו- $\hat{z}$ הוא וקטור יחידה בכוון מעלה (החוצה ממרכז כדור הארץ). התנועה שלהם מתוארת ע"י $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 - \frac{gt^2}{2} \hat{z}$.

2.3 תנועה קצובה במעגל

נדון בגוף מוגבל לתנועה במעגל, לדוגמה ע"י מוט או חוט המחובר לציר קבוע. נניח שנבחר את מערכת הצירים כך שתנועת הגוף היא במישור xy . אם המהירות הזוויתית היא ω^2 , ניתן לכתוב את מיקום הגוף ע"י

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

המהירות נתונה ע"י

$$\vec{v}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

והתאוצה ע"י

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r} \quad (2.5)$$

אם נסמן $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{z}$, נוכל לרשום

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.6)$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.7)$$

בתנועה קצובה במעגל תדירות הסיבוב היא $f = \frac{\omega}{2\pi}$ וזמן המחזור הוא $T = f^{-1}$. שימו לב שהתאוצה ניצבת למהירות $\vec{a} \perp \vec{v}$. זוהי תכונה כללית של תנועה בה גודל המהירות נשאר קבוע, שכן אם $|\vec{v}| = \text{const}$, אזי $\vec{v} \cdot \vec{v} = \text{const}$ ולכן

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 2\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

ומכאן $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$. התאוצה במקרה זה היא תמיד לכוון המרכז. היא נקראת תאוצה צנטרפטלית.³

²שימו לב כי המהירות הזוויתית נמדדת ברדיאנים לשניה או, כיוון שרדיאנים הם יחס חסר יחידות (בין אורך הקשת לרדיוס) ביחידות של אחד חלקי שניה (s^{-1}). יחידות אלה נקראות גם הרץ (Hz).
³שימו לב: תאוצה צנטרפטלית ולא צנטרפוגלית. על תאוצה צנטרפוגלית נדבר בפרק 5.2.

2.4 תנועה כללית במעגל

בתנועה כללית במעגל ברדיוס R , תלות הזווית בזמן היא פונקציה $\theta(t)$. נסמן $\dot{\theta} = \omega$, וכן, כמו למעלה, $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{z}$. נקבל

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

המהירות נתונה ע"י

$$\vec{v}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

והתאוצה ע"י

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + R\dot{\omega} \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r} + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \vec{v} \quad (2.10)$$

אם נסמן $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{z}$, נוכל לרשום

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.11)$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \quad (2.12)$$

במקרה זה המחובר השמאלי של התאוצה הוא רדיאלי (בכוון המרכז) – ואחראי על השינוי בכוון המהירות, והשני משיקי (טנגנטי) ואחראי על השינוי בגודל המהירות.

פרק 3

מכניקה ניוטונית

המכניקה הניוטונית היא תאוריה פיסיקלית המקשרת בין הכוחות הפועלים על גוף לבין תנועתו.

3.1 חוקי התנועה של ניוטון

ניוטון ניסח שלושה חוקים לתנועת גופים. החוקים תקפים במערכת צירים נייחת.¹ החוקים הם:

1. גוף שלא פועלים עליו כוחות ינוע במהירות וכוון קבועים. $\vec{v} = \text{const}$.
2. גוף שמסתו m ופועל עליו כח $\vec{F}$ ינוע בתאוצה המקיימת $\vec{F} = m\vec{a}$, כאשר m היא מסת הגוף.
3. אם גוף 1 מפעיל על גוף 2 כח $\vec{F}_{21}$, גוף 2 יפעיל על גוף 1 כח שווה בגודלו ומנוגד בכוונו, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

כדי למצוא את התנהגותו של גוף מציירים דיאגרמת כוחות על כל גוף החפשי לנוע (free body diagram), בוחרים מערכת צירים נוחה ככל האפשר, וכותבים משוואת כוחות על הגופים בכל ציר. שימו לב כי זוהי משוואה מסדר שני, כך שיש שני קבועים התלויים בתנאי ההתחלה. בדרך כלל משתמשים במיקום והמהירות בתחילת התנועה לחישוב הקבועים.

3.1.1 כוחות במקרים שונים

קפיץ קפיץ נמצא במצב רפוי באורך l . אם הקפיץ מתארך מתקצר לאורך $l + x$ (עבור x חיובי או שלילי) הכח שמפעיל הקפיץ הוא $\vec{F} = -kx\hat{n}$, כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה בכיוון הקפיץ. אם הכיוון המקורי של הקפיץ זהה לכיוון ההתארכות, ניתן לרשום $\vec{F} = -k\vec{x}$.

חוט החוט מפעיל כח על עצמים המחוברים אליו כאשר הוא נמתח. המתיחות בחוט היא $\vec{F} = -T\hat{n}$, כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה בכיוון החוט. מניחים בד"כ כי אורך החוט נשאר קבוע ולכן המתיחות תהיה כזו שלא תאפשר שינוי באורך החוט.

¹מערכת צירים בה מתקיימים חוקי ניוטון נקראת מערכת צירים אינרציאלית. נראה בהמשך שגם מערכות צירים נעות יכולות להיות אינרציאליות.



איור 3.1: החלקה במדרון משופע.

משטח משטח מפעיל על גוף כח $\vec{F} = N\hat{n}$ כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה הניצב לפני המשטח ומצביע לכיוון הגוף הניצב עליו. מניחים כי המשטח קשיח ולכן N יהיה כזה שלא יאפשר לגוף לנוע בכיוון הניצב למשטח. N יהיה תמיד חיובי או אפס, שכן המשטח איננו מושך אליו את הגוף.

גרביטציה בקרבת כדור הארץ מניחים כי הגרביטציה מפעילה על כל גוף כח המכוון כלפי מטה וגודלו $\vec{F} = -mg\hat{z}$, כאשר $\hat{z}$ וקור יחידה בכיוון מעלה, m היא מסת הגוף ו $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$.

דוגמה: גוף בנפילה חופשית

כשגוף חפשי ליפול תחת השפעת הגרביטציה (בקרבת כדור הארץ) נקבל את משוואת הכוחות

$$m\ddot{r} = ma = -mg\hat{z} \quad (3.1)$$

זוהי משוואה המתארת תנועה בתאוצה קבועה g בכיוון השלילי של ציר ה z (כלפי מטה). התנועה של גוף מתוארת ע"י

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\hat{z} \quad (3.2)$$

מסלול תנועת הגוף, אם כן, יהיה פרבולה, או קו ישר במקרה ש $\vec{v}_0$ כוון $\hat{z}$ (או שווה לאפס).

דוגמה: החלקה במדרון

גוף מחליק במדרון נטוי בזווית α . נגביל עצמנו למקרה הדו מימדי בו המדרון המשופע נחתך עם מישור xz . התנועה של הגוף מוגבלת לישר המקביל לפני המדרון. בניצב לפני המישור

נקבל

$$N - mg \cos \alpha = 0$$

ובמקביל לפני המישור

$$mg \sin \alpha = ma$$

כאשר a היא התאוצה במקביל למישור המשופע. הפתרון יהיה

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2 \sin \alpha}{2} \quad (3.3)$$

כאשר x היא קואורדינטה מקבילה למישור המשופע.²

דוגמה: אוסילטור הרמוני

גוף מחובר לקפיץ המחובר לקיר. הגוף חפשי לנוע בציר ה- x . נגדיר את הנקודה $x = 0$ כנקודה בה הקפיץ רפוי. משוואת הכוחות על הגוף בציר ה- x היא

$$F = -kx = ma = m\ddot{x} \quad (3.4)$$

פתרונה הכללי של משוואה זו הוא

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.5)$$

כאשר A ו- φ נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה ו- $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$. שימו לב שתדירות התנודות כלל אינה תלויה במשרעת (אמפליטודה) A - כלומר זמן המחזור יהיה זהה בין אם התנודות גדולות או קטנות.

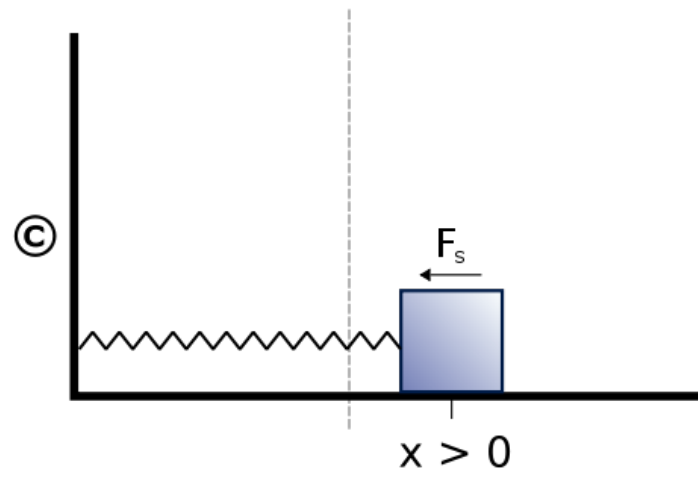
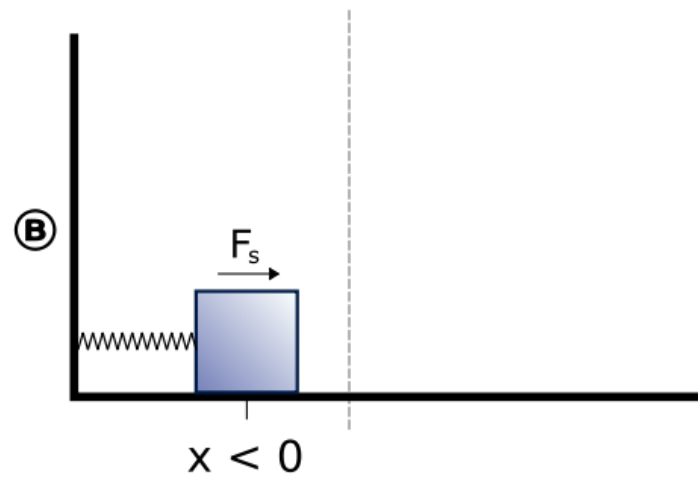
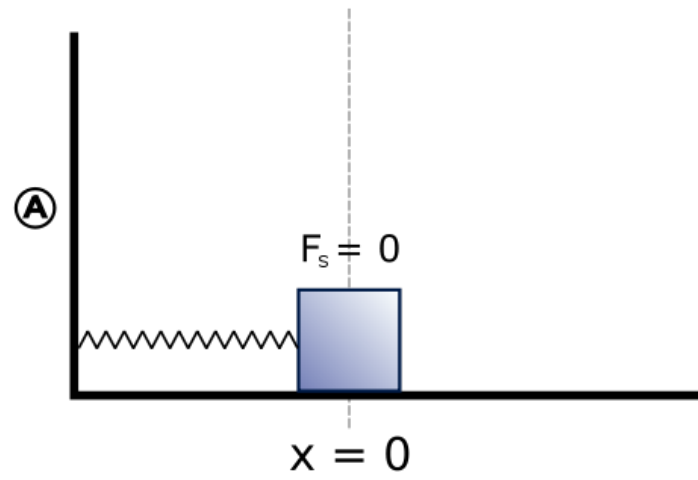
דוגמה: מטוטלת מתמטית

גוף נקודתי בעל מסה m תלוי מהתקרה בחוט או מוט חסר מסה באורך ℓ . הגוף חופשי להתנדנד במישור xz . הכוחות הפועלים הם גרביטציה (בקירוב של גוף בקרבת כדור הארץ) והמתיחות בחוט. החוט מגביל את התנועה לתנועה במעגל (או על קשת מעגל) ולכן מיקום הגוף מתואר חד ערכית ע"י הזווית $\theta(t)$ המתארת את זווית החוט יחסית לאנך לתקרה (הפונה כלפי מטה). הכח הגרביטציוני על הגוף הוא $\vec{F}_{grav} = -mg\hat{z}$, והכח שמפעיל החוט הוא $\vec{T}$ וכיוונו מקביל לכיוון החוט. נפרק את הכח הגרביטציוני לרכיב בכיוון $\vec{T}$, ולרכיב ניצב ל- $\vec{T}$. כיוון שהתנועה מעגלית, צורת התאוצה נתונה ע"י משוואה 2.10. בכיוון הרדיאלי נקבל את המשוואה

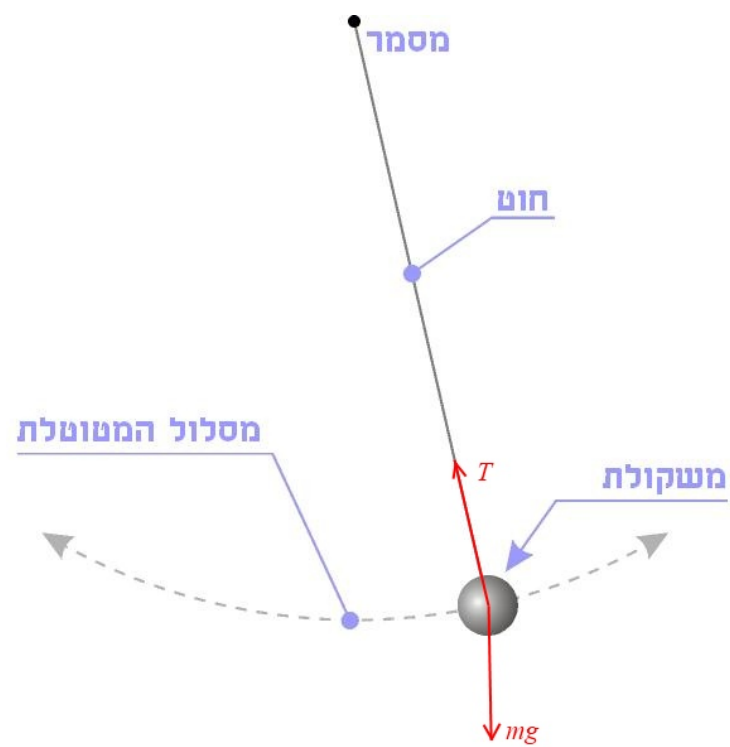
$$T - mg \cos \theta = -m\dot{\theta}^2 \ell$$

ובכיוון המשיקי נקבל

²בחרנו את הכיוון החיובי של ציר ה- x לפנות ימינה.



איור 3.2: אוסילטור הרמוני בשלבים שונים של התנועה המחזורית.



איור 3.3: מטוטלת מתמטית והכוחות הפועלים עליה.

$$-mg \sin \theta = ma_{\text{tangent}} = m\ell\ddot{\theta} \quad (3.6)$$

משוואה 3.6 אינה פתירה בפונקציות אלמנטריות. אולם, אם נסתפק בתחום בו הזווית θ קטנה ומקיימת $\sin \theta \approx \theta$, נקבל כי המשוואה נותנת בקירוב

$$-mg\theta = m\ell\ddot{\theta} \quad (3.7)$$

ופתרונה הוא

$$\theta(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.8)$$

כאשר A ו- φ נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה ו- $\Omega \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.³ שוב, תדירות התנודות אינה תלויה במשרעת (וכאן גם לא במסה), ולכן ניתן להשתמש בתנודות מטוטלת על מנת למדוד זמן, שכן המחזור כמעט לא משתנה עם דעיכת התנודות. קירוב זה נכשל כאשר זווית התנודות אינה קטנה.

3.2 חוקי השימור

3.2.1 שימור התנע

נגדיר את התנע $\vec{P}$ של גוף בתור

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (3.9)$$

כאשר $\vec{v}$ הוא ווקטור מהירות הגוף. כאשר מסת הגוף קבועה, ניתן לכתוב את החוק השני של ניוטון בצורה

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} \quad (3.10)$$

נגדיר מערכת המורכבת ממספר גופים $i = 1, \dots, n$. אם גוף j מפעיל על גוף i כח $\vec{F}_{ij}$, וכן פועל על גוף i כח חיצוני $\vec{F}_{ie}$ ע"י גורמים מחוץ למערכת נקבל

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{P}}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_{ie} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \right)$$

³שימו לב שכאן $\dot{\theta} \neq \Omega$. Ω היא תדירות התנודות, ולא המהירות הזוויתית של המטוטלת. לכן היא סומנה באות גדולה.

(כאשר נגדיר לכל i , $\vec{F}_{ii} = 0$, שכן גוף איננו מפעיל כח על עצמו). ניתן לכתוב זאת בצורה

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \dot{\vec{P}}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ie} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ie} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ie} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})\end{aligned}$$

אבל, לפי החוק השלישי של ניוטון לכל i, j נקבל $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. לכן,

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{P}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ie} \quad (3.11)$$

כלומר השינוי בתנע הכללי של המערכת (סכום התנעים של הגופים במערכת) תלוי רק בכוחות חיצוניים. אם אין כוחות חיצוניים או שסכומם הכולל הוא אפס נקבל

$$\dot{\vec{P}} \equiv \sum_{i=1}^n \dot{\vec{P}}_i = 0 \quad (3.12)$$

כלומר,

$$\vec{P} = \text{const} \quad (3.13)$$

ממשוואה 3.11 ניתן לראות שגם אם יש כוחות חיצוניים, התנע נשמר בכל כיוון בו לא פועל כח.

מרכז המסה

מרכז המסה של מערכת המורכבת ממספר גופים מוגדר ע"י

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.14)$$

אם נגדיר את המסה הכוללת של המערכת $M \equiv \sum_{i=1}^n m_i$ נקבל שהתנע הכולל של המערכת הוא $\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$, כלומר התנע הכולל נקבע על פי מהירות מרכז המסה. אם התנע נשמר, מרכז המסה ינוע במהירות קבועה (בגודלה ובכיוונה).

דוגמה: התנגשות פלסטית

כאשר שני גופים נעים (או יותר) מתנגשים זה בזה, ולא פועלים עליהם כוחות חיצוניים, התנע הכולל נשמר. בהתנגשות פלסטית הגופים נצמדים זה לזה, ונעים יחד לאחר ההתנגשות. נניח

כי גוף 1, בעל מסה m_1 נע לפני ההתנגשות במהירות $\vec{v}_1$ ואילו גוף 2, בעל מסה m_2 נע לפני ההתנגשות במהירות $\vec{v}_2$. לאחר ההתנגשות מהירותם המשותפת של הגופים, $\vec{u}$ תקיים

$$(m_1 + m_2)\vec{u} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad (3.15)$$

באופן כללי, בהתנגשות פלסטית של n גופים,

$$\vec{u} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.16)$$

שימו לב כי התוצאה איננה תלויה כלל בסדר ההתנגשויות ובתכונות הכוחות הפנימיים בין הגופים, ובכך גדולתם של חוקי השימור.

3.2.2 שימור האנרגיה

עבודה ואנרגיה

נניח כי גוף נע במסלול $\vec{r}(t)$ בין הזמנים t_1 ו t_2 . נבצע אינטגרציה על משוואה 3.10

$$\int_{\vec{r}(t)} \dot{\vec{P}} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{r} \quad (3.17)$$

(זהו אינטגרל מסלולי). בצד שמאל נבצע החלפת משתנים

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt$$

ונקבל

$$\int_{\vec{r}(t)} \dot{\vec{P}} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{P}} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{mv^2(t_2)}{2} - \frac{mv^2(t_1)}{2}$$

כאשר השתמשנו בשוויון האחרון במשפט היסודי של האינפי. אם נגדיר את האנרגיה הקינטית להיות

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.18)$$

נוכל לכתוב את משוואה 3.17 בצורה

$$\Delta E_k \equiv E_k(t_2) - E_k(t_1) = \int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{r} \equiv W \quad (3.19)$$

האינטגרל המסלולי מכונה העבודה של הכח F בין הזמנים t_1 ו t_2 ומסומן W . שימו לב כי זוהי משוואה סקלרית. ממשוואה זו ניתן לחשב את שינוי גודל המהירות של גוף על פי הכוחות שפעלו עליו לאורך המסלול.

במקרים מיוחדים ניתן לקבל תוצאות מיידיות מהמשוואה. לדוגמה, כאשר גוף נע במעגל אופקי, כח המתיחות בחוט $\vec{T}$ תמיד פונה לכיוון מרכז המעגל, ולכן תמיד ניצב לאלמנט המסלול $d\vec{r}$, שמשק למעגל, ומכאן שעבודת כח זה על הגוף היא אפס. לכן, האנרגיה הקינטית תשמר. כלומר, גודל המהירות חייב להשמר למרות שכיוונה לא נשמר. במקרה של מעגל אנכי, הגרביטציה איננה פועלת בכיוון מרכז המעגל, ולכן מבצעת עבודה על הגוף והאנרגיה הקינטית אינה נשמרת. נדון במקרה זה בהמשך.

כוחות משמרים

תוצאת האינטגרל המסלולי $W = \int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{r}$ תלויה במסלול שנבחר ובזמן התנועה. במקרים רבים הכח איננו תלוי בזמן ובמהירות, אלא רק במיקום הגוף. במקרה כזה נקבל $W = \int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. עבור כוחות מסויימים תוצאת האינטגרל איננה תלויה במסלול כולו, אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$ ו $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$. במקרה כזה ניתן למצוא פונקציה $U(\vec{r})$ המקיימת $W = \int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$. הפונקציה U מכונה "אנרגיה פוטנציאלית". נוכל אז לכתוב את משוואה 3.19 בצורה

$$\Delta E_k \equiv E_k(t_2) - E_k(t_1) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

ולכן,

$$E(t_2) \equiv E_k(t_2) + U(\vec{r}_2) = E_k(t_1) + U(\vec{r}_1) \equiv E(t_1) = \text{const} \quad (3.20)$$

משוואה זו נכונה לכל זמן ולכן האנרגיה הכללית נשמרת לכל אורך התנועה. גודל הנשמר לכל אורך התנועה נקרא אינווריאנט (או בעברית "שמורה") של התנועה.

משפט 2

בתחום כוכבי התנאים הבאים שקולים זה לזה

1. האינטגרל הקווי $\int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ אינו תלוי במסלול אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום, לכל מסלול במרחב.
2. האינטגרל על מסלול סגור מקיים $\oint_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ לכל מסלול סגור.
3. קיימת פונקציה $U(\vec{r})$ המקיימת $\int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$ לכל מסלול המתחיל בנקודה $\vec{r}_1$ ומסתיים בנקודה $\vec{r}_2$.
4. קיימת פונקציה המקיימת $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$.
5. מתקיים $\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$ לכל $\vec{r}$.

הוכחה. $1 \Leftrightarrow 2$ אם $\int_{\vec{r}_a(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_b(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ עבור כל שני מסלולים $\vec{r}_a(t), \vec{r}_b(t)$ המקיימים $\vec{r}_a(t_1) = \vec{r}_b(t_1) = \vec{r}_1$ וכן $\vec{r}_a(t_2) = \vec{r}_b(t_2) = \vec{r}_2$, נגדיר מסלול חדש

$$\vec{r}_c(t) = \begin{cases} \vec{r}_a(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vec{r}_b(t_1 + t_2 - t) & t_2 < t \leq t_1 + t_2 \end{cases},$$

זהו מסלול סגור, המתחיל ומסתיים בנקודה $\vec{r}_1$ ועובר על כל המסלול $\vec{r}_a(t)$ ולאחריו על המסלול $\vec{r}_b(t)$ בכיוון ההפוך. האינטגרל הסגור על מסלול זה מקיים

$$\oint_{\vec{r}_c(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_b(t)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

באותו אופן אם לכל מסלול סגור מתקיים שהאינטגרל מתאפס אזי לכל זוג מסלולים ניתן למצוא מסלול סגור מתאים ומהתאפסותו שני האינטגרלים שווים.

3 $\Leftrightarrow$ 1 ברור שאם 3 מתקיים אז האינטגרל לא תלוי במסלול. בכיוון ההפוך, אם 1 מתקיים, נגדיר עבור נקודה שרירותית מסויימת $\vec{r}_0$, $U(\vec{r}_0) = 0$ ולכל נקודה $\vec{r}$ נגדיר $U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. זה מוגדר היטב, שכן האינטגרל לא תלוי במסלול. בגלל אי התלות במסלול נקבל שעבור כל זוג נקודות $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ מתקיים

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

3 $\Leftarrow$ 4 אם קיימת הפונקציה $U(\vec{r})$ אזי היא מקיימת

$$-\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+x\hat{x}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{x} = F_x(\vec{r})$$

באותה צורה, עבור y ו z מקבלים $-\nabla U = \vec{F}(\vec{r})$.
4 $\Leftarrow$ 5 $\nabla \times \nabla U(\vec{r}) = 0$ לכל פונקציה סקלרית U . זה נובע מיידית מהגדרת curl grad (בדקו!).

5 $\Leftarrow$ 2 זהו משפט סטוקס. כאן משתמשים בעובדה שהתחום הוא כוכבי. בתחומים עם $\square$ "חורים" כיוון זה עלול להכשל.

כאשר בבעיה מספר גופים (n) נשמר סה"כ האנרגיה

$$E = \sum_{i=1}^n E_{ki} + U_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

קפיץ בקפיץ בממד אחד הכח הוא $F = -kx$, כאשר x ההתרחקות מנקודת שיווי המשקל. נגדיר את נקודת הייחוס של האנרגיה הפוטנציאלית בנקודת שיווי המשקל. האנרגיה הפוטנציאלית היא, אם כן

$$U(x) = - \int_0^x (-kx') dx' = \frac{kx^2}{2}$$

גרביטציה (בקרב כדור"א) הכח הוא $\vec{F} = -mg\hat{z}$. נגדיר את נקודת הייחוס בראשית הצירים. האנרגיה הפוטנציאלית היא

$$U(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} (-mg\hat{z}) \cdot d\vec{r}' = \int_0^{z(\vec{r})} mg dz' = mgz$$

דוגמה: התנגשות אלסטית

בהתנגשות אלסטית בין שני גופים הן התנע והן האנרגיה נשמרים. ההתנגשות רגעית ולאחריה הגופים נפרדים. נניח כי גוף 1 בעל מסה m_1 מגיע במהירות v_1 ויוצא לאחר ההתנגשות במהירות u_1 . גוף 2 בעל מסה m_2 מגיע במהירות v_2 ויוצא לאחר ההתנגשות במהירות u_2 . משימור התנע מקבלים

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (3.21)$$

ולכן

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \quad (3.22)$$

מצד שני, משימור האנרגיה

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

כלומר,

$$\frac{m_1(v_1^2 - u_1^2)}{2} = \frac{m_2(u_2^2 - v_2^2)}{2} \quad (3.23)$$

מחלוקת משוואה 3.23 במשוואה 3.22 מקבלים

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \quad (3.24)$$

או, לחלופין

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2) \quad (3.25)$$

כלומר, הפרש המהירויות בין הגופים הופך סימן לאחר ההתנגשות. מפתרון משוואות 3.21 ו-3.25 ניתן למצוא את מהירויות שני הגופים לאחר ההתנגשות.

שימו לב כי במימד גבוה יותר לא ניתן למצוא את מהירויות הגופים משימור התנע והאנרגיה בלבד. במימד d שימור התנע נותן d משוואות ושימור האנרגיה עוד אחת, סה"כ $d+1$ משוואות, אך ישנם $2d$ נעלמים (d רכיבים של $\vec{u}_1$ ו- d רכיבים של $\vec{u}_2$). כך שאם $d > 1$ לא ניתן להסיק מהן המהירויות לאחר ההתנגשות משימור התנע והאנרגיה בלבד, ויש צורך להתחשב גם באופן ההתנגשות. בהתנגשות בין כדורי ביליארד, לדוגמה, כיוון תנועתם לאחר ההתנגשות תלוי במיקום נקודת הפגיעה.

3.2.3 שימור התנע הזוויתי

אם נכפול משמאל (מכפלה וקטורית) את משוואה 3.10 ב- $\vec{r}$ נקבל

$$\vec{r} \times \dot{\vec{P}} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.26)$$

נגדיר עתה את התנע הזוויתי

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (3.27)$$

אם נגזור אותו לפי הזמן נקבל

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{P} + \vec{r} \times \dot{\vec{P}} \quad (3.28)$$

נשים לב שלפי ההגדרה $\vec{P} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ ולכן $\vec{P} \times \dot{\vec{r}} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$ ומכאן נקבל לפי משוואות 3.26 ו-3.28

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{F} \equiv \vec{\tau} \quad (3.29)$$

האיבר הימני במשוואה 3.29 נקרא הטורק (torque) ולעיתים גם מומנט הפיתול. הוא שווה לכח כפול אורך הזרוע הניצב לכח. במקרים מסויימים ניתן לבחור את ראשית הצירים כך שהכח יפעל תמיד במקביל ל- $\vec{r}$. במקרים כאלה התנע הזוויתי הוא אינווריאנט של התנועה $\vec{L}(t) = \text{const}$. שימו לב כי חוק שימור זה, כמו שימור התנע, הוא ווקטורי. כלומר, מתקיים לכל רכיב בנפרד. במקרים מסויימים רק חלק מרכיבי הטורק מתאפסים ולכן רק חלק מרכיבי התנע הזוויתי נשמרים.

כח מרכזי

אם הכח על גוף מסויים פועל תמיד לכיוון נקודה קבועה במרחב, נקבע את ראשית הצירים באותה נקודה. במקרה זה נקבל $\vec{F} \parallel \vec{r}$ ולכן $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ ולכן $\dot{\vec{L}} = 0$. עבור כח כזה התנע הזוויתי (יחסית לראשית הצירים) נשמר לכל אורך התנועה.

פוטנציאל אפקטיבי

כאשר גוף נע במישור (לדוגמה xy) ניתן לכתוב את האנרגיה הכללית בצורה

$$E = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + U(x, y) = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} + U(r)$$

(בדקו!). אולם, התנע הזוויתי הוא $l = mr^2\dot{\theta}$, ולכן,

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \equiv \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r)$$

הגודל

$$U_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

מכונה "הפוטנציאל האפקטיבי". ניתן להתייחס לבעיה של תנועת הגוף בכיוון הרדיאלי בלבד כבעיה חד ממדית אשר הפוטנציאל בה הוא הפוטנציאל האפקטיבי.

3.3 גרביטציה

בנוסף לשלושת חוקי התנועה, קבע ניוטון גם חוק רביעי, הנוגע לכח הגרביטציה ששני גופים מפעילים זה על זה. לפי חוק זה הכח שמפעיל גוף 2 על גוף 1 הוא

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} \equiv -\frac{Gm_1m_2\hat{r}}{\|\vec{r}\|^2} \quad (3.30)$$

כאשר $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ הוא קבוע הגרביטציה האוניברסלי (המייצג את כוחה של הגרביטציה), $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ הוא הווקטור בין הגופים, ו- $\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ הוא וקטור יחידה המצביע מגוף 2 לכיוון גוף 1.

כח הגרביטציה הוא כח משמר. מקובל לבחור את נקודת האינסוף כנקודת הייחוס עבור הפוטנציאל הגרביטציוני. האנרגיה הפוטנציאלית היא

$$U(\vec{r}) = - \int_{-\infty}^{\vec{r}} \left(- \frac{Gm_1m_2\hat{r}}{\vec{r}^2} \right) d\vec{r} = - \frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}\|} \quad (3.31)$$

פרק 4

מכניקה אנליטית

4.1 פונקציונלים

4.1.1 הגדרה

פונקציונל הוא פונקציה ממרחב פונקציות מסוים לסקלרים (לדוגמה הממשיים), $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, כאשר S הוא הפונקציונל ו- $\mathcal{B}$ מרחב פונקציות כלשהו. לדוגמה

$$f \mapsto f(x_0)$$

$$f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$f \mapsto f(3) + f'(8) + \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$$

הם פונקציונלים. בקורס נעסוק רק בפונקציונלים מהצורה

$$S(\vec{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt \quad (4.1)$$

כאשר $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ הוא צירוף כלשהו של $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ ו- t המכונה הלגרנזיאן של הבעיה. בעיות רבות ניתנות לניסוח בצורה 4.1.

4.1.2 מינימיזציה של פונקציונלים

פעמים רבות אנו מעוניינים למצוא את הפונקציה שעבורה ערך הפונקציונל S מינימלי (או, לעיתים, מקסימלי). נניח שאנו מחפשים את הפונקציה $q(t)$ המקיימת $q(t_1) = a$, $q(t_2) = b$ שעבורה הפונקציונל מינימלי. תנאי הכרחי לכך ש- $q(t)$ נותנת מינימום הוא שלכל פונקציה $p(t)$ המקיימת $p(t_1) = p(t_2) = 0$ נקבל

$$S(q + p) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + p, \dot{q} + \dot{p}, t) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = S(q)$$

נבחר $p(t) = \epsilon h(t)$ עבור פונקציה $h(t)$ כלשהי. נשים לב שכאשר $\mathcal{L}$ גזירה מתקיים

$$\mathcal{L}(\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon), t) = \mathcal{L}(\alpha(0), \beta(0), t) + \epsilon \frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon} + o(\epsilon) = \mathcal{L}(\alpha(0), \beta(0), t) + \epsilon \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\epsilon} + \epsilon \frac{d\mathcal{L}}{d\beta} \frac{d\beta}{d\epsilon} + o(\epsilon)$$

נקבל

$$S(q+p) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q+\epsilon h, \dot{q}+\epsilon \dot{h}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \epsilon h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \epsilon \dot{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + o(\epsilon) \right] dt$$

כאשר $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ ו $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ הן נגזרות פורמליות של הביטוי $\mathcal{L}$, ובהנחה $\mathcal{L}$ גזירה לפי שני הפרמטרים. מכאן מקבלים

$$\Delta S \equiv S(q+p) - S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\epsilon h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \epsilon \frac{dh}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + o(\epsilon) \right] dt$$

אם q גזירה פעמיים לפי t ניתן לבצע אינטגרציה בחלקים על המחובר השני באינטגרל ולקבל

$$\Delta S = \epsilon h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\epsilon h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \epsilon h \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + o(\epsilon) \right] dt$$

אבל בחרנו את $h(t)$ כך ש $h(t_1) = h(t_2) = 0$ ולכן המחובר הראשון מתאפס. כמו כן, ניתן לבחור את ϵ להיות קטן כרצוננו, כך שאם האינטגרלים סופיים רק האיברים הלינאריים ב ϵ תורמים. לכן, האינטגרל חייב להתאפס לכל פונקציה $h(t)$, אחרת ΔS יהיה שלילי עבור h או $-h$ בהתאמה בסתירה למינימליות של q . מכאן, לפי משפט **??**, שהביטוי הלינארי $\epsilon h \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)$ חייב להתאפס זהותית בקטע (t_1, t_2) . אם הלגרנז'יאן תלוי במספר פונקציות $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, אותו התנאי חייב להתקיים עבור כל אחת מהן בנפרד. מכאן נקבל,¹

משפט 3

תנאי הכרחי להיותן של פונקציות $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ מינימום של הפונקציונל $S(\vec{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt$ מתקיימת משוואת אוילר לגרנז':

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (4.2)$$

דוגמה: הקו בעל האורך המינימלי בין שתי נקודות

אורך קו $y(x)$ ניתן לתאור ע"י

$$S(y, y', x) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

¹קבלת התנאים המספיקים עבור מינימיזציה של הפונקציונל היא מסובכת ובכל מקרה, בשימוש בפורמליזם זה לצורך פתרון בעיות פיסיקליות תנאים אלה אינם נחוצים.

הלגרנז'יאן הוא, אם כן

$$\mathcal{L}(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

נכתוב משוואת אוילר לגרנז' עבור המשתנה x והפונקציה $y(x)$ ונקבל

$$0 - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

כלומר

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

עבור קבוע c ומפישוט המשוואה המקבלים $y' = c_1$ עבור קבוע כלשהו c_1 . מכאן מקבלים

$$y = c_1 x + c_2$$

כלומר, הקו הקצר ביותר בין שתי נקודות הוא קו ישר.²

אי תלות בקואורדינטות

משפט 4

בהתמרת קואורדינטות מ q ל $p = p(q)$ אם הפונקציה $q = q_0$ נותנת מינימום של הפונקציונל (כלומר מקיימת את משוואת אוילר לגרנז') אזי גם $p_0 \equiv p(q_0)$ מקיימת את משוואת אוילר לגרנז'.

הוכחה. אם $p = p(q)$ אז $\dot{p}(q, \dot{q}) = \frac{dp}{dq} \dot{q}$ ולכן

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \frac{dp}{dq} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \frac{dp}{dq} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{d^2 p}{dq^2} \dot{q}$$

כמו כן

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{\partial \dot{p}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{dp}{dq}$$

ידוע כי

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

כלומר

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \frac{dp}{dq} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{d^2 p}{dq^2} \dot{q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{dp}{dq} \right)$$

²הפורמליזם כאן מוגבל לקוים שאינם מקבילים לציר ה y כיון שהנחנו ש y הוא פונקציה חד ערכית של x . ניתן לפתור כאן באופן כללי בהנחה ש $x(t)$ ו $y(t)$ הן שתי פונקציות התלויות בפרמטר t אך החישוב מעט יותר מסובך והפתרון דומה.

אבל

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{dp}{dq} \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right) \frac{dp}{dq} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{d}{dt} \frac{dp}{dq}$$

וכן

$$\frac{d}{dt} \frac{dp}{dq} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} = \frac{d^2 p}{dq^2} \dot{q}$$

ומכאן

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \frac{dp}{dq} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{d^2 p}{dq^2} \dot{q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right) \frac{dp}{dq} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \frac{d^2 p}{dq^2} \dot{q}$$

ומכאן

$$0 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right) \frac{dp}{dq}$$

כלומר אם $\frac{dp}{dq}$ לא מתאפס (ההתמרה הפיכה) אזי גם p מקיים משוואת אוילר לגרנז'.³ □

4.2 עקרון הפעולה המינימלית

נניח נגדיר את הפונקציונל הבא (המכונה פעולה)

$$S(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} [T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r})] dt \quad (4.3)$$

כאשר

$$T(\dot{\vec{r}}) \equiv E_k = \frac{m \|\dot{\vec{r}}\|^2}{2}$$

ו $U(\vec{r})$ היא האנרגיה הפוטנציאלית. זהו פונקציונל שהלגרנז'יאן שלו הוא $\mathcal{L} = T - U$.
לגרנז'יאן זה נקרא הלגרנז'יאן הפיסיקלי של המערכת. נכתוב את משוואות אוילר לגרנז'
עבורו ונקבל לכל קואורדינטה

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = 0$$

אם נציב את הצורה המפורשת של T ו U נקבל

$$m\ddot{\vec{r}} \equiv \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{P}} = -\nabla U(\vec{r}) \equiv \vec{F}(\vec{r}) \quad (4.4)$$

אך משוואה זו זהה לחוק השני של ניוטון. לכן, במקום לכתוב משוואות כוחות עבור כל גוף
בבעיה, ניתן לכתוב לגרנז'יאן פיסיקלי עבור כל הגופים בבעיה ולפתור משוואות אוילר לגרנז'.

³שימו לב כי גודל הפעולה עצמה לא חייב להיות אינווריאנטי אך המשוואה כן.

כפי שראינו במשפט 4 ניתן להשתמש בכל סט קואורדינטות $q_i(\vec{r})$ לתיאור המערכת הפיסיקלית. פתרון משוואות אוילר לגרנז' ייתן את תיאור התנהגות המערכת בקואורדינטות אלה. יש צורך רק לבטא את האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית באמצעות הקואורדינטות החדשות. לכן, ניתן להשתמש בכל מערכת קואורדינטות לתאור המערכת המכנית. לפורמליזם הלגרנז'י מספר ייתרונות על פני הגישה הניוטונית:

- ניתן לעבוד בכל מערכת קואורדינטות, לאו דווקא קרטזיות.
- אפשר לכתוב משוואות כמספר דרגות החופש בלבד, ולא כמספר הצירים (מועיל כאשר יש אילוצים).
- ניתן להכניס אילוצים באמצעות כופלי לגרנז'.

דוגמה: מטוטלת מתמטית

עבור מטוטלת מתמטית כמתואר בתמונה 3.3 האנרגיה הקינטית היא $T = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2}$ כאשר ℓ אורך החוט, והאנרגיה הפוטנציאלית (יחסית למסמר) נתונה ע"י $U = -mg\ell \cos \theta$. לכן,

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + mg\ell \cos \theta$$

ומשוואת אוילר לגרנז' נותנת

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0$$

כלומר, קיבלנו אותה משוואה כמו משוואת ישר בחוקי ניוטון, ללא צורך בפרוק לצירים או התעסקות במתיחות בחוט. אולם, נדרשנו לדעת לבטא את האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית בעזרת θ .

4.2.1 קואורדינטות ציקליות

מקובל להגדיר עבור כל קואורדינטה תנע מוכלל:

$$P_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.5)$$

וכח מוכלל

$$F_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (4.6)$$

וממשוואת אוילר לגרנז' מקבלים $\dot{P}_i = F_i$. אם הקואורדינטה q_i לא מופיעה מפורשות בלגרנז'יאן (אלא רק הנגזרת שלה) היא מכונה קואורדינטה ציקלית. במקרה זה מקבלים $\dot{P}_i = 0$, כלומר, התנע המוכלל עבור קואורדינטה זו נשמר:

$$P_i = \text{const} \quad (4.7)$$

4.3 מכניקה המילטונית

4.3.1 טרנספורם לז'נדר

בהנתן פונקציה קמורה או קעורה $f(x)$ של משתנה x , נגדיר את המשתנה y להיות

$$y(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

y חד־חד ערכי ב x בגלל המונוטוניות של הנגזרת ולכן קיימת גם (בתחום מסויים) פונקציה הופכית $x(y)$. טרנספורם לז'נדר של $f(x)$ יוגדר להיות

$$g(y) = x(y)y - f(x(y)) \quad (4.8)$$

מהגדרת הטרנספורם מתקבל

$$\frac{\partial g}{\partial y} = y \frac{\partial x}{\partial y} + x - \frac{\partial f}{\partial y} = y \frac{\partial x}{\partial y} + x - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = y \frac{\partial x}{\partial y} + x - y \frac{\partial x}{\partial y} = x \quad (4.9)$$

ולכן המשתנה הצמוד ל y הוא x , וכן טרנספורם לז'נדר של g הוא

$$h(x) = xy - g(y) = xy - (xy - f) = f(x)$$

כלומר, טרנספורם לז'נדר הוא ההפכי של עצמו.

4.3.2 ההמילטוניאן ומשוואות המילטון

נתייחס למשתנה $\dot{q}$ בלגרנזיאן כמשתנה בלתי תלוי (נקודתית) ב q . נגדיר את התנע הצמוד לקואורדינטה כמשתנה הטרנספורמציה

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \quad (4.10)$$

ונבצע טרנספורם לז'נדר ללגרנזיאן

$$\mathcal{H}(p, q) = p\dot{q}(p, q) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(p, q), t) \quad (4.11)$$

ביטוי זה, המבוטא באמצעות q ו p בלבד, בלי $\dot{q}$ נקרא ההמילטוניאן. אם יש יותר מקואורדינטה אחת, מקבלים, באופן כללי

$$\mathcal{H}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - \mathcal{L}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) \quad (4.12)$$

כאשר גם כאן יש לבטא את $\mathcal{H}$ באמצעות p_i ו q_i בלבד. ממשוואה 4.9 מקבלים

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}$$

כמו כן, ממשוואה 4.11 מקבלים

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} &= p \frac{\partial \dot{q}(p, q)}{\partial q} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} + \frac{\partial \dot{q}(p, q)}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{q}(p, q)}{\partial q} \left(p - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q}\end{aligned}$$

ממשוואה 4.10 נובע כי

$$p - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0$$

ולפי משוואת אוילר לגרנז'

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{p}$$

ומכאן מקבלים

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dot{p}$$

באופן כללי מקבלים עבור כל קואורדינטה את משוואות המילטון

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (4.13)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (4.14)$$

עבור n קואורדינטות q_i , קיבלנו $2n$ משוואות מסדר ראשון במקום n משוואות מסדר שני בפורמליזם הלגרנזי.

הערה

בקואורדינטות קרטזיות, כאשר הפוטנציאל איננו תלוי בזמן, מתחילים מהלגרנזיאן

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r})$$

ומקבלים

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i \equiv P_i$$

כאשר r_i הוא x, y או z בהתאמה. כלומר, התנע המוכלל הוא פשוט התנע הקווי. ההמילטוניאן הוא, אם כן,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(p, q) &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{r}_i - \mathcal{L} \\ &= \dot{\vec{r}} \cdot (m\dot{\vec{r}}) - \left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}) \right) \\ &= \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) \\ &= \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) \equiv T + U\end{aligned}$$

ההמילטוניאן כאן שווה לאנרגיה הכללית. תכונה זו איננה נכונה באופן כללי בכל בחירת קואורדינטות.

כמו כן, ההמילטוניאן איננו אינווריאנטי תחת מעבר קואורדינטות. כאשר רוצים לחשבו בקואורדינטות חדשות, יש להמיר את הלגרנז'יאן ולבצע טרנספורם לז'נדר מחדש.⁴

4.3.3 סוגרי פואסון

בתנועת גוף, רבים מהגדלים הדינמיים (כלומר התלויים בתנועה) ניתנים לכתיבה כפונקציה של הקואורדינטות והתנעים המוכללים. עבור זוג גדלים כאלה, $A(p_1 \dots, p_n, q_1 \dots, q_n, t)$ ו $B(p_1 \dots, p_n, q_1 \dots, q_n, t)$ ניתן להגדיר את סוגרי פואסון שלהם

$$\{A, B\} \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \quad (4.15)$$

ניתן לראות שתמיד $\{A, B\} = -\{B, A\}$. ניתן להשתמש בסוגרי פואסון כפורמליזם נוסף למכניקה הקלאסית. לדוגמה, בחישוב שינוי עם הזמן של גודל קינטי נקבל

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

המחובר הראשון הוא התלות המפורשת של A בזמן. הוא מתאפס אם A לא תלוי מפורשות בזמן (אלא רק דרך q ו p), כפי שקורה ברוב המקרים המעניינים. נציב את משוואות המילטון (4.13 ו 4.14) ונקבל

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$$

ומכאן נובע

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \quad (4.16)$$

כלומר סוגרי פואסון של משתנה דינמי (שאינו תלוי מפורשות בזמן) עם ההמילטוניאן נותנת את קצב השתנותו בזמן.

⁴יש התמרות קואורדינטות מסוימות שתחתן ההמילטוניאן כן אינווריאנטי. הן נקראות התמרות קנוניות, ויש להן חשיבות במכניקה. לא נעסוק בהן במסגרת קורס זה.

4.3.4 מרחב הפאזה ומשפט ליוביל

ראינו כי בפורמליזם ההמילטוני מצבה של מערכת בעלת n גופים d ממדים בזמן נתון מתואר בצורה מלאה ע"י $2dn$ מספרים p_i, q_i . נגדיר מרחב בן $2dn$ ממדים שכל נקודה בו מתוארת ע"י הקואורדינטות הנ"ל. מרחב זה נקרא מרחב הפאזה, וכל נקודה בו מסמנת את מצבה של המערכת כולה בזמן מסוים. שינוי המיקום והתנע של כל הגופים במערכת מתואר ע"י תנועת הנקודה עם הזמן. לכל נקודה ניתן לצייר חץ המתאר את כיוון תנועת המערכת מאותה נקודה. ע"י המיפוי האקספוננציאלי ניתן להמשיך את החץ ולקבל קו במרחב הפאזה המתאר את התנהגות המערכת לאורך זמן.

משוואות המילטון הן משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון הנתונות בצורה נורמלית. אם הן ממלאות את תנאי ליפשיץ (כלומר איננו מתקרבים לנקודה סינגולרית) אז יש להן פתרון יחיד עבור תנאי התחלה נתונים. לכן, לא ייתכן ששני קווים כאלה יחתכו בנקודה. דרך כל נקודה במרחב עובר קו אחד ויחיד. כלומר, ההמילטוניאן מחלק את מרחב הפאזה לאוסף מסלולים זרים.

הפיכות בזמן

נניח שהלגרנזיאן לא תלוי מפורשות בזמן (רוב הלגרנזיאנים הפיסיקליים אינם תלויים מפורשות בזמן, שכן מניחים שתנאי הבעיה והכוחות בין הגופים תלויים רק במיקומם ואינם שונים מהותית מזמן לזמן). במקרה כזה $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$. אם נהפוך את כיוון הזמן - כלומר נעבור לזמן חדש $t' = -t$ נקבל שהקואורדינטות יהיו $q' = q$ וכן

$$\dot{q}' = \frac{dq'}{dt'} = \frac{dq'}{dt} = \frac{dq'}{dt} \frac{dt}{dt'} = -\dot{q}$$

נקבל,

$$p' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{d\dot{q}'} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = -p$$

כלומר, כצפוי, המיקום נשאר אותו מיקום, אך המהירות והתנע, שהם נגזרות לפי הזמן מחליפים סימן. אם ההמילטוניאן הוא בצורה הרגילה בקואורדינטות קרטזיות

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + U(q) = \frac{p'^2}{2m} + U(q')$$

נקבל ממשוואות המילטון

$$\dot{q}' = -\dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = -\frac{p}{m} = \frac{p'}{m} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'}$$

$$\dot{p}' = \frac{dp'}{dt'} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q'} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'}$$

כלומר, במערכת פיסיקלית בה האנרגיה הקינטית מוגדרת באופן הרגיל והפוטנציאל תלוי רק במיקום, הן ההמילטוניאן והן משוואות המילטון שומרים על צורתם בהפיכת כיוון הזמן. ניתן לראות זאת גם מהעובדה שהתאוצה היא הנגזרת השנייה לפי הזמן ואינה משנה את סימנה עם הפיכת כיוון הזמן, ולכן הכח נראה זהה.

משמעות הדבר היא שמסלול תנועה פיסיקלי שמורץ לאחור יראה גם הוא כמסלול אפשרי מבחינה פיסיקלית. כמו כן, מידיעת מצבם של הגופים בזמן מסוים ניתן לחשב את מצבם לא רק בכל זמן בעתיד אלא גם בכל זמן בעבר.

משפט ליוביל

לעיתים רוצים לדון באנסמבל (אוסף) של מערכות - כלומר אוסף של מערכות מעלות המילטוניאן זהה אך במצבי התחלה שונים, כאשר קיימת פונקציה צפיפות כלשהי - כגון צפיפות ההסתברות להיות במצב מסויים. פונקציה הצפיפות תסומן ע"י $\rho(p, q)$, כאשר מספר המצבים ביחידת נפח יהיה $\rho(p, q)dpdq$. כדי להראות כי הצפיפות אינווריאנטית יש להראות כי אלמנט השטח $dpdq$ אינווריאנטי בזמן. לשם כך נשתמש ביעקוביאן של המעבר בין אלמנטי השטח בזמנים שונים $dp(t)dq(t)$. נקבל כי

$$\begin{aligned} dp(t_2)dq(t_2) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial p(t_2)}{\partial p(t_1)} & \frac{\partial q(t_2)}{\partial p(t_1)} \\ \frac{\partial p(t_2)}{\partial q(t_1)} & \frac{\partial q(t_2)}{\partial q(t_1)} \end{array} \right| dp(t_1)dq(t_1) \\ &= \left(\prod_{n=1}^{(t_2-t_1)/\epsilon} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial p(t_1+n\epsilon)}{\partial p(t_1+(n-1)\epsilon)} & \frac{\partial q(t_1+n\epsilon)}{\partial p(t_1+(n-1)\epsilon)} \\ \frac{\partial p(t_1+n\epsilon)}{\partial q(t_1+(n-1)\epsilon)} & \frac{\partial q(t_1+n\epsilon)}{\partial q(t_1+(n-1)\epsilon)} \end{array} \right| \right) dp(t_1)dq(t_1) \end{aligned}$$

שימו לב כי $p(t_2)$ ו $q(t_2)$ הם משתנים שונים מ $p(t_1)$ ו $q(t_1)$, אך תלויים בהם חד-חד ערכית (לפי יחידות הפתרון של מערכת המד"ר).

משפט 5 (ליוביל)

אם המיקום והתנע מתפתחים לפי משוואות המילטון מזמן t_1 לזמן t_2 אזי $dp(t_2)dq(t_2) = dp(t_1)dq(t_1)$.

הוכחה. ראינו כי

$$dp(t_2)dq(t_2) = \left(\prod_{n=1}^{(t_2-t_1)/\epsilon} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial p(t_1+n\epsilon)}{\partial p(t_1+(n-1)\epsilon)} & \frac{\partial q(t_1+n\epsilon)}{\partial p(t_1+(n-1)\epsilon)} \\ \frac{\partial p(t_1+n\epsilon)}{\partial q(t_1+(n-1)\epsilon)} & \frac{\partial q(t_1+n\epsilon)}{\partial q(t_1+(n-1)\epsilon)} \end{array} \right| \right) dp(t_1)dq(t_1) \quad (4.17)$$

נראה כי

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial p(t_1+n\epsilon)}{\partial p(t_1+(n-1)\epsilon)} & \frac{\partial q(t_1+n\epsilon)}{\partial p(t_1+(n-1)\epsilon)} \\ \frac{\partial p(t_1+n\epsilon)}{\partial q(t_1+(n-1)\epsilon)} & \frac{\partial q(t_1+n\epsilon)}{\partial q(t_1+(n-1)\epsilon)} \end{array} \right| = 1 + o(\epsilon)$$

ואז גבול המכפלה במשוואה 4.17 הוא 1. נסמן

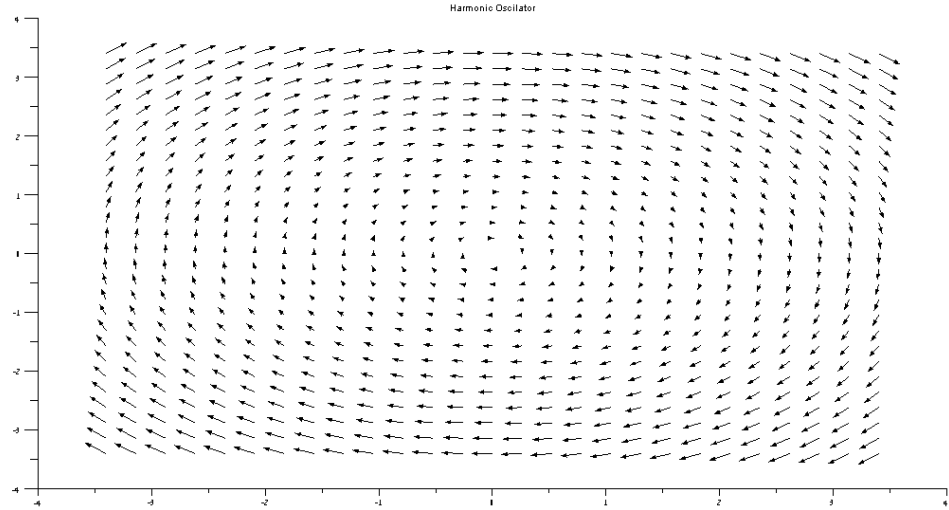
$$Det \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial p(t+\epsilon)}{\partial p(t)} & \frac{\partial q(t+\epsilon)}{\partial p(t)} \\ \frac{\partial p(t+\epsilon)}{\partial q(t)} & \frac{\partial q(t+\epsilon)}{\partial q(t)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial [p(t)+\epsilon \dot{p}(t)+o(\epsilon)]}{\partial p(t)} & \frac{\partial [q(t)+\epsilon \dot{q}(t)+o(\epsilon)]}{\partial p(t)} \\ \frac{\partial [p(t)+\epsilon \dot{p}(t)+o(\epsilon)]}{\partial q(t)} & \frac{\partial [q(t)+\epsilon \dot{q}(t)+o(\epsilon)]}{\partial q(t)} \end{array} \right|$$

בזמן t המשתנים $p(t)$ ו $q(t)$ הם משתנים בלתי תלויים ולכן

$$\frac{\partial q(t)}{\partial q(t)} = 1, \quad \frac{\partial p(t)}{\partial p(t)} = 1, \quad \frac{\partial p(t)}{\partial q(t)} = 0, \quad \frac{\partial q(t)}{\partial p(t)} = 0$$

ומכאן, בהזנחת האיברים מסדר קטן מלינארי ב ϵ

$$Det = \left| \begin{array}{cc} 1 + \epsilon \frac{\partial \dot{p}(t)}{\partial p(t)} & \epsilon \frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial p(t)} \\ \epsilon \frac{\partial \dot{p}(t)}{\partial q(t)} & 1 + \epsilon \frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial q(t)} \end{array} \right| = 1 + \epsilon \frac{\partial \dot{p}(t)}{\partial p(t)} + \epsilon \frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial q(t)} + o(\epsilon)$$



איור 4.1: מרחב הפאזה ווקטורי הזרימה $(\dot{q}, \dot{p})$ עבור אוסילטור הרמוני.

אבל לפי משוואות המילטון

$$\frac{\partial \dot{p}(t)}{\partial p(t)} + \frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial q(t)} = \frac{\partial}{\partial p(t)} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q(t)} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) = 0$$

□

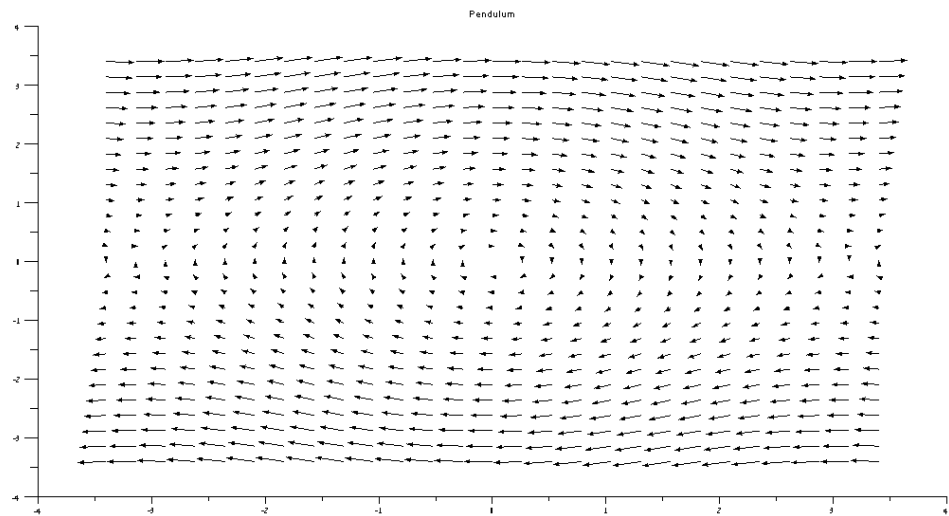
ולכן אלמנט השטח לא משתנה עם הזמן.

באופן כללי יותר ניתן להראות כי גם עבור n קואורדינטות מתקיים

$$\prod_{i=1}^n dp_i(t_2) dq_i(t_2) = \prod_{i=1}^n dp_i(t_1) dq_i(t_1)$$

באופן כללי, מרחבים שיש בהם אלמנט שטח\נפח כזה נקראים מרחבים סימפלקטיים (sym-plectic manifolds) והחבורה שמשמרת את אלמנט הנפח נקראת החבורה הסימפלקטית (ב $2n$ ממדים). אנו רואים, אם כן מההפיכות בזמן שההתפתחות המילטוניהנית מגדירה חבורת לי⁵ בפרמטר אחד (t) . ממשפט ליוביל נסיק שחבורה זו היא תת חבורה של החבורה הסימפלקטית.

⁵חבורות לי יוגדרו בסעיף 4.4.1



איור 4.2: מרחב הפאזה ווקטורי הזרימה $(\dot{q}, \dot{p})$ עבור מטוטלת מתמטית. שימו לב שבקרבת הראשית המצב דומה לאוסילטור הרמוני.

4.4 סימטריות וחוקי שימור

4.4.1 חבורות לי

חבורת לי היא חבורה בעלת מבנה טופולוגי של יריעה (manifold) – כלומר, קיים d מסוים (ממד החבורה) כך שלכל נקודה ביריעה יש סביבה פתוחה הנראית כמו סביבה פתוחה ב- $\mathbb{R}^d$. בסביבת כל נקודה, ניתן לאפיין איבר על ידי d פרמטרים ממשיים. כמו כן, פעולת החבורה צריכה להיות חלקה (גתלות בפרמטרים), וכן פעולת ההפכי בחבורה. כלומר (בערך) כל איבר בחבורה G מאופיין ע"י d פרמטרים $g = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ כאשר מכפלת כל זוג איברים בחבורה נותנת איבר שלישי בחבורה

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d) = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d)$$

ולכל i מתקיים ש $\gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d)$ היא פונקציה רציפה וגזירה בכל המשתנים. כמו כן, לכל איבר קיים איבר הפכי

$$(g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d))^{-1} = g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$$

כאשר לכל i מתקיים ש $\beta_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ היא פונקציה רציפה וגזירה בכל המשתנים. התאוריה של חבורות לי דורשת קורס שלם. נתמקד כאן בדוגמאות פשוטות ובשימושים בפיסיקה.

במקרים רבים ניתן להציג את איברי החבורה ע"י מטריצות⁶. דוגמה לכך היא חבורת הסיבובים במישור xy , שאיבריה הם $R(\alpha)$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$. הם מקיימים $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ וכן $R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha)$ (קל לראות כי הפונקציות רציפות וגזירות). חבורה זו היא חד-ממדית, שכן ניתן לאפיין כל איבר בה ע"י פרמטר אחד. ניתן לייצג את איברי החבורה בעזרת מטריצות באופן (ישנן גם דרכים אחרות):

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

(בדקו שמטריצות אלה מקיימות את פעולת החבורה). חבורה זו נקראת $SO(2)$ (או לעתים $(SO(2, \mathbb{R}))$) כאשר O מציינ Orthogonal ו- S מציינ Special שכן זוהי חבורת המטריצות הממשיות האורתוגונליות מסדר 2×2 שהדטרמיננטה שלהן 1 (ולכן Special). החבורה $O(2)$ כוללת את כל המטריצות האורתוגונליות מסדר 2×2 , שהן הסיבובים והשיקופים במישור.

דוגמה נוספת היא חבורת הסיבובים בשלושה ממדים, $SO(3)$, שהיא חבורה תלת ממדית – ניתן לאפיין כל איבר שלה בעזרת 3 פרמטרים (לדוגמה זוויות אוילר – שלא נדון בהן כאן). דוגמה נוספת לחבורת לי היא החבורה הנוצרת ע"י הזרימה ההמילטונית בזמן t (שהוא הפרמטר). ראו סעיף 4.3.4.

משפחה חד פרמטרית

משפחה חד פרמטרית של איברים בחבורת לי, היא תת חבורה של חבורת לי, שאיבריה מאופיינים ע"י פרמטר אחד, והפרמטר המתאים למכפלת איברים הוא סכום הפרמטרים של האיברים. כלומר, לכל שני איברים במשפחה $R(\alpha), R(\beta)$ מתקיים $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$. לדוגמה, חבורת הסיבובים במישור, עם הפרמטריזציה שהוצגה במשוואה 4.18 היא משפחה חד פרמטרית (הכוללת, במקרה זה, את החבורה כולה). עבור חבורת הסיבובים

⁶לדיון קצת יותר מדויק על ייצוג איברי חבורת לי ע"י מטריצות ראו סעיף 7.3.

במרחב, $SO(3)$, ניתן להגדיר משפחות חד פרמטריות שונות ע"י $R_{\hat{n}}(\alpha)$, סיבובים בזווית α סביב הציר $\hat{n}$. משפחות חד פרמטריות שונות יהיו, לדוגמה $R_x(\alpha)$, $R_y(\alpha)$ ו $R_z(\alpha)$ (סיבובים סביב ציר x , y או z). החבורה נוצרת ע"י משפחות אלה.

האלגברה של חבורת לי

עבור משפחה חד פרמטרית $R_i(\alpha)$ של חבורת לי $\mathcal{G}$ איבר היחידה הוא $R_i(0) = 1_G$, שכן $R_i(\alpha)R_i(0) = R_i(\alpha + 0) = R_i(\alpha)$ נגדיר

$$G_i \equiv \left. \frac{dR_i(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

(לשם הפשטות, נתייחס ל $R_i(\alpha)$ כמטריצה ואז גם G_i מטריצה, כשהגזירה היא לכל איבר בנפרד). נקבל, לפי הגדרת הנגזרת

$$R_i(\epsilon) = 1 + G_i \cdot \epsilon + o(\epsilon)$$

עבור משפחות שונות, i , נקבל מטריצות שונות G_i . המטריצות G_i נקראות לעיתים "היוצרים האינפיניטסימליים של החבורה" (למרות שהן לא יוצרים של החבורה, וכלל אינן איברים בחבורה). בצורה מדויקת יותר, מכונה האלגברה של המטריצות G_i (בליווי הפעולות שיוסברו בהמשך) האלגברה של חבורת לי זו.

מהסגירות של החבורה נובע כי מכפלת כל זוג איברים בחבורה היא איבר בחבורה ולכן, אם R_i ו R_j הן שתי משפחות שונות, $a, b \in \mathbb{R}$, אזי,

$$R_i(a\epsilon)R_j(b\epsilon) = (1 + aG_i \cdot \epsilon + o(\epsilon))(1 + bG_j \cdot \epsilon + o(\epsilon)) = 1 + \epsilon(aG_i + bG_j) + o(\epsilon)$$

כלומר, גם $aG_i + bG_j$ איבר באלגברה של החבורה.

דוגמה: $SO(2)$

עבור המשפחה החד פרמטרית ממשוואה 4.18 נקבל

$$G \equiv \left. \frac{dR(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix} \bigg|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

זהו היוצר האינפיניטסימלי של $SO(2)$.

המפה האקספוננציאלית

ניתן לכתוב כל איבר במשפחה בצורה

$$R_i(\alpha) = \left[R_i \left(\frac{\alpha}{n} \right) \right]^n$$

ובגבול

$$R_i(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[R_i \left(\frac{\alpha}{n} \right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\alpha}{n} G_i + o(n^{-1}) \right]^n \equiv \exp(\alpha G_i)$$

ניתן לפתח את הביטוי לטור לפי הפרמטר α ולקבל

$$\exp(\alpha G_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha G_i)^n}{n!} = 1 + \alpha G_i + \frac{(\alpha G_i)^2}{2} + \frac{(\alpha G_i)^3}{3!} + \dots$$

כך נתנו משמעות לאקספוננט של מטריצה.
 לכן, בהנתן היוצר האינפיניטסימלי ניתן לבנות את המשפחה החד פרמטרית, ובהנתן כל היוצרים האינפיניטסימלים ניתן לבנות את כל המשפחות בחבורה, ולכן את החבורה כולה.⁷

קומוטטורים

הקומוטטור של החבורה הוא $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$. אם ניקח $g_1 = R_1(\epsilon)$ ו $g_2 = R_2(\epsilon)$ נקבל (בדקו!)

$$\begin{aligned} g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} &= R_1(\epsilon) R_2(\epsilon) R_1(-\epsilon) R_2(-\epsilon) \\ &= \left(1 + \epsilon G_1 + \frac{\epsilon^2 G_1^2}{2} + o(\epsilon^2)\right) \left(1 + \epsilon G_2 + \frac{\epsilon^2 G_2^2}{2} + o(\epsilon^2)\right) \times \\ &\quad \left(1 - \epsilon G_1 + \frac{\epsilon^2 G_1^2}{2} + o(\epsilon^2)\right) \left(1 - \epsilon G_2 + \frac{\epsilon^2 G_2^2}{2} + o(\epsilon^2)\right) \\ &= 1 + \epsilon^2 (G_1 G_2 - G_2 G_1) + o(\epsilon^2) \\ &\equiv 1 + \epsilon^2 [G_1, G_2] + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

כאשר הסימן $[G_1, G_2] \equiv G_1 G_2 - G_2 G_1$ נקרא סוגרי לי (Lie brackets) של האלגברה,⁸ ומכאן אנו רואים שהאלגברה סגורה תחת פעולת סוגרי לי.
 מכאן ההצדקה לשם שבחרנו – "אלגברת לי" – מדובר באלגברה של היוצרים האינפיניטסימליים, המהווים שדה וקטורי מעל הממשיים והמלכיים, בנוסף לפעולות החיבור והכפל הסקלר בפעולה נוספת (דמויית כפל, אך עם הבדלים מסויימים) של סוגרי לי. שימו לב שאלגברת לי אינה סגורה תחת כפל מטריצות רגיל (ואכן, לפעולה זו אין משמעות בהקשר לחבורה).

דוגמה: $SO(2)$

ראינו כי היוצר האינפיניטסימלי של החבורה הוא

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

נשים לב כי $G^2 = -I$ (I מטריצת היחידה בממד 2), $G^3 = -G$ ו $G^4 = I$ וכן הלאה באופן מחזורי. לכן

$$\begin{aligned} \exp(\alpha G) &= 1 + \alpha G + \frac{\alpha^2 G^2}{2} + \frac{\alpha^3 G^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots\right) + G \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots\right) \\ &= \cos \alpha + G \cdot \sin \alpha \\ &= \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁷התעלמתי כאן מבעיות מסוימות. לדוגמה, יש חבורות (כמו $O(2)$) שלא לכל איבר שלהן ניתן להגיע בצורה כזו.
⁸שימו לב שזוהי גם נגזרת לי של השדה הוקטורי הנוצר ע"י היוצר G_2 על פי השדה הוקטורי הנוצר ע"י היוצר G_1 ביריעה של החבורה.

כלומר (ואולי במפתיע), שחזרנו את כל איברי החבורה מתוך המטריצה הבודדת G .

4.4.2 משפט נתר (Noether)

באופן כללי, סימטריה היא פעולה שמוטירה מבנה מסויים ללא שינוי. פעולות הסימטריה מהוות חבורה, שכן הפעלת שתי פעולות כאלה בזו אחר זו גם היא לא תשנה את המבנה, וכן לכל פעולה יש פעולה הופכית, המחזירה את המצב לקדמותו, וגם פעולה זו אינה משנה את המבנה.

בפיסיקה קיים קשר בין סימטריות לבין חוקי שימור. לדוגמה, האינוריאנטיות של חוקי הפיסיקה בזמן גוררת את שימור האנרגיה (ננסח זאת באופן מתמטי מייד) – לו כוח הגרביטציה היה נמוך יותר ביום ב מביום א, ניתן היה להעלות משקולת לגג ביום א' וביום ב' לשחרר אותה ולהרוויח יותר אנרגיה משהושקעה בהעלאתה. העובדה שהכוחות אינם משתנים מזמן לזמן מחייבת את שימור האנרגיה.

אמי נתר הוכיחה משפט המקשר בין חבורות סימטריה רציפות של בעיה פיסיקלית לבין חוקי שימור. נניח שקיימת משפחה חד פרמטרית של סימטריות השומרות על הלגרנזיאן. כלומר, קיים משתנה s כך ש

$$\frac{d\mathcal{L}}{ds} = 0$$

אזי מתקיים

$$\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{ds} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{dq_i}{ds} \right) = 0$$

אם q_i הוא המסלול הפיסיקלי – כלומר מקיים משוואת אוילר לגרנז' אזי

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

ולכן

$$\sum_i \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{dq_i}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{dq_i}{ds} \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{ds} \right) = 0$$

ומכאן נובע

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{ds} = \sum_i p_i \frac{dq_i}{ds} = const$$

כאשר, כדי למצוא את הגודל הנשמר במערכת הקואורדינטות המקורית, נציב $s = 0$, כלומר

$$\sum_i p_i \frac{dq_i}{ds} \Big|_{s=0} = const$$

כאמור, חבורת לי מגדירה אלגברה של היוצרים האינפיניטסימלים, וכן מהאלגברה ניתן לבנות את החבורה ע"י המפה האקספוננציאלית. נוכיח עתה את משפט נתר בגרסה כללית יותר⁹ על פי היוצרים האינפיניטסימליים של חבורת הסימטריה.

⁹קיימת גרסה כללית עוד יותר, שלא נדון בה.

משפט 6 (נתר)

אם הלגרנז'יאן של מערכת אינווריאנטי לסדר ראשון ב- ϵ עבור טרנספורמציה

$$q_i \mapsto q_i + \sum_r \epsilon_r Q_{ir}, \quad t \mapsto t + \sum_r \epsilon_r T_r$$

כאשר ϵ_r הם גדלים בלתי תלויים. אזי לכל r ,

$$\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) T_r - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} Q_{ir} = \text{const}$$

הוכחה. נתבונן בפעולה

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

עבור r כלשהו נגדיר

$$q'_i(t') = q_i(t) + \epsilon_r Q_{ir}, \quad t' = t + \epsilon_r T_r$$

ומכאן,

$$q'_i(t) + \dot{q}'_i(t) \epsilon_r T_r + o(\epsilon) = q_i(t) + \epsilon_r Q_{ir}$$

וכן

$$\dot{q}'_i(t) \epsilon_r T_r = \dot{q}_i(t) \epsilon_r T_r + o(\epsilon)$$

לכן,

$$q'_i(t) = q_i(t) + \epsilon_r Q_{ir} - \dot{q}_i(t) \epsilon_r T_r + o(\epsilon) \equiv q_i(t) + \delta q_i(t)$$

השינוי בפעולה בעקבות הטרנספורמציה (בהזנחת איברים לא לינאריים ב- ϵ_r) הוא

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{t_1 + \epsilon_r T_r}^{t_2 + \epsilon_r T_r} \mathcal{L}(\vec{q}', \dot{\vec{q}}') dt' - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \\ &= \epsilon_r T_r \mathcal{L}|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \right) dt \\ &= \epsilon_r T_r \mathcal{L}|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\epsilon_r Q_{ir} - \dot{q}_i(t) \epsilon_r T_r) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\epsilon_r Q_{ir} - \dot{q}_i(t) \epsilon_r T_r) \right) dt \\ &= \epsilon_r T_r \mathcal{L}|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\epsilon_r Q_{ir} - \dot{q}_i(t) \epsilon_r T_r) \right) \right) dt \\ &= \epsilon_r T_r \mathcal{L}|_{t_1}^{t_2} + \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\epsilon_r Q_{ir} - \dot{q}_i(t) \epsilon_r T_r) \right)_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

ולכן,

$$\sum_i \left[T_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} Q_{ir} \right] = \text{const}$$

□

דוגמאות

אם הלגרנז'יאן בלתי תלוי בזמן, כלומר, אינווריאנטי תחת הטנספורמציה $t \mapsto t + \epsilon$, אזי

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) \equiv H = \text{const}$$

כלומר, ההמילטוניאן נשמר. אם מערכת הקואורדינטות קרטזית, ההמילטוניאן שווה לאנרגיה הכוללת. כלומר, שימור האנרגיה נובע ממשפט נתר על פי סימטריית ההזזה בזמן.

אם הלגרנז'יאן אינווריאנטי תחת הזזה במרחב (נאמר בקואורדינטה x) אז $x \mapsto x + \epsilon$ איננו משנה את הלגרנז'יאן, ולכן

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \equiv -p_x = \text{const}$$

כלומר התנע בכיוון x נשמר (ראינו זאת כבר, שכן x קואורדינטה ציקלית).
אם הלגרנז'יאן אינווריאנטי תחת סיבובים במישור xy ראינו קודם ממשוואה 4.19 שבסדר ראשון ב-

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

נקבל

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} y - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} (-x) = x p_y - y p_x \equiv L_z = \text{const}$$

כלומר, התנע הזוויתי בכיוון z נשמר.

4.5 בעיית קפלר

קפלר ניסח שלושה חוקים לגבי מסלולי תנועת כוכבי הלכת (הפלנטות) במערכת השמש. חוקי קפלר התבססו על מידע אמפירי - תצפיות אסטרונומיות. ננסה לקבל את החוקים באופן תאורטי, בהסתמכות על חוקי ניוטון בלבד.

נניח כי שני גופים (לדוגמה השמש וכדור"א) נעים תחת הפוטנציאל הגרביטציוני ביניהם. מסתו של האחד היא m_1 ומיקומו יסומן $\vec{r}_1$. מסתו של השני היא m_2 ומיקומו יסומן $\vec{r}_2$. האנרגיה הקינטית של תנועתם היא

$$T = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2}$$

והאנרגיה הפוטנציאלית

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}$$

הלגרנז'יאן הוא, אם כן

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} + \frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}$$

נעבור לקואורדינטות חדשות

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1\end{aligned}$$

($\vec{R}$) מציין את מיקום מרכז המסה ו $\vec{r}$ את המיקום היחסי בין הגופים). נבודד את $\vec{r}_1$ ואת $\vec{r}_2$ ונציב בלגרנז'יאן, ונקבל (בדקו!)

$$\mathcal{L} = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{\|\vec{r}\|}$$

כאשר $M = m_1 + m_2$ היא המסה הכוללת ו $\mu = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$ מכונה המסה המצומצמת. רואים מייד כי $\vec{R}$ היא קואורדינטה ציקלית (ליתר דיוק, שלושת רכיביה הם קואורדינטות ציקליות) ולכן התנע הצמוד אליה נשמר

$$P_R \equiv M \dot{\vec{R}} = \text{const}$$

כלומר מרכז המסה נע במהירות קבועה. זה לא מפתיע, שכן יש פה שימור תנע של המערכת כולה. נתבונן בחלק הלגרנז'יאן הנוגע לתנועה הפנימית במערכת בלבד

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{\|\vec{r}\|}$$

תנאי ההתחלה של הבעיה הם $\vec{r}(t_0)$ ו $\dot{\vec{r}}(t_0)$. ללא הגבלת הכלליות נוכל לבחור את מישור xy כך ששני הווקטורים האלה יכללו בו. נכתוב את הלגרנז'יאן כתלות מפורשת בקואורדינטות x, y, z :

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

נכתוב משוואת אוילר לגרנז' עבור z ונקבל

$$\mu \ddot{z} = \frac{Gm_1 m_2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

קל לראות כי פתרון משוואה זו עבור תנאי ההתחלה $z(t_0) = 0, \dot{z}(t_0) = 0$ הוא $z(t) = 0$ לכל t . לכן, ניתן להציב $z = 0$ בלגרנז'יאן ולקבל

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

נעביר את x ו y לקואורדינטות פולריות ונקבל (בדקו!)

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\mu r^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{r}$$

רואים כי גם θ קואורדינטה ציקלית ומכאן

$$P_\theta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = l$$

כאשר הקבוע l הוא רכיב ה- z של התנע הזוויתי, הנשמר בבעיה. מכאן נקבל

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (4.20)$$

משוואת התנועה עבור r היא

$$\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \quad (4.21)$$

לא ניתן לבצע אינטגרציה אנליטית על משוואה זו. אולם ניתן להסיק ממשוואות התנועה את החוקים הבאים.

החוק הראשון של קפלר

ממשוואה 4.20 מקבלים כי כאשר $l \neq 0$, θ היא פונקציה מונוטונית ממש של t ולכן ניתן להעביר משתנים מ- t ל- θ . נקבל

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

ולכן

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

נציב זאת במשוואה 4.21 ונקבל

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

אם נגדיר משתנה חדש $u \equiv r^{-1}$ נקבל

$$-\frac{d^2 u}{d\theta^2} = u - \frac{Gm_1 m_2 \mu}{l^2}$$

זוהי משוואה ללא θ . ניתן לפתור אותה באמצעות ההצבה $s \equiv \frac{du}{d\theta}$ נקבל

$$-\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{ds}{d\theta} = -\frac{ds}{du} \frac{du}{d\theta} = -s \frac{ds}{du} = u - \frac{Gm_1 m_2 \mu}{l^2}$$

ומאינטגרציה נקבל

$$-\frac{s^2}{2} = \frac{u^2}{2} - \frac{Gm_1 m_2 \mu}{l^2} u - c$$

כאשר c קבוע אינטגרציה. נחלץ את s ונקבל

$$s \equiv \frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{c_1^2 - \left(u - \frac{Gm_1 m_2 \mu}{l^2}\right)^2}$$

עבור קבוע אחר c_1 . אינטגרציה נוספת תתן¹⁰

$$\arccos \frac{u - \frac{Gm_1 m_2 \mu}{l^2}}{c_1} = \theta - \theta_0$$

ומכאן

$$r^{-1} \equiv u = \frac{Gm_1 m_2 \mu}{l^2} + c_1 \cos(\theta - \theta_0)$$

או

$$r = \frac{l^2}{Gm_1 m_2 \mu} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.22)$$

זהו משוואה המייצגת חתכי חרוט. כאשר $\varepsilon \equiv c_1 l^2 / Gm_1 m_2 \mu$ מיצג את האקסצנטריות. עבור $\varepsilon = 0$ נקבל מעגל. עבור $0 < \varepsilon < 1$ אליפסה, עבור $\varepsilon = 1$ פרבולה ועבור $\varepsilon > 1$ היפרבולה. במקרה $l = 0$ נקבל שהתנועה היא לאורך קו ישר.¹¹ החוק הראשון אותו קבע קפלר הוא שמסלולי כוכבי הלכת סביב השמש הם אליפטיים. אנו רואים כאן שאכן, התנועה היחסית בין כוכב לכת לשמש היא אליפטית. כמו כן, אם מרכז המסה לא נע (או שנתבונן בתנועה יחסית למרכז המסה), נקבל שהן כוכב הלכת והן השמש מבצעים תנועה אליפטית סביב מרכז הכובד שלהם (כאשר אליפסת השמש קטנה בהרבה מזו של כוכב הלכת). בנוסף למסלולים שראה קפלר, יש גם מסלולים שאינם סגורים, שצורתם היפרבולית או פרבולית. במערכת השמש שלנו מסלולי כוכבי הלכת אליפטיים קרובים למעגליים וכן קיימים כוכבי שביט שמסלוליהם אליפטיים ביותר. החוק הראשון של קפלר מיוחד לתנועה בפוטנציאל הפרופורציוני ל- r^{-1} .

החוק השני של קפלר

השטח שמכסה הווקטור בתנועת הפלנטרית בין הזמנים t_1 ו- t_2 נתון ע"י

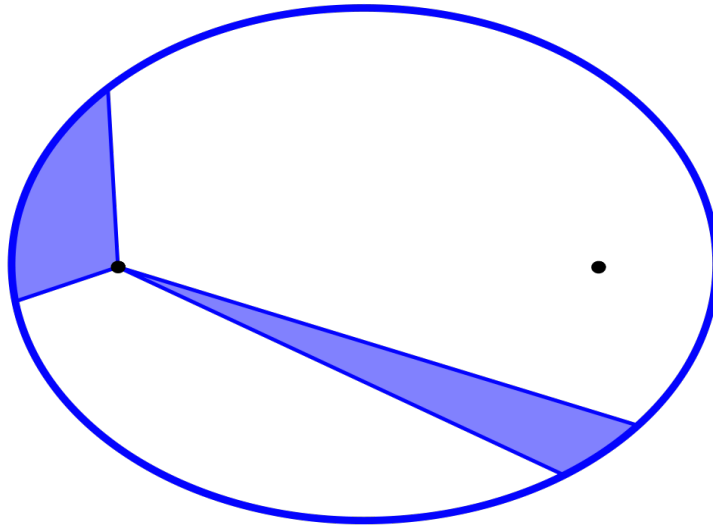
$$\int_{\theta(t_1)}^{\theta(t_2)} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

נגזור את השטח לפי הזמן ונקבל

$$\rho \equiv \frac{d}{dt_2} \int_{\theta(t_1)}^{\theta(t_2)} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \dot{\theta} \cdot \frac{1}{2} r^2 = \frac{l}{2\mu} \quad (4.23)$$

כיוון שהתנע הזוויתי l הוא קבוע תנועה, קצב מילוי השטח קבוע. זהו החוק השני של קפלר שגילה שכוכבי הלכת מכסים שטחים שווים בזמן שווה. חוק זה מאפיין לא רק תנועה פלנטרית, אלא כל סוג של כח מרכזי, בו נשמר התנע הזוויתי.

¹⁰ מקבלים קוסינוס או סינוס בהתאם לסימן שבחרים. כיון שההפרש ביניהם קבוע ניתן לבלוע אותו לקבוע האינטגרציה ולכן אין חשיבות לסימן שבחרנו.
¹¹ המקרה של ε שלילי שקול למקרה של $|\varepsilon|$ עם הפרש פאזה של π .



איור 4.3: בעיית קפלר - הוקטור $\vec{r}$ מכסה שטחים שווים בזמן שווה.

החוק השלישי של קפלר

שטח האליפסה הוא

$$\begin{aligned} A &\equiv \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{Gm_1 m_2 \mu} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{l^4}{2G^2 m_1^2 m_2^2 \mu^2} \cdot \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

קצב מילוי השטח מתקבל ממשוואה 4.23 ולכן זמן המחזור הוא היחס בין השטח לקצב מילוי השטח:

$$T = \frac{A}{\rho} = \frac{2\pi l^3}{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu (1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (4.24)$$

מצד שני, אורך הציר הארוך של האליפסה (המוגדר כ- $2a$) שווה לסכום המרחק הקצר ביותר והארוך ביותר מהאליפסה למוקד. מרחקים אלה מתקבלים ממשוואה 4.22 כאשר הקוסינוס שווה ל-1 או ל-1 בהתאמה. לכן

$$2a = \frac{l^2}{Gm_1 m_2 \mu} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{l^2}{Gm_1 m_2 \mu} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon} = \frac{l^2}{Gm_1 m_2 \mu} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \quad (4.25)$$

מהשוואה בין משוואות 4.24 ו-4.25 מקבלים

$$T = \text{const} \cdot a^{3/2}$$

כאשר הקבוע תלוי רק במסות הגופים ובקבוע הגרביטציה האוניברסלי. אם נניח $m_1 \gg m_2$ אזי $\mu \approx m_2$ ונקבל שהקבוע בקרוב איננו תלוי ב- m_2 . זהו חוק קפלר השלישי – במסלוליהם של כוכבי הלכת במערכת השמש זמן המחזור בריבוע פרופורציוני לציר האליפסה הארוך בשלישית (עבור מסלול מעלי בקרוב זה פשוט המרחק בשלישית).

וקטור לפלס-רונגה-לנץ

בפוטנציאל גרביטציוני קיים וקטור נוסף שהוא קבוע תנועה. ווקטור זה נקרא ווקטור לפלס-רונגה-לנץ ומוגדר ע"י

$$\vec{A} = \vec{P} \times \vec{L} - Gm_1m_2\mu\hat{r} \quad (4.26)$$

הוא מצביע בכיוון הציר הראשי של האליפסה וגודלו פרופורציוני לאקסצנטריסטיות של האליפסה. (חשבו את $\dot{\vec{A}}$ ובדקו שהוא אכן אינווריאנטי. השתמשו בהגדרת $\hat{r}$ במשוואה 1.13.)

4.6 תנודות קטנות ואופני תנודה

4.6.1 תנודות קטנות ותדירות אפיינית

עבור כח משמר, ניתן לכתוב את משוואת התנועה בצורה

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U(\vec{r})$$

נתבונן תחילה במקרה החד ממדי

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \quad (4.27)$$

נניח שלפוטנציאל נקודת קיצון מסויימת, x_0 , בה מתקיים

$$\frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

נפתח את U לטור טיילור סביב הנקודה ונקבל

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

כאשר אם x_0 נקודת קיצון של הפוטנציאל, אזי $U'(x_0) = 0$. במצב כזה

$$\vec{F} = -U'(x_0) = 0$$

כלומר, באותה נקודה לא פועל כח על הגוף. נקודה כזו נקראת נקודת שיווי משקל. אם היא נקודת מינימום אזי כשנזיז את הגוף מעט מנקודת שיווי המשקל נקבל כח המחזיר אותו לכיוון נקודת שיווי המשקל. נקודה כזו נקראת נקודת שיווי משקל יציב. אם הנקודה היא נקודת מקסימום (או נקודת פיתול) אזי כשנרחיק את הגוף מנקודת שיווי המשקל, הכח ידחף אותו הרחק מהנקודה. נקודה כזו נקראת נקודת שיווי משקל לא יציב. אם הפוטנציאל בסביבת הנקודה קבוע, כל נקודה בסביבה תהיה גם היא נקודת שיווי משקל. במקרה כזה אם נזיז

מעט את הגוף הוא יעבור לנקודת שיווי משקל אחרת (כמו כדור המונח על שולחן, כאשר בכל נקודה בקירוב הכוחות עליו מתאפסים). שיווי משקל כזה נקרא שיווי משקל מסתגל. אם נקודת מינימום של הפוטנציאל נקבל בד"כ $U''(x_0) > 0$ ¹² ממשוואה 4.27 מקבלים

$$m\ddot{x} \approx -U''(x_0) \cdot (x - x_0)$$

זוהי משוואת אוסילטור הרמוני שפתרונה

$$x - x_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

עבור

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

כלומר, כאשר הגוף נמצא בקרבת נקודת המינימום של הפוטנציאל, הוא מבצע תנודות קטנות, ובקירוב הרמוניות, סביב נקודת שיווי המשקל. תוצאה זו מסבירה גם מדוע קיבלנו שבזוויות קטנות מטוטלת מבצעת תנודות הרמוניות. תוצאה זו חשובה, כיוון שרוב הפוטנציאלים נותנים משוואת תנועה שאיננה פתירה באופן כללי, אולם פעמים רבות ניתן למצוא נקודות מינימום של הפוטנציאל ולחשב מהי תנועת הגוף בקרבתן בקירוב. כמו כן, מפיתוח סדרים גבוהים יותר בטור טיילור ניתן לקבל תיקונים לתנועה ההרמונית שישפרו את הדיוק. במקרה התלת ממדי הכללי הדרישה לנקודת מינימום היא

$$-\nabla U(\vec{r}_0) = 0$$

וכן שמטריצת ההסיאן

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 U(\vec{r}_0)}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

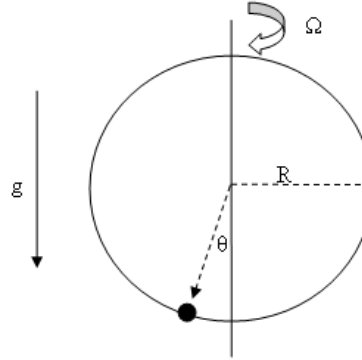
חיובית מוחלטת (זהו תנאי מספיק, שמתקיים עבור רוב הפוטנציאלים הרלוונטיים). כלומר, כל הערכים העצמיים של ההסיאן חיוביים ממש. במקרה כזה ניתן למצוא את הערכים העצמיים של ההסיאן λ_i ואת הווקטורים העצמיים המנורמלים של ההסיאן $\hat{u}_i$, $i = 1, 2, 3$ (הווקטורים העצמיים יהיו אורתוגונליים, שכן מטריצת ההסיאן סימטרית) ולפרק את $\vec{r}$ לכיוונים אלה r_i . במקרה כזה, נקבל עבור כל כיוון

$$m\ddot{r}_i = \lambda_i(r_i - r_{0i})$$

(כאשר r_{0i} הוא רכיב $\vec{r}_0$ בכיוון $\hat{u}_i$). נקבל שבכל ציר בנפרד יבצע הגוף תנועה הרמונית בתדירות

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}}$$

¹² במקרים של פוטנציאלים מיוחדים, שהאיבר הראשון בטור שלהם שאינו מתאפס הוא מסדר גבוה יותר, או שאינם ניתנים לפיתול לטור סביב המינימום כלל, נקבל תנודות מסוג אחר, שאינן הרמוניות.



איור 4.4: חרוז על חישוק מסתובב.

אם אנו עובדים בקואורדינטות כלליות (לאו דווקא קרטזיות), ועבור אחת הקואורדינטות נקבל

$$\ddot{q} = f(q)$$

כאשר עבור q_0 מסוים מתקיים $f(q_0) = 0$, אפשר לפתח לטור ולקבל

$$\ddot{q} = f'(q_0)(q - q_0) + O((q - q_0)^2)$$

כאשר אם $f'(q_0) > 0$ שיווי המשקל אינו יציב, ואם $f'(q_0) < 0$ הפתרון המקורב הוא

$$q = q_0 + A \cos(\sqrt{-f'(q_0)}t + \varphi)$$

כלומר הגוף מבצע תנודות קטנות בתדירות $\sqrt{-f'(q_0)}$.

דוגמה: חרוז על חישוק מסתובב

חישוק אנכי מסתובב סביב צירו האנכי במהירות זוויתית קבועה Ω . על החישוק מושחל חרוז החפשי לנוע על היקף החישוק. כיצד ינוע החרוז?

נכתוב את הלגרנז'יאן של המערכת בקואורדינטות כדוריות. למעשה החישוק מאלץ $\dot{\varphi} = \Omega$ וכן $r = R$ ולכן דרגת החופש היחידה היא θ .¹³ נקבל

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\Omega^2 mR^2 \sin^2 \theta}{2} + mgR \cos \theta$$

ומשוואת התנועה תהיה

$$mR^2\ddot{\theta} = m\Omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta \equiv f(\theta)$$

¹³ כאן רואים יתרון משמעותי של הפורמליזם הלגרנז'י על זה הניוטוני: כאן יש דרגת חופש אחת מול חוקי ניוטון, שם היינו אמורים לפתור בעיה תלת ממדית מלאה. כמו כן, נראה כי לא נעסוק כלל בכוחות שהחישוק מפעיל על החרוז בצירים שונים. כוחות אלה יטופלו באופן אוטומטי ע"י האילווצים.

משוואה זו מתארת באופן מלא את תנועת החרוז. אין לה פתרון אנליטי, אך ניתן לפתרה נומרית ולראות את התנהגות החרוז עבור כל תנאי התחלה. נחפש נקודות שבת של החרוז, $f(\theta_0) = 0$:

$$\Omega^2 R \sin \theta_0 \cos \theta_0 - g \sin \theta_0 = 0$$

למשוואה זו פתרונות

$$\sin \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0, \pi$$

וכן

$$\Omega^2 R \cos \theta_0 = g$$

כלומר

$$\theta_0 = \arccos \frac{g}{\Omega^2 R} \quad (4.28)$$

פתרון זה קיים רק אם $\Omega^2 R > g$.

נבדוק את יציבות נקודות השבת. הנקודה $\theta = \pi$ (הנקודה העליונה) תמיד אינה יציבה $\left(\frac{df(\theta)}{d\theta} > 0\right)$. הנקודה $\theta = 0$ יציבה אם $\Omega^2 R < g$ ולא יציבה אם $\Omega^2 R > g$. הנקודה $\theta = \arccos \frac{g}{\Omega^2 R}$ יציבה תמיד אם היא קיימת. כלומר, עבור מהירות זוויתית נמוכה נקבל שהחרוז יהיה יציב בנקודה התחתונה, ואם יוסט קצת ממנה יבצע תנודות קטנות סביבה. עבור מהירות זוויתית גבוהה, הנקודה התחתונה תהפוך ללא יציבה והנקודה ממשוואה 4.28 תהפוך ליציבה.¹⁴

נבחן את תדירות התנודות הקטנות עבור הנקודה θ_0 . אם נפתח בקרבת הנקודה נקבל

$$mR^2\ddot{\theta} = f(\theta) \approx 0 + \left.\frac{df(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) = m \left(\frac{g^2}{\Omega^2} - \Omega^2 R^2 \right)$$

ומכאן נקבל שעבור תנודות קטנות

$$\theta = \theta_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$$

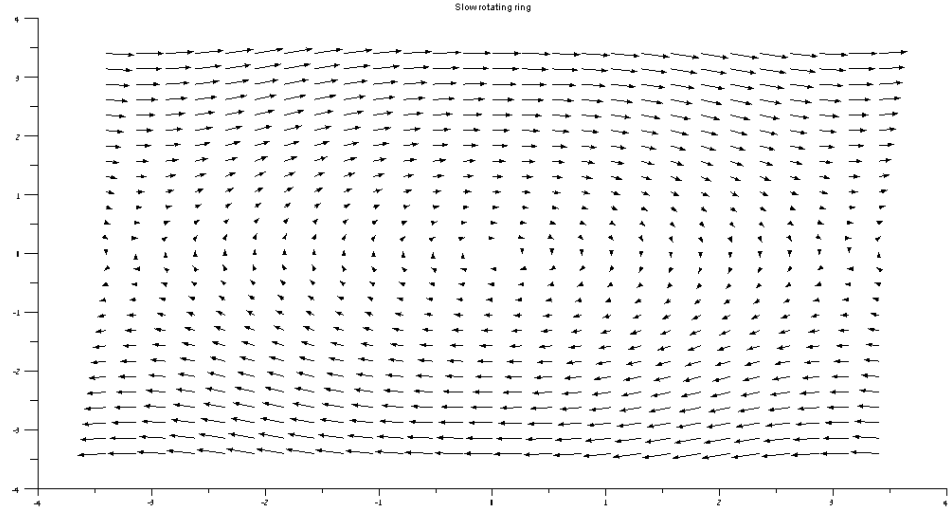
כאשר תדירות התנודות הקטנות היא¹⁵

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 - \frac{g^2}{R^2 \Omega^2}}$$

4.6.2 אוסילטורים מצומדים ואופני תנודה נורמליים

מערכת של שני גופים המחוברים ביניהם בקפיצים וכן מחוברים בקפיצים לקירות בשני הצדדים נעה בממד אחד. נניח כי קבועי הקפיץ עבור כל הקפיצים הם k , והמסות הן m_1

¹⁴נקודה זו היא הנקודה בה הגרביטציה מאזנת את הכח הצנטריפוגלי ראו סעיף 5.2.
¹⁵שימו לב כי ω אינה מהירות זוויתית על החישוק עצמו, אלא במרחב הפאזה.



איור 4.5: מרחב הפאזה ווקטורי הזרימה $(\dot{q}, \dot{p})$ עבור החישוב המסתובב לאט $(\Omega^2 R < g)$.

ו m_2 . כמו כן נניח כי הקפיצים רפויים כולם כאשר הגופים נמצאים בנקודות מסוימות x_1^0 ו x_2^0 בהתאמה.¹⁶

לשם הפשטות נסמן ב x_1^0 ו x_2^0 את מיקומם של הגופים יחסית לקודות שיווי המשקל. נקבל שהלגרנזיאן הוא

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m_1 \dot{d}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{d}_2^2}{2} - \frac{k d_1^2}{2} - \frac{k d_2^2}{2} - \frac{k (d_1 - d_2)^2}{2}$$

כאשר שני המחוברים הראשונים הם האנרגיה הקינטית. השלישי והרביעי הם האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיצים המחוברים לקירות (השמאלי והימני, בהתאמה) והאחרון הוא האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיץ האמצעי. ניתן לכתוב את הלגרנזיאן כך (בדקו!):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 & \dot{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

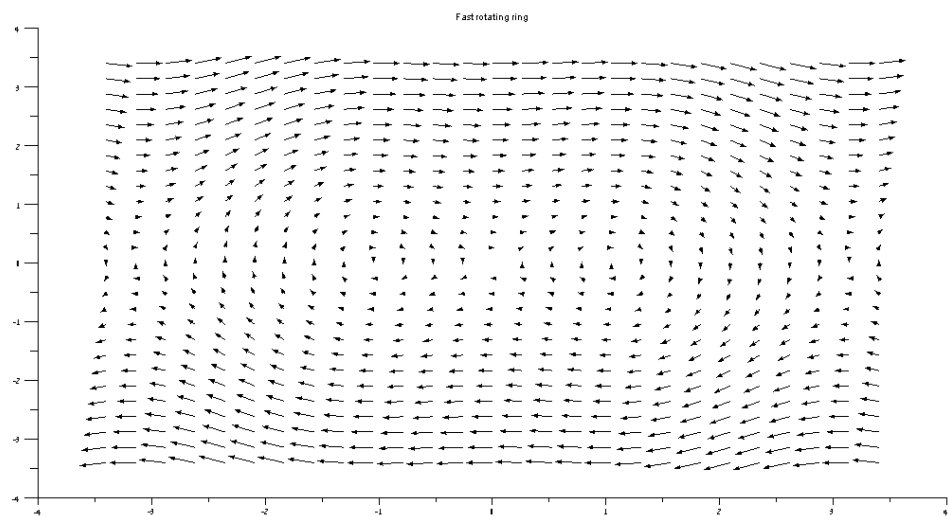
אם נגדיר

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

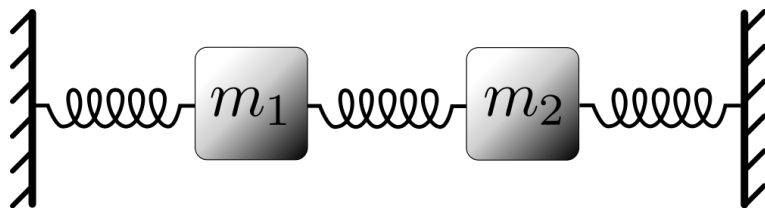
אזי

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{D}_1 & \dot{D}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{D}_1 \\ \dot{D}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2k}{m_1} & -\frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{2k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

¹⁶ למען האמת, אין צורך בהנחה שהקפיצים רפויים. גם אם הנקודות x_1^0 ו x_2^0 הן נקודות שיווי המשקל התוצאה תהיה זהה.



איור 4.6: מרחב הפאזה ווקטורי הזרימה $(\dot{q}, \dot{p})$ עבור החישוק המסתובב מהר $(\Omega^2 R > g)$. שימו לב שקיבלנו שתי נקודות יציבות $(\pm\theta_0)$ במקום האחת במרכז.



איור 4.7: אוסילטורים מצומדים.

לשם הפשטות, נתרכז במקרה $m_1 = m_2 = m$. במקרה זה נקבל שמשוואות אוילר לגרנז' הן מצומדות:

$$\begin{aligned}\ddot{D}_1 &= \frac{k}{m}(D_2 - D_1) \\ \ddot{D}_2 &= \frac{k}{m}(D_1 - D_2)\end{aligned}$$

על מנת לפתור את המערכת נלכסן את המטריצה

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

למטריצה זו הערכים העצמיים הם

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{3k}{m}$$

והוקטורים העצמיים (המנורמלים) הם, בהתאמה

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אם נכתוב

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$$

נקבל ממשוואות אוילר לגרנז'

$$\begin{aligned}\ddot{c}_1 &= -\frac{k}{m}c_1 \\ \ddot{c}_2 &= -\frac{3k}{m}c_2\end{aligned}$$

כלומר, המשוואות בלתי תלויות, ופתרון

$$\begin{aligned}c_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ c_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}$$

כאשר $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ קבועים הנקבעים עפ"י תנאי ההתחלה (המיקום והמהירות של שני הגופים בזמן 0) וכן

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

הפתרון הכללי הוא, אם כן

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תנועת שני הגופים מתוארת ע"י שילוב של שתי תנועות בלתי תלויות (המכונות אופני תנודה נורמליים).

כאשר מדובר על שרשרת של n גופים, ניתן בד"כ לפתור את הבעיה ע"י התמרת פוריה דיסקרטית:

$$x_m = \sum_q A_q \sin(qm) \cos(\omega_q t + \phi_q) + B_q \cos(qm) \cos(\omega_q t + \psi_q)$$

כאשר A_q, B_q, ϕ_q, ψ_q נקבעים לפי תנאי ההתחלה, וערכי q המותרים נקבעים לפי תנאי שפה (קצות השרשרת). כמו כן, כיון שההתמרה רלוונטית רק בערכה עבור m שלם, q מוגבל לתחום $[0, 2\pi)$ או $(-\pi, \pi]$ (מה שיותר נח).

פרק 5

מערכות ייחוס

עד כה דננו במערכות מכניות ובתנועת הגופים הכלולים בהן. הנחנו כי חוקי ניוטון תקפים במערכת צירים מסוימת (המכונה אינרציאלית) וכתבנו את משוואות התנועה על פי חוקי ניוטון. התעלמנו מנושא הצופה המתאר את התנועה. הצופה אינו בהכרח נייח בעצמו. ייתכן שהוא נע יחסית לאותה מערכת צירים אינרציאלית. נבחן עכשיו כיצד יתארו צופים שונים את התנועה במערכת. בכל המקרים נסמן את מערכת הצירים האינרציאלית ב- S , ואת מערכת הצירים על פי הצופה ב- S' . מיקום הגוף במערכת S יסומן ב- $\vec{r}$ ומיקומו במערכת S' יסומן ב- $\vec{r}'$.

5.1 טרנספורמציות גליליי

נתחיל בצופה שאינו נמצא בראשית הצירים, אלא בנקודה $\vec{r}_0$ במערכת S . מתקיים

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

מתקיים

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}'}$$

כיון שבמערכת S מתקיים

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

מתקיים גם

$$m\ddot{\vec{r}'} = \vec{F}$$

כלומר הצופה ב- S' רואה אותו כח פועל על הגוף בכל רגע נתון כמו צופה ב- S ומתאר את אותה תנועה (אך מוזזת בוקטור קבוע). שימו לב שאם מתארים את שדה הכח אזי במערכת המוסטת $\vec{F}'(\vec{r}') = \vec{F}(\vec{r}' + \vec{r}_0)$. עבור צופה הנע במהירות קבועה $\vec{v}_0$ יחסית למערכת S (המעבר למערכת כזו מכונה boost):

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$$

נקבל

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{v}_0 \quad (5.1)$$

וכן

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'$$

ולכן גם צופה כזה, הנע במהירות קבועה, יראה את חוקי ניוטון פועלים באותו אופן, עם כוחות זהים. אפשרות נוספת היא מערכת S' המסובבת בזווית α סביב ציר z יחסית ל- S . במערכת זו

$$\vec{r} = R(\alpha)\vec{r}'$$

כאשר

$$R(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

היא מטריצת סיבוב. מגזירה נקבל

$$\ddot{\vec{r}} = R(\alpha)\ddot{\vec{r}}'$$

ולכן

$$m\ddot{\vec{r}} = R(\alpha)m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}$$

אם נגדיר

$$\vec{F} = R(\alpha)\vec{F}'$$

נקבל (שימו לב שהמטריצה $R(\alpha)$ הפיכה)

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'$$

כלומר, הצופה הנע יראה את אותם חוקי פיסיקה כאשר כל הכוחות יהיו מסובבים באותה זווית. תוצאה זו נכונה גם לסבוב סביב כל ציר אחר (לא רק ציר ה- z) ובאופן כללי לכל טרנספורמציה אורתוגונלית שאינה תלויה בזמן.¹

כל הפעולות שהוזכרו כאן (הזזות, boost וסיבובים) משמרות את חוקי ניוטון. פעולות נוספות המשמרות את חוקי ניוטון הן הזזה בזמן $t = t' + t_0$ (כלומר מדידה בעזרת שעון המכוון לשעה אחרת), שכן $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}$, הפיכת כיוון הזמן $t = -t'$ (שכבר נדונה קודם בסעיף 4.3.4) ושיקופים במרחב (כגון $x = -x'$). כל הפעולות האלה והרכבות שלהן (כגון סיבוב+boost) יוצרות חבורה - חבורת הסימטריה של חוקי ניוטון, המכונה חבורת גליליי.

¹אם $R(\alpha)$ איננה אורתוגונלית הפעולה של $R(\alpha)$ על הכח לא תהיה אורתוגונלית, כך שנראה שגם הרמרחקים בין נקודות במרחב וכן גודל הכח השתנו, ולא רק הכיוון. מקובל להניח כי בעולם הניוטוני כל הצופים מודדים אותם מרחקים בין נקודות ואותו גודל כח. לכן, טרנספורמציה לא אורתוגונלית איננה נחשבת סימטריה של חוקי ניוטון.

5.2 מערכות מואצות ומסתובבות

נתבונן בצופה המאיץ יחסית למערכת אינרציאלית.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}_0 t^2}{2}$$

עבור צופה זה, תאוצת הגוף תהיה

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \vec{a}_0$$

נקבל שחוקי ניוטון נותנים

$$m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\vec{r}}' + \vec{a}_0) = \vec{F}$$

מהעברת אגפים נקבל

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

כלומר, ניתן עדיין להשתמש בחוקי ניוטון, אך כדי לעשות זאת יש להניח כי על כל הגופים בבעיה פועל כח מדומה שגודלו $-m\vec{a}_0$. כח זה פרופורציוני למסה, ואין לו כח תגובה המתאים לחוק השלישי (שכן הוא פועל אוניברסלית ולא ע"י גוף מסויים).³² סוג שני של תנועה מואצת הוא תנועה סיבובית. נניח כי הצופה מסתובב יחסית למערכת האינרציאלית, כאשר ציר הסיבוב הוא בכיוון z

$$\vec{r} = R(\omega t)\vec{r}'$$

כאשר

$$R(\omega t) \equiv \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נגדיר (כמו בסעיף 2.4)

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

ונקבל (בדקו!)

$$\ddot{\vec{r}} = R(\omega t) \left(\ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right)$$

ומהצבה בחוק השני של ניוטון נקבל (בדקו!)

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

כאשר

$$\vec{F} \equiv R(\omega t)\vec{F}'$$

³²הכוחות המדומים נחווים כממשיים מאד. כוחות כאלה, לדוגמה, הם הכוחות הדוחפים אותנו אחורה כשרכב מאיץ וקדימה כשהוא בולם וכן הכח הצנטריפוגלי (שיידון בהמשך).
³³שימו לב כי כח זה דומה מאד לגרביטציה – דמיון זה הוא הבסיס לתורת היחסות הכללית (שלא תדון כאן).

הוא הכח הרגיל מסובב בזווית הסיבוב הנוכחית. האיבר $-2m\vec{\omega} \times \vec{r}'$ נקרא "כח קוריוליס". זהו כח מדומה שגודלו פרופורציוני למהירות הגוף. כח זה הוא ההסבר לכך שמהירות סיבוב גופם של מחליקים על הקרח גדלה כאשר הם מושכים את ידיהם לכיוון הגוף, מנקודת מבטו של צופה שהסתובב איתם במהירות המקורית (מנקודת מבט חיצונית זהו פשוט שימור התנע הזוויתי). הכח $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ הוא הכח הצנטרפוגלי. זהו הכח שלפי הרגשתנו דוחף אותנו החוצה מהסיבוב בתוך רכב (מנקודת המבט של צופה חיצוני אנו פשוט ממשיכים בתנועה אינרציאלית בעוד הרכב מסתובב). על פני כדור"א הכוחות המדומים קטנים מאד (כיון ש $\omega = \frac{2\pi}{86400}$ קטנה), אך יש להם השפעה מסוימת. כח קוריוליס משפיע על גופים בתנועה מהירה, כמו פגזים לדוגמה, וכן על תנועת הרוחות. הכח הצנטרפוגלי משפיע מעט על צורת כדור"א שאינה כדור מושלם, וכן מוריד קצת ממשקלנו (לא מהמסה!) בקו המשווה יחסית לקטבים.

5.3 חבורת לורנץ

בדיון על מערכות הייחוס (וכן לכל אורך הקורס, עד כה) הנחנו, כמקובל, כי מבנה המרחב והזמן הוא של $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, כאשר הזמן $t \in \mathbb{R}$ בלתי תלוי בצופה, והוא קואורדינטה נפרדת מהמרחב. מספר תוצאות נסיוניות ותאורטיות, המבוססות על תופעות האור והאלקטרומגנטיות, הביאו בתחילת המאה ה-20 למחשבה כי הנחות אלה אינן נכונות בטבע. אי ההתאמות בין התאוריה הניוטונית לגליליית לבין ניסויים אלה הביאו מספר אנשים, ביניהם איינשטיין, לורנץ ופואנקרה להציע חוקים חדשים למבנה המרחב והזמן, לקינמטיקה ולמכניקה, שהתגבשו בסופו של דבר לתאוריה המכונה "תורת היחסות הפרטית".

הבסיס לתורת היחסות הפרטית הוא ההנחה כי מהירות האור אינווריאנטית לכל צופה. כלומר, צופה נע יראה את האור נע באותה מהירות כמו צופה נייח. ממשוואה 5.1 רואים כי אם האור (שגודל מהירותו מסומן c) והצופה נעים על אותו ציר, צופה נע במהירות v_0 ימדוד את מהירות האור כ $c \pm v_0$ בהתאם לכיוון בו הוא נע. בחישוב זה לא השתמשנו בשום דרך בחוקי ניוטון או בכל חוק תנועה אחר, אלא רק בהנחה שלנו לגבי מבנה המרחב והזמן. לכן, על מנת להתאים את התאוריה למציאות עלינו לשנות את הנחותינו לגבי מבנה המרחב והזמן.

נדרוש כי לכל $t_0, t, \vec{r}_0, \vec{r}$ אם מתקיים $|\vec{r} - \vec{r}_0| = c(t - t_0)$ (כאשר $\vec{r}_0$ מייצג את המיקום של פולס אור בזמן t_0 ו $\vec{r}$ את מיקומו בזמן t), אזי גם לצופה נע ייתקיים $|\vec{r}' - \vec{r}_0'| = c(t' - t'_0)$. משוואה זו נשמרת תחת סיבובים קבועים $\vec{r} = R(\alpha)\vec{r}'$ וכן תחת הזזות קבועות $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}$ והזזות בזמן $t = t' + q$, אך לא תחת boost כמתואר בסעיף 5.1. לכן, יש צורך בסוג חדש של boost המקיים

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = c(t - t_0) \Rightarrow |\vec{r}' - \vec{r}_0'| = c(t' - t'_0) \quad (5.2)$$

לשם הפשטות, נתבונן במרחב חד ממדי, ציר ה- x , ובזמן, t . נגדיר קואורדינטה חדשה $T = ct$ (שימו לב כי T נמדד ביחידות של אורך). נגדיר ווקטור דו ממדי

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ T \end{pmatrix}$$

ו"נורמה" $\tau^2 = T^2 - x^2$. שימו לב שזו אינה נורמה אמיתית, שכן τ^2 יכול להיות שלילי, וגם במקרים שהוא חיובי τ אינו מקיים בהכרח את אי שוויון המשולש. ברם, כל עוד נתייחס

לגודל τ^2 בלי לייחס לו משמעות נוספת לא נכנס לבעיה. ניתן לרשום את הנורמה בצורה

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} x & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ T \end{pmatrix} \equiv \vec{R}^t \eta \vec{R}$$

כאשר המטריצה η מכונה המטריקה של המרחב.^{5 4} אם נגדיר התמרה לינארית Λ המקיימת

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \quad (5.3)$$

אזי כל התמרה מהצורה

$$\vec{R} = \Lambda \vec{R}'$$

תקיים

$$\vec{R}^t \eta \vec{R} = \vec{R}'^t \Lambda^t \eta \Lambda \vec{R}' = \vec{R}'^t \eta \vec{R}'$$

ומכאן

$$T^2 - x^2 = T'^2 - x'^2$$

תוצאה זו גוררת את הדרישה המקורית במשוואה 5.2.⁶ מהן מטריצות הטרנספורמציה המקיימות את משוואה 5.3? ממשוואה 5.3 ניתן לכתוב משוואות על איברי המטריצה. מהן עולה, כי (בהתעלמות משיקופים בציר ה- x וב- t) המטריצות הן מהצורה

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

עבור כל u (שימו לב לדמיון למטריצות סיבוב). מכפלת שתי מטריצות מצורה זו נותנת

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \Lambda_2 &= \begin{pmatrix} \cosh u_1 & \sinh u_1 \\ \sinh u_1 & \cosh u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh u_2 & \sinh u_2 \\ \sinh u_2 & \cosh u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(u_1 + u_2) & \sinh(u_1 + u_2) \\ \sinh(u_1 + u_2) & \cosh(u_1 + u_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

לפי חוקי חיבור הפונקציות ההיפרבוליות (משוואות 1.17 ו-1.18). כלומר מכפלת מטריצות מצורה זו נותנת מטריצה מאותה צורה, כך שיש לנו סגירות. אם נגדיר

$$\beta \equiv \tanh u \quad (5.5)$$

וכן

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.6)$$

⁴לעיתים בוחרים את הסימן של x^2 להיות +1 ושל T^2 להיות -1, כלומר $\tau^2 = x^2 - T^2$. שינוי זה לא משנה את חבורת הטרנספורמציות ואת אופי היחסותיות.

⁵שימו לב ש- η אינה מטריקה במובן הרגיל של המילה שכן היא איננה חיובית מוחלטת.
⁶למעשה, בהנחות מסוימות, ניתן להראות כי אכן הנחת האיננווריאנטיות של מהירות האור מחייבת שהטרנספורמציה לינארית ומקיימת את משוואה 5.3.

נקבל

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

אם נתבונן בנקודות מהצורה (אוסף נקודות מצורה זו, המתאר את מיקום גוף בזמנים שנים נקרא **קו העולם** של הגוף)

$$\vec{R}' = \begin{pmatrix} 0 \\ T' \end{pmatrix}$$

כלומר, נקודות מראשית הצירים של הצופה S' בזמנים שונים, נקבל

$$\vec{R} = \Lambda \vec{R}' = \begin{pmatrix} \gamma\beta T' \\ \gamma T' \end{pmatrix}$$

כלומר, כאשר הצופה S' מודד זמן של T' , מודד הצופה S את הזמן כ- $\gamma T'$ ואת מיקומו של הצופה הנע כ- $\gamma\beta T'$. כלומר, מהירותו של הצופה S' יחסית ל- S היא

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{cx}{T} = c\beta$$

כלומר, $\beta = \frac{v}{c}$ היא מהירות הצופה הנע.

אבל רגע, אמרנו כי הצופה S' מודד זמן T' והצופה S מודד זמן $\gamma T'$. הכיצד? כאמור, חבורת גליליי אינה שומרת על מהירות האור קבועה. על מנת לאפשר boost השומר על מהירות האור קבועה, חייבים לוותר על זהות הזמן לכל צופה. אפילו הבורזמניות הופכת ליחסית. שני מאורעות המתרחשים באותו זמן, אך במקומות שונים לפי צופה מסוים, יתרחשו בזמנים שונים לפי צופה אחר.

מאורע הוא צמד - זמן ומיקום

$$e = \begin{pmatrix} x \\ T \end{pmatrix}$$

מאורעות עוברים טרנספורמציה על פי המטריצה

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

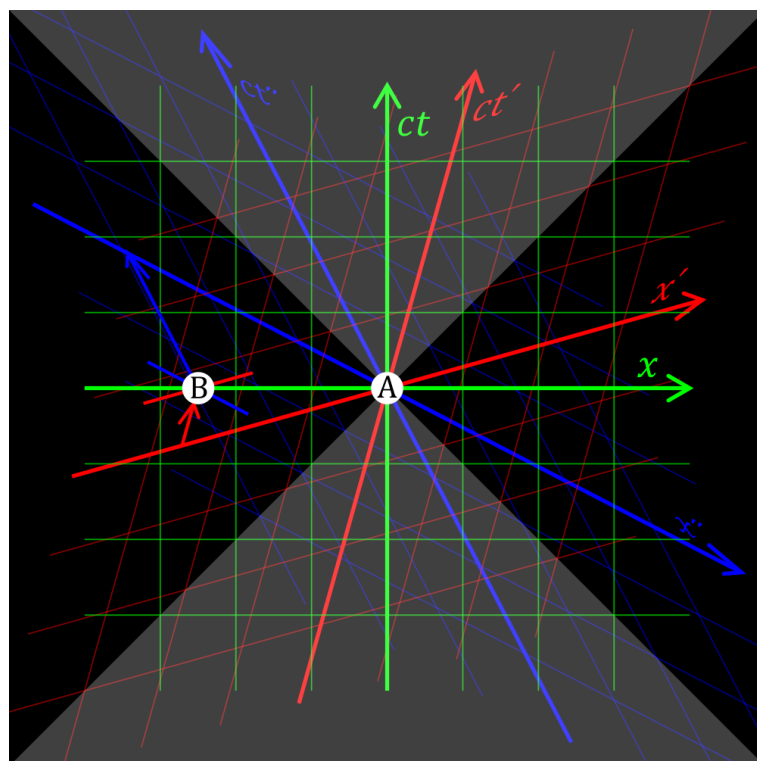
כלומר

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta T') \\ T &= \gamma(T' + \beta x') \end{aligned}$$

שימו לב כי $\Lambda(0) = 1$. הטרנספורמציה ההפכית ל- $\Lambda(\beta)$ היא $\Lambda(-\beta)$:

$$\Lambda(-\beta)\Lambda(\beta) = 1$$

כצפוי, שכן צופה S' הנע במהירות v_0 יחסית ל- S יראה את S נע במהירות $-v_0$ יחסית אליו. כך שהטרנספורמציה $\Lambda(-\beta)\Lambda(\beta)$ מעבירה אותנו מהמערכת S ל- S' ואז חזרה ל- S . כמו כן, לפי משוואה 5.4 קבוצת מטריצות זו סגורה תחת כפל. לכן, הן מהוות חבורה.



איור 5.1: חבורת לורנץ: צירי ה- x והזמן עבור צופים שונים. כל צבע מציין צופה במהירות שונה.

אם נחזור למרחב התלת ממדי המלא (או הארבע ממדי - כולל הזמן) נקבל שהמטריקה מוגדרת ע"י

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מרחב ארבעה ממדי בצרוף המטריקה הזו נקרא מרחב מינקובסקי. החבורה השומרת על המטריקה הזו היא החבורה הנוצרת ע"י סיבובים בשלושה ממדים

$$\begin{aligned} R_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_y(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_z(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

boost

ועל ידי מטריצות ה

$$\begin{aligned} \Lambda_x(\beta) &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ \Lambda_y(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma\beta & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ \Lambda_z(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma\beta \\ 0 & 0 & \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

החבורה הנוצרת ע"י המטריצות הנ"ל נקראת חבורת לורנץ או חבורת לורנץ ההומוגנית או $SO(3,1)$ שכן זוהי חבורת הטרנספורמציות ה"אורתוגונליות" יחסית למטריקה η שלה שלושה סימני מינוס ופלוס אחד. אם מוסיפים לחבורה הזו בארבעה ממדים (הזוהי בשלושה ממדים והזוהי בזמן - שמשמעותה מדידת זמן באמצעות שעון המכוון בהפרש זמנים) מתקבלת חבורה המכונה חבורת פואנקרה או, לעתים, חבורת לורנץ הלא הומוגנית. חבורת לורנץ מפרידה את המרחב לחמישה אזורים+ראשית הצירים (בה יושב הצופה עצמו). שני קונוסי האור - של העבר והעתיד מייצגים את הנקודות אליהן יגיעו קרני אור

הנפלטות מהראשית (עבור קונוס העתיד) או מתכנסות לראשית (קונוס העבר). הקונוסים אינווריאנטיים תחת חבורת לורנץ כיון שמהירות האור אינווריאנטית תחת פעולת החבורה. בתוך כל קונוס נמצא אזור ההשפעה של הראשית על העתיד (או אזור ההשפעה על הראשית מהעבר). אזור העתיד הוא אוסף הנקודות שאות המגיע מראשית הצירים במהירות נמוכה ממהירות האור יכול להגיע אליהן. אזור העבר הוא אוסף הנקודות שאות הנשלח מהן לראשית הצירים יכול להגיע אליה במהירות נמוכה ממהירות האור. האזור שמחוץ לקונוסי האור הוא אזור המאורעות שאינם מושפעים או משפיעים על ראשית הצירים. וקטור השייך לאחד האזורים האלה ישאר באותו אזור אחרי הטרנספורמציה (כלומר לכל צופה).

התארכות הזמן

כאשר שני ארועים מתרחשים בנקודה $x' = 0$ עבור צופה נע S' , המאורעות יהיו

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ T'_1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ T'_2 \end{pmatrix}$$

(לשם הפשטות חזרנו לממד 1+1) עבור הצופה במערכת S המאורעות יתוארו

$$e_1 = \begin{pmatrix} \gamma\beta T'_1 \\ \gamma T'_1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \gamma\beta T'_2 \\ \gamma T'_2 \end{pmatrix}$$

כלומר, הפרש הזמנים בין המאורעות יהיה $\gamma(T'_2 - T'_1)$. לפי ההגדרה (במשוואה 5.6) $\gamma \leq 1$ תמיד. לכן, הפרש הזמנים בין מאורעות עבור כל צופה קטן מהפרש הזמנים ביניהם הנמדד ע"י צופה נייח (כולמר צופה שעבורו שני המאורעות מתרחשים באותו המקום).

התכווצות האורך

נניח שמוט מונח במערכת S' בקטע $[0, \ell']$ ואיננו נע במערכת זו. קווי העולם של קצות המוט הם בהתאמה:

$$e'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ T' \end{pmatrix}, \quad e'_{\ell'} = \begin{pmatrix} \ell' \\ T' \end{pmatrix}$$

נעביר את קווי העולם האלה למערכת S ונקבל

$$e_0 = \begin{pmatrix} \gamma\beta T' \\ \gamma T' \end{pmatrix}, \quad e_{\ell'} = \begin{pmatrix} \gamma\ell' + \gamma\beta T' \\ \gamma T' + \gamma\beta\ell' \end{pmatrix}$$

נתבונן במערכת בזמן $T = 0$ על פי הצופה במערכת S (נסו זאת גם לימן כללי), ונקבל עבור הקצה

$$T = \gamma T' = 0 \Rightarrow x_0 = \gamma\beta T' = 0$$

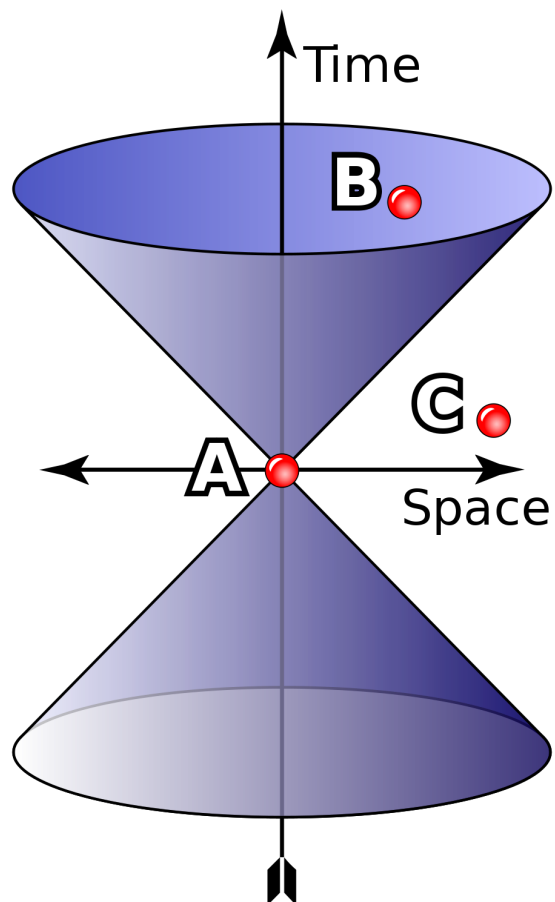
ועבור הקצה ℓ'

$$T = \gamma T' + \gamma\beta\ell' = 0 \Rightarrow x_{\ell} = \gamma\ell' + \gamma\beta T' = \gamma\ell' - \gamma\beta^2\ell'$$

ומהצבת הנוסחה עבור γ ממשוואה 5.6 מקבלים $x_{\ell} = \sqrt{1 - \beta^2}\ell'$. לכן אורך המוט כפי שימדד במערכת S הוא

$$\ell = x_{\ell} - x_0 = \sqrt{1 - \beta^2}\ell' < \ell'$$

ובאופן כללי, בכל מערכת נעה יחסית למוט יימדד אורכו כקצר מאורכו במנוחה. שימו לב, שלדעתו של הצופה ב' S' , מדד הצופה ב' S את מיקומם של קצות המוט בזמנים שונים!



איור 5.2: קונוסי האור עבור הצופה בנקודה A . המאורע B נמצא בתוך קונוס העתיד, כלומר, הצופה ב- A יכול להגיע אליו, ואילו המאורע B נמצא מחוץ לקונוס.

חיבור מהירויות

לפי משוואות 5.4 ו-5.5 כאשר נכפיל שתי טרנספורמציות boost, האחת מתארת תנועה במהירות β_1 והשנייה במהירות β_2 נקבל תנועה במהירות β_3 המקיימת

$$\beta_3 \equiv \tanh(u_3) = \tanh(u_1 + u_2) = \frac{\tanh u_1 + \tanh u_2}{1 + \tanh u_1 \tanh u_2} \equiv \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (5.7)$$

נוסחה 5.7 נקראת נוסחת חיבור המהירויות היחסותית. שימו לב למספר פרטים:

- המהירות היחסית בין שני גופים איננה פשוט סכום המהירויות של הגופים, כצפוי בפיסיקה קלאסית. כלומר, אם צופה א' נע במהירות v_1 יחסית לצופה ב', וצופה ב' נע במהירות v_2 יחסית לג', צופה א' לא יראה את ג' נע במהירות $v_1 + v_2$ (אלא במהירות נמוכה יותר).
- אם $\beta_1, \beta_2 \ll 1$ (כלומר המהירויות קטנות יחסית למהירות האור), משוואה 5.7 נותנת בקירוב $\beta_3 \approx \beta_1 + \beta_2$. כלומר, חוזרים לסכום המהירויות הרגיל.
- הנוסחה סימטרית להחלפה בין β_1 לבין β_2 .
- אם $\beta_1 = 1$ הוא 1, אז $\beta_3 = 1$ ללא תלות ב- β_2 (וכנ"ל אם $\beta_2 = 1$). כלומר, אם אחת המערכות נעה במהירות האור היא תראה נעה במהירות האור לכל צופה.
- אם $\beta_1 \leq 1$ ו- $\beta_2 \leq 1$ אזי

$$1 - \beta_3 = \frac{1 + \beta_2 \beta_2 - \beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_2 \beta_2} = \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{1 + \beta_2 \beta_2} \geq 0$$

כלומר $\beta_3 \leq 1$ - מהירות כל מערכת יחסית לכל מערכת אחרת קטנה ממהירות האור. לדוגמה, אם מערכת ב' נעה יחסית לא' במהירות $\beta_1 = 0.8$ ממהירות האור ומערכת ג' נעה יחסית לב' במהירות $\beta_2 = 0.8$ ממהירות האור, אזי מערכת ג' תנוע יחסית לא' במהירות

$$\beta_3 = \frac{0.8 + 0.8}{1 + 0.8 \cdot 0.8} \approx 0.976 < 1$$

כלומר במהירות קטנה ממהירות האור.

חלק II

מכניקת הקוונטים

פרק 6

הקדמה: מרחבי הילברט

6.1 מרחבי הילברט כלליים

בקורס זה נשתמש בסימונים המקובלים בתורת הקוונטים כפי שנקבעו ע"י דיראק:

- וקטור במרחב הילברט (מייד נסביר מהו מרחב הילברט) יסומן בצורה $|v\rangle$ (סימון זה מכונה ket).
 - מטריצות יסומנו באות לועזית גדולה ללא סימון נוסף לדוגמה: A .
 - המטריצה הצמודה ההרמיטית תסומן $A^\dagger$ (שימו לב שבמתמטיקה לרוב משתמשים בסימון A^*).
 - צמוד של סקלר λ יסומן λ^* (במתמטיקה משתמשים לפעמים בסימון $\bar{\lambda}$).
 - הצמוד של הוקטור $|v\rangle$ יסומן $\langle v|$ (סימן זה מכונה bra).
 - מכפלה סקלרית בין וקטורים תסומן $\langle v|u\rangle$ (שימו לב גם להיפוך הסדר. נסו לנחש עתה משתמשים בד"כ בסימון $\langle u, v\rangle$). שימו לב גם להיפוך הסדר. (נסו לנחש עתה את משמעות השמות ket ו bra).
- שימו לב כי נראה שרבים מהסימונים והנוטציות נבחרו במיוחד על מנת לבלבל מתמטיקאים. בכל מקרה נשתמש בנוטציה כמתואר למעלה, כמקובל בין העוסקים בתחום זה (כולל מתמטיקאים).

6.1.1 הגדרה: מרחב הילברט

מרחב הילברט, $\mathcal{H}$,¹ הוא מרחב וקטורי מעל שדה המרוכבים², $\mathbb{C}$, בצרוף מכפלה פנימית $\langle v|u\rangle$ המקיימת:

1. לכל $|u\rangle, |v\rangle$ ממשי ומתקיים $\langle u|u\rangle \geq 0$.

2. $\langle u|u\rangle = 0$ אם ורק אם $|u\rangle = 0$ (וקטור האפס).

¹שימו לב שאין קשר להמילטוניאן למרות שהשתמשנו באותו סימן.
²ניתן להגדיר את מרחב הילברט גם מעל שדות אחרים, כמו $\mathbb{R}$, אך בקורס זה נשתמש רק ב- $\mathbb{C}$.

3. לכל $|u\rangle, |v\rangle$ מתקיים $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$.

4. המכפלה לינארית בגורם הימני: לכל זוג סקלרים α, β ולכל שלשת וקטורים $|u\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle$ מתקיים $\langle u|\alpha v_1 + \beta v_2\rangle = \alpha \langle u|v_1\rangle + \beta \langle u|v_2\rangle$.

מעובדות 3 ו-4 נובע כי המכפלה לינארית בוקטור הימני ואנטי לינארית בשמאלי

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2 | u \rangle = \alpha^* \langle v_1 | u \rangle + \beta^* \langle v_2 | u \rangle$$

(שוב, הפוך מהמקובל במתמטיקה).

הנורמה במרחב הילברט מוגדרת על פי המכפלה הפנימית

$$\| |u\rangle \| \equiv \sqrt{\langle u | u \rangle}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \| |u\rangle + |v\rangle \| &\equiv \sqrt{(\langle u | + \langle v |)(|u\rangle + |v\rangle)} \\ &= \sqrt{\langle v | v \rangle + \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle} \\ &\leq \| |u\rangle \| + \| |v\rangle \| \end{aligned}$$

לפי אי שיויון קושי-שוורץ. לכן הנורמה מקיימת את אי שיויון המשולש. דרישה נוספת במרחב הילברט היא שהמרחב הוא מרחב מטרי שלם. כלומר לכל סדרת קושי של וקטורים $\{|u_n\rangle\}_{n=1}^\infty$, המקיימת

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \| |u_n\rangle - |u_m\rangle \| = 0$$

קיים גבול. כלומר, קיים $|u\rangle$ כך ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n\rangle = |u\rangle$$

מרחב הילברט יכול להיות בממד סופי – במקרה כזה הוא פשוט המרחב הוקטורי $\mathbb{C}^d$ (עבור ממד d) עם פעולת המכפלה הסקלרית הרגילה. מרחב הילברט יכול להיות גם בממד אינסופי. נדון בדוגמה (חשובה) כזו בסעיף 6.3.

6.2 אופרטורים במרחב הילברט

6.2.1 הגדרה

אופרטור לינארי במרחב הילברט הוא מיפוי לינארי $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. נסמן את פעולת האופרטור A על וקטור $|u\rangle$ בצורות $A|u\rangle \equiv |Au\rangle$. אופרטור A יקרא הרמיטי אם לכל $|u\rangle$ ו $|v\rangle$ מתקיים $\langle v | Au \rangle = \langle Av | u \rangle$. נסמן זאת $A^\dagger = A$. בממד סופי מדובר פשוט במטריצות הרמיטיות (כלומר מטריצות השוות לצמוד ההרמיטי שלהן). אופרטור U יקרא יוניטרי אם לכל $|u\rangle$ ו $|v\rangle$ מתקיים $\langle v | Uu \rangle = \langle v | u \rangle$. כלומר, $U^\dagger U = 1$. אופרטור P הוא אופרטור הטלה (projection) אם $P^2 = P$.

שימו לב כי אופרטור הרמיטי בממד סופי מיוצג ע"י מטריצה הרמיטית. מאלגברה לינארית אנו יודעים כי הוקטורים העצמיים של מטריצה כזו הם אורתוגונלים ומהווים בסיס למרחב. נגדיר ערך עצמי כמנוון (degenerate) אם הריבוי האלגברי שלו (ולכן גם הריבוי הגאומטרי שלו) גדול מ-1.

משפט 7

1. כל הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי הם ממשיים.
 2. כל הערכים העצמיים של אופרטור יוניטרי שווים בערכם המוחלט ל-1.
 3. כל הערכים העצמיים של אופרטור הטלה הם 0 או 1.
- הוכחה. נניח לאופרטור וקטור עצמי $|u\rangle$ עם ערך עצמי מתאים λ .

1. אם A הרמיטי אז

$$\lambda \langle u|u \rangle = \langle u|Au \rangle = \langle Au|u \rangle = \lambda^* \langle u|u \rangle$$

ולכן $\lambda = \lambda^*$.

2. אם U יוניטרי אז

$$\langle u|u \rangle = \langle Uu|Uu \rangle = \lambda \langle Uu|u \rangle = \lambda \lambda^* \langle u|u \rangle$$

ולכן $\lambda \lambda^* = 1$.

3. אם P אופרטור הטלה אז

$$\lambda \langle u|u \rangle = \langle u|Pu \rangle = \langle u|P^2u \rangle = \lambda^2 \langle u|u \rangle$$

ולכן $\lambda^2 = \lambda$. כלומר $\lambda = 1$ או $\lambda = 0$.

□

בעזרת הנוטציה של דיראק אנו יכולים להשתמש בצורה $|u\rangle \langle v|$ לציון מכפלה חיצונית בין וקטורים – הנותנת אופרטור, שכן

$$|u\rangle \langle v| \cdot |w\rangle = |u\rangle \langle v|w\rangle = \langle v|w\rangle |u\rangle$$

בעזרת הנוטציה של דיראק ניתן לנסח בקלות את המשפט הבא:

משפט 8 (המשפט הספקטלי – בממד סופי)

עבור אופרטור הרמיטי A בממד סופי, d , עם ערכים עצמיים λ_i ווקטורים עצמיים אורתונורמליים $|v_i\rangle$ ($i = 1, \dots, d$) מתקיים:

$$A = \sum_{i=1}^d \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|$$

הוכחה. הוקטורים העצמיים של A מהווים בסיס אורתונורמלי למרחב $\mathbb{C}^d$ (זהה להוכחה בלינארית עבור מטריצות סימטריות). לכן, כל וקטור $|u\rangle$ ניתן לכתיבה בצורה

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |v_i\rangle$$

עם מקדמים $c_i = \langle v_i | u \rangle$. מהלינאריות של A מקבלים

$$A|u\rangle = \sum_{i=1}^d c_i A|v_i\rangle = \sum_{i=1}^d c_i \lambda_i |v_i\rangle$$

נגדיר את האופרטור

$$B \equiv \sum_{i=1}^d \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|$$

ונקבל

$$B|u\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i | \cdot |u\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i | u \rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i c_i |v_i\rangle = A|u\rangle$$

□

לכל וקטור $|u\rangle$. לכן $A = B$.

למשפט הספקטרלי יש גם גרסה בממד אינסופי, אך לא נדון בה כאן.

6.2.2 קומוטטורים

הקומוטטור³ של שני אופרטורים, A ו- B , מוגדר להיות

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

אם A ו- B הרמיטיים אז

$$[A, B]^\dagger \equiv (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A, B]$$

כלומר $[A, B]$ אנטי הרמיטי. ניתן למצוא אופרטור הרמיטי C כך ש- $[A, B] = iC$.
קומוטטורים מקימים את התכונות הבאות (בדקו!)

1. אנטי קומוטטיביות:

$$[A, B] = -[B, A]$$

³למעשה אלה סוגרי לי (Lie brackets) של האופרטורים. כמוזכר בסעיף 4.4.1, יש קשר בינם לבין הקומוטטור של התבורה, אך השם מבלבל מעט.

2. זהות יעקובי (Jacobi Identity):

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

לקומוטטורים תפקיד חשוב בתכונות האופרטורים. למעשה ניתן לאפיין את האלגברה של האופרטורים באמצעות התנהגות הקומוטטורים בלבד, ללא צורך בייצוג מפורש של האופרטורים! להלן תכונה חשובה של קומוטטורים.

משפט 9

יהיו A ו- B מטריצות הרמיטיות. A ו- B קומוטטיביות ($[A, B] = 0$) אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים משותפים של A ו- B (כלומר, קיים בסיס אורתונורמלי בו A ו- B מלוכסנות בו זמנית).

הוכחה. אם שתי המטריצות, A ו- B מלוכסנות בבסיס מסוים (נסמן אותן A' ו- B' בבסיס המלכסן), אז בוודאי הן קומוטטיביות באותו בסיס. בבסיס אורתונורמלי אחר, אם $A'B' = B'A'$ אז $B'A' = A'B'$.

$$AB = UA'U^\dagger UB'U^\dagger = UA'B'U^\dagger = UB'A'U^\dagger = UB'U^\dagger UA'U^\dagger = BA$$

ולכן $[A, B] = 0$.

נניח עתה כי $[A, B] = 0$. נסמן את הוקטורים העצמיים המנורמלים של A ב- $|v_i\rangle$ ואת הערכים העצמיים המתאימים ב- λ_i . A הרמיטית, לכן הוקטורים $|v_i\rangle$ מהווים בסיס אורתונורמלי למרחב.

$AB = BA$ ולכן, לכל j, i מתקיים

$$\begin{aligned} \langle v_i | AB | v_j \rangle &= \langle v_i | BA | v_j \rangle \\ \langle Av_i | B | v_j \rangle &= \langle v_i | B | Av_j \rangle \\ \lambda_i \langle v_i | B | v_j \rangle &= \lambda_j \langle v_i | B | v_j \rangle \\ (\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i | B | v_j \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

כלומר אם $\lambda_i \neq \lambda_j$ אזי $\langle v_i | B | v_j \rangle = 0$. כלומר, אם ערך עצמי λ_j (של המטריצה A) איננו מנוון, אזי $\langle v_i | B | v_j \rangle \perp |v_i\rangle$ לכל $i \neq j$ ולכן $\langle v_i | B | v_j \rangle$ הוא בכיוון $|v_j\rangle$ כלומר $B | v_j \rangle = \mu_j | v_j \rangle$ עבור μ_j כלשהו. לכן, $|v_j\rangle$ וקטור עצמי של B .

נתבונן עתה במקרה בו λ_j מנוון. במקרה כזה קיימים וקטורים $|v_{jk}\rangle$, $k = 1, \dots, n$ הניווני של ערך עצמי זה שלכולם מתקיים $A | v_{jk} \rangle = \lambda_j | v_{jk} \rangle$. כמו כן, לכל צירוף לינארי $\sum_k c_k | v_{jk} \rangle$ מתקיים

$$A \sum_j c_j | v_{jk} \rangle = \sum_j c_j A | v_{jk} \rangle = \lambda_j \sum_j c_j | v_{jk} \rangle$$

כלומר, הוא גם וקטור עצמי, עם ערך עצמי λ_j . לפי משוואה 6.1 $B | v_{jk} \rangle$ מאונך לכל וקטור עצמי של A עם ערך עצמי שונה מ- λ_j ולכן שייך לתת מרחב הנפרש ע"י הוקטורים $| v_{jk} \rangle$. כלומר קיימים c_{jk} כך ש- $B | v_{jk} \rangle = \sum_k c_k | v_{jk} \rangle$.

נגדיר מטריצה מממד $n \times n$, $B'_{lk} = \langle v_{jl} | B | v_{jk} \rangle$ (מטריצה זו היא הגבלה של המטריצה B לתת מרחב המנוון).

$$(B'_{lk})^* = \langle v_{jl} | B | v_{jk} \rangle^* = \langle v_{jk} | B | v_{jl} \rangle = B'_{kl}$$

כלומר $B'^{\dagger} = B'$ ולכן B' ניתנת לליכסון. כלומר, קיימים n צירופים לינארים בת"ל $|u_{jl}\rangle = \sum_m c_{jlm} |v_{jm}\rangle$ עבור $l = 1, \dots, n$ שהם וקטורים עצמיים של B' ולכן גם וקטורים עצמיים של B . כמו כן הם גם וקטורים עצמיים של A . $\square$

6.2.3 פונקציות של אופרטורים

לכל אופרטור A ו- n טבעי, ניתן להגדיר A^n בצורה הסטנדרטית ($A^n |u\rangle \equiv A^{n-1} (A |u\rangle)$). אם קיים A^{-1} (A הפיך) אזי נגדיר $A^{-n} \equiv (A^{-1})^n$. כעת לכל פונקציה f הניתנת לפיתוח לטור חזקות, ניתן להגדיר $f(A)$ בצורה

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{A^n}{n!}$$

(אם הפיתוח של f כולל גם חזקות שליליות נשתמש בחזקות השליליות של A)
נוסחה שימושית היא האקספוננט של אופרטור A :

$$\exp A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

משפט 10

לכל אופרטור A , אם $f(A)$ מוגדרת אזי

$$f(A) = \sum_{i=1}^d f(\lambda_i) |v_i\rangle \langle v_i|$$

הוכחה. לכל n אם $|v_i\rangle$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ_i אזי

$$A^n |v_i\rangle = \lambda_i^n |v_i\rangle$$

לכן אם f ניתנת לפיתוח לטור

$$f(A) |v_i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{A^n}{n!} |v_i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\lambda_i^n}{n!} |v_i\rangle = f(\lambda_i) |v_i\rangle$$

כל וקטור הוא צרוף לינארי של וקטורים עצמיים. המשך ההוכחה כמו במשפט 8.
אם קיים A^{-1} , אזי לכל $|v_i\rangle$ מתקיים $A^{-1} |v_i\rangle = \lambda_i^{-1} |v_i\rangle$ ולכן $A^{-n} |v_i\rangle = \lambda_i^{-n} |v_i\rangle$.
לכן המשפט נכון גם אם הפיתוח כולל חזקות שליליות של A . $\square$

6.3 מרחב הפונקציות L^2

נגדיר כוקטור כל פונקציה $\varphi(x)$ המקיימת

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x)\varphi(x)dx < \infty$$

(כלומר, האינטגרל מתכנס - פונקציות אינטגרליות בריבוע). נגדיר מכפלה וקטורית בצורה

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x)\psi(x)dx \quad (6.2)$$

מרחב הפונקציות האינטגרליות בריבוע בצורה המכפלה הפנימית ממשוואה 6.2 נקרא מרחב L^2 .

משפט 11

מרחב L^2 הוא מרחב הילברט.

הוכחה. תכונות 1, 3, 4 ברורות מיידית מההגדרה של המכפלה הפנימית. תכונה 2 בעייתית קצת יותר. למעשה יש לשנות קצת את הגדרת השוויון בין פונקציות, ולהגדיר אותן כשוות אם הן שוות בכל נקודה פרט לנקודות שמידתן הכללית היא 0 (zero measure) - כלומר אוסף נקודות שאינטגרל על כל פונקציה בהן הוא 0 (לדוגמה - כל קבוצה של מספר סופי של נקודות). שוויון זה מסומן לעיתים $\varphi \doteq \psi$ או $\varphi = \psi$ a.e. כאשר a.e. almost everywhere. קל לראות כי זהו יחס שקילות. כדי להראות שהמכפלה הפנימית מוגדרת עבור כל זוג פונקציות (כלומר שהאינטגרל לא מתבדר) נשתמש בעובדה שלכל ϕ

$$\langle \phi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\phi(x)dx \geq 0$$

נציב $\phi(x) = \varphi(x) + \alpha\psi(x)$ עבור α סקלר כלשהו, ונקבל

$$\langle \varphi + \alpha\psi | \varphi + \alpha\psi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle + |\alpha|^2 \langle \psi | \psi \rangle + \alpha \langle \varphi | \psi \rangle + \alpha^* \langle \varphi | \psi \rangle^* \geq 0$$

ומהעברת אגפים

$$-2\Re \alpha \langle \varphi | \psi \rangle \leq \langle \varphi | \varphi \rangle + |\alpha|^2 \langle \psi | \psi \rangle$$

בחירה של $\alpha = \pm 1$ מראה כי

$$-\langle \varphi | \varphi \rangle - \langle \psi | \psi \rangle \leq 2\Re \langle \varphi | \psi \rangle \leq \langle \varphi | \varphi \rangle + \langle \psi | \psi \rangle$$

כלומר, החלק הממשי של $\langle \varphi | \psi \rangle$ חסום. בחירה של $\alpha = \pm i$ מראה כי

$$-\langle \varphi | \varphi \rangle - \langle \psi | \psi \rangle \leq 2\Im \langle \varphi | \psi \rangle \leq \langle \varphi | \varphi \rangle + \langle \psi | \psi \rangle$$

כלומר, גם החלק המדומה של $\langle \varphi | \psi \rangle$ חסום. $\square$

ניתן להגדיר בצורה דומה גם מרחב L^2 עבור פונקציות $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, y, z)|^2 dx dy dz < \infty$$

6.4 אופרטורים במרחב L^2

אופרטורים במרחב L^2 פועלים על פונקציה במרחב הילברט וממפים אותה לפונקציה אחרת במרחב. בקורס זה נתמקד בשני אופרטורים לינאריים חשובים בפיסיקה. אופרטור x הוא האופרטור המוגדר ע"י

$$\langle \varphi | x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^* x \psi(x) dx \quad (6.3)$$

נסמן

$$x |\varphi\rangle \equiv x\varphi(x)$$

כלומר, האופרטור x פשוט מכפיל את הפונקציה ב- x . שימו לב שאם $\varphi(x) \in L^2$ עדיין $x\varphi(x)$ לא בהכרח אינטגרלית בריבוע. לחלופין, האינטגרל במשוואה 6.3 לא בהכרח מתכנס לכל φ ו- ψ . לכן, האופרטור x מוגדר רק על חלק מהמרחב L^2 .

$$\langle \varphi | x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^* x \psi(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) x \psi(x)^* dx \right)^* = \langle \psi | x | \varphi \rangle^*$$

לכן, x אופרטור הרמיטי.

אופרטור חשוב נוסף הוא אופרטור הגזירה

$$\langle \varphi | \frac{d}{dx} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^* \frac{d}{dx} \psi(x) dx$$

כלומר,

$$\frac{d}{dx} |\varphi\rangle \equiv \frac{d}{dx} \varphi(x)$$

שימו לב, שגם כאן האינטגרל לא תמיד מתכנס, ולכן גם אופרטור הגזירה איננו מוגדר לכל φ .

לפי אינטגרציה בחלקים,

$$\langle \varphi | \frac{d}{dx} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^* \frac{d}{dx} \psi(x) dx = \varphi(x)^* \psi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \varphi(x)^* \right) \psi(x) dx$$

אבל אם $\varphi(x), \psi(x) \in L^2$ חייב להתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$$

ולכן

$$\varphi(x)^* \psi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

מכאן נובע

$$\langle \varphi | \frac{d}{dx} | \psi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \varphi(x)^* \right) \psi(x) dx = - \langle \psi | \frac{d}{dx} | \varphi \rangle^*$$

ולכן אופרטור הגזירה אנטי הרמיטי. אבל $i \frac{d}{dx}$ וכן $-i \frac{d}{dx}$ הרמיטיים:

$$\langle \varphi | -i \frac{d}{dx} | \psi \rangle = \langle \psi | -i \frac{d}{dx} | \varphi \rangle^*$$

כדי לבדוק מהו הקומוטטור של האופרטורים האלה נפעיל אותם על פונקציה כללית $f(x)$

$$\left[x, -i \frac{d}{dx} \right] f = x \cdot \left(-i \frac{d}{dx} f \right) - \left(-i \frac{d}{dx} (xf) \right) = -ix \frac{df}{dx} + if + ix \frac{df}{dx} = if$$

לכן

$$\left[x, -i \frac{d}{dx} \right] = i \quad (6.4)$$

פרק 7

מכניקת הקוונטים

7.1 האקסיומות של תורת הקוונטים

הגישה האקסיומטית לתורת הקוונטים פותחה בעיקר ע"י ג'ון פון-נוימן. היא מכילה 3 הנחות בסיסיות המהוות מסגרת לכל תורה המכונה קוונטית (ישנן תורות קוונטיות שונות: יחסותית, לא יחסותית, תורת שדות קוונטים וכו'). האקסיומות הן:

7.1.1 מרחב המצבים

מצב של מערכת מתואר ע"י וקטור במרחב הילברט (כלשהו). מצבים יחשבו בלתי נבדלים פיסיקלית אם הם שווים עד כדי מכפלה בסקלר. כלומר, לכל $z \in \mathbb{C}$ ולכל $|v\rangle \in \mathcal{H}$, המצבים $|v\rangle$ ו $z|v\rangle$ נחשבים זהים מבחינה פיסיקלית. שימו לב שמאקסיומה זו נובע כי נח לעבוד עם מצבים מנורמלים

$$|u_i\rangle \equiv \frac{|v_i\rangle}{\sqrt{\langle v_i | v_i \rangle}}$$

המקיימים $\langle u_i | u_i \rangle = 1$. המצב $|u_i\rangle$ עדיין מוגדר עד כדי קבוע $e^{i\phi}$ שערכו המוחלט 1. כיון שמרחב המצבים הוא מרחב וקטורי כל צרף לינארי של מצבים גם הוא מצב. לכן אם $|a\rangle$ ו $|b\rangle$ מצבים גם $|a\rangle + |b\rangle$, $|a\rangle - |b\rangle$, $|a\rangle + (5 + 3i)|b\rangle$ ו $|a\rangle + |b\rangle$ מצבים (שונים זה מזה). מצבים כאלה נקראים סופרפוזיציה. אם, לדוגמה, המצב $|a\rangle$ מתאר מצב פיסיקלי בו החלקיק נמצא בבור הימני ובמצב $|b\rangle$ החלקיק נמצא בבור השמאלי, אזי במצב $|a\rangle + |b\rangle$ או $|a\rangle - |b\rangle$ החלקיק ימצא בשני הבורות בו זמנית! בפועל, אם ננסה להשתמש במכשיר מדידה כדי למצוא היכן החלקיק, נמצא אותו בהסתברות מסוימת בבור הימני ואחרת בשמאלי. על כך, באקסיומה 7.1.3.

7.1.2 התפתחות בזמן

ההתפתחות הנורמלית של המערכת נתונה ע"י אופרטור יוניטרי $U(t)$. אם המצב בזמן 0 הוא $|v(0)\rangle$, אז בזמן t המצב יהיה $|v(t)\rangle = U(t)|v(0)\rangle$.

7.1.3 מדידה

מדידה היא תהליך בו משתמשים במכשיר פיסיקלי מסויים כדי למדוד את מצב המערכת (מיקום, תנע, אנרגיה וכו'). הגדרה זו מעגלית במידה רבה, וחלק ניכר מהמוזרות והמיסתורין בתורת הקוונטים קשור למדידה.

אקסיומת המדידה: לכל גודל נמדד פיסיקלי (observable) מתאים אופרטור הרמיטי, A . התוצאות האפשריות של המדידה הן הערכים העצמיים של A , λ_i . אם תוצאת המדידה היתה ערך עצמי מסויים λ_i , אזי מצב המערכת לאחר המדידה הוא הטלה של המצב לפני המדידה לתת-המרחב האינוריאנטי של A המתאים לערך העצמי λ_i . והסתברות לקבל את התוצאה λ_i היא הנורמה בריבוע של ההטלה של המצב למרחב אינוריאנטי זה. לפי אקסיומה זו, נניח שלאופרטור הרמיטי A יש ערך עצמי לא מנוון λ_i עם ווקטור עצמי (מנורמל) מתאים $|v_i\rangle$ והמערכת נמצאת במצב $|\psi\rangle$. אזי, ההסתברות לקבל במדידת הגודל הפיסיקלי המתאים ל- A את התוצאה λ_i היא

$$\langle \psi | v_i \rangle \langle v_i | \psi \rangle = |\langle v_i | \psi \rangle|^2$$

ואם התקבלה התוצאה λ_i , המצב לאחר המדידה יהיה

$$|\psi'\rangle = \langle v_i | \psi \rangle |v_i\rangle$$

או, לחלופין, המצב המנורמל יהיה

$$|\psi'\rangle = |v_i\rangle$$

שינוי זה במצב נקרא "קריסת פונקצית וקטור הגל" באופן כללי, נניח שלאופרטור הרמיטי A יש ערך עצמי λ_i עם ניוון n ווקטורים עצמיים (מנורמלים) מתאימים $|v_{ik}\rangle$, $k = 1, \dots, n$. נגדיר את אופרטור ההטלה

$$P_i \equiv \sum_{k=1}^n |v_{ik}\rangle \langle v_{ik}|$$

אזי ההסתברות לקבל את התוצאה λ_i במדידת הגודל הפיסיקלי A' המתאים לאופרטור A היא

$$p(A' = \lambda_i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle$$

ומצב המערכת לאחר המדידה, אם אכן התקבלה התוצאה λ_i יהיה

$$|\psi'\rangle = P_i |\psi\rangle$$

או, בצורה המנורמלת

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}} P_i |\psi\rangle$$

ערך תצפית

לפי האקסיומה, ההסתברות לקבל תוצאה λ_i במדידה היא

$$p(A' = \lambda_i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle$$

כאשר

$$P_i \equiv \sum_{k=1}^n |v_{ik}\rangle \langle v_{ik}|$$

אבל התוחלת מוגדרת להיות

$$\begin{aligned} E(A') &= \sum_i \lambda_i p(A' = \lambda_i) \\ &= \sum_i \lambda_i \langle \psi | \sum_{k=1}^n |v_{ik}\rangle \langle v_{ik}| | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \sum_i \lambda_i \sum_{k=1}^n |v_{ik}\rangle \langle v_{ik}| | \psi \rangle \end{aligned}$$

אבל, לפי המשפט הספקטרלי,

$$\sum_i \lambda_i \sum_{k=1}^n |v_{ik}\rangle \langle v_{ik}| = A$$

ומכאן שתוחלת הערך הנמדד של אופרטור, המכונה גם ערך התצפית היא:

$$E(A') = \langle \psi | A | \psi \rangle \equiv \langle A \rangle$$

מצבים עצמיים וקומוטטיביות

מאקסיומת המדידה נובע כי אם המערכת נמצאת במצב עצמי של אופרטור מסוים אזי נקבל את הערך העצמי המתאים בהסתברות 1.

אם שני אופרטורים קומוטטיביים נובע ממשפט 9 שקיימים מצבים עצמיים משותפים לשניהם. לכן, ניתן לדעת בו זמנית מה תהיה תוצאת המדידה של הגודל הפיסיקלי הקשור לכל אחד מהם. כמו כן, מדידת כל אחד מהם תשאיר את המצב ללא שינוי (שכן הוא כבר וקטור עצמי) ולכן לא תשפיע על מצבו לקראת המדידה השניה – גם המדידות קומוטטיביות. לעומת זאת, אם שני אופרטורים אינם קומוטטיביים, לא ניתן לדעת בו זמנית בוודאות מלאה את תוצאת המדידה הצפויה בשניהם. כמו כן, מדידת אחד מהם תשנה את וקטור המצב ותשפיע על תוצאת המדידה של השני – יש חשיבות לסדר המדידות שנבצע.

טרנספורמציות יוניטריות

אם $|\psi\rangle$ מצב מנורמל $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ נקבל עבור כל בסיס של וקטורים עצמיים

$$\sum_i |\langle u_i | \psi \rangle|^2 = 1$$

עבור כל התמרה יוניטרית U נקבל

$$\langle U\psi | U\psi \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

כלומר, טרנספורמציות יוניטריות שומרות על סכום ההסתברויות. לפי אקסיומה 7.1.2 השינוי במצב המערכת בכל זמן הוא יוניטרי. זה מאשר את העובדה שסכום ההסתברויות עבור כל גודל נמדד (measurable) בכל זמן הוא 1.

7.2 משוואת שרדינגר

בתורת הקוונטים הלא יחסותית של חלקיק אחד, מצבו של החלקיק מתואר ע"י פונקציה $\psi(\vec{r}) \in L^2$. לשם הפשטות, נעבוד עם פונקציות מנורמלות. כלומר, בממד אחד

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$$

ובשלושה ממדים

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) dx dy dz = 1$$

7.2.1 מיקום ותנע

במכניקת הקוונטים אופרטור המיקום של חלקיק בציר x הוא האופרטור x . ערך התצפית של האופרטור הוא, אם כן (עבור ψ מנורמלת)

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx$$

לאופרטור זה אין פונקציות עצמיות ב L^2 , אולם יש לו מעין פונקציות עצמיות, שהן פונקציות הדלתא, $\delta(x - x_0)$, שכן, בגלל אופי ההתנהגות שלהן תחת אינטגרציה, לכל $f(x)$ רציפה מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - x_0) f(x) dx = x_0 f(x_0)$$

ולכן, ניתן לכתוב (בערך)

$$x \delta(x - x_0) = x_0 \delta(x - x_0)$$

ולהתייחס ל $\delta(x - x_0)$ כפונקציה עצמית של האופרטור x עם ערך עצמי x_0 . אם מצב החלקיק נתון ע"י פונקציה הגל $\psi(x)$, היטל פונקציה זו על המצב העצמי של האופרטור x נתון ע"י

$$\langle x_0 | \psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \psi(x) dx = \psi(x_0)$$

ולכן צפיפות ההסתברות למצוא את החלקיק בנקודה x_0 נתונה ע"י

$$f(x_0) = \psi(x_0)\psi^*(x_0) = |\psi(x_0)|^2$$

וההסתברות להמצא בקטע $[a, b]$ היא

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \psi(x)\psi^*(x)dx$$

בשלושה ממדים נגדיר בצורה דומה אופרטורים y ו z עבור קואורדינטות y ו z של המיקום. שימו לב כי (כיון שהאופרטור הוא פשוט כפל בקואורדינטה)

$$[x, y] = [x, z] = [y, z] = 0$$

כלומר, אופרטורי המיקום בצירים שונים הם קומוטטיבים. אופרטור התנע יוגדר ע"י

$$p_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

וכדומה עבור p_y ו p_z . $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} J \cdot s$ נקרא קבוע פלאנק, והוא קובע את גודלם של האפקטים הקוונטיים. העובדה ש $\hbar$ מאד קטן היא הגורמת לכך שאפקטים קוונטיים כמעט אינם מורגשים בקנה המידה היומיומי. אופרטור התנע הכללי בשלושה ממדים יהיה

$$P = -i\hbar \nabla$$

לתנע פונקציות עצמיות¹

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

ומתקיים

$$p_x \psi_k(x) = \hbar k \psi_k(x)$$

כלומר, הערך העצמי המתאים לפונקציה זו הוא התנע $\hbar k$. המקדם $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ הוא המקדם עבור הגרסה הסימטרית של טרנספורם פוריה. גרסה זו מקיימת

$$\langle \psi_{k'} | \psi_k \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik'x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} dx = \delta(k - k')$$

נסמן

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

¹שימו לב שגם פונקציות עצמיות אלה אינן ב L^2 . זה נובע מכך שגם אופרטור התנע הוא בעייתי (אינו חסום).

אם נתייחס למצב כלשהו $|\psi\rangle$ כמצב מופשט, נגדיר את **הצגת המיקום** של ψ בתור

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\psi(x')dx'$$

ואת הצגת התנע של ψ בתור

$$\psi(k) = \langle k|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx'} \psi(x') dx'$$

צפיפות ההסתברות להיות בתנע k היא

$$f(k) = \psi(k)\psi^*(k) = |\langle k|\psi\rangle|^2$$

ולפי משפט פרסבל אכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(k)|^2 dk$$

לפי משוואה 6.4

$$[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar$$

כלומר, מדידת המיקום והתנע באותה קואורדינטה אינן קומוטטיביות. לעומת זאת

$$[x, p_y] = [x, p_z] = \dots = 0$$

כלומר מדידת המיקום והתנע בקואורדינטות שונות הן קומוטטיביות. אם נסמן $r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$, $p_1 = p_x$ וכו' נוכל לקצר:

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}$$

7.2.2 עקרון אי הוודאות

לאופרטורי התנע יש משמעות מיוחדת יחסית למיקום. לשם הפשטות נקבע $\hbar = 1$. נשים לב כי

$$(1 + i\epsilon p_x) \psi(x) = \left(1 + \epsilon \frac{d}{dx}\right) \psi(x) = \psi(x + \epsilon) + o(\epsilon)$$

(בדקו ע"פ פיתוח לטור של $\psi(x + \epsilon)$). כלומר, p_x הוא היוצר של הזזה בציר x (שמאלה). בעזרת המפה האקספוננציאלית נקבל

$$\begin{aligned} e^{iap_x} \psi(x) &= e^{a \frac{d}{dx}} \psi(x) \\ &= \left(1 + a \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} a^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{3!} a^3 \frac{d^3}{dx^3} + \dots\right) \psi(x) \\ &= \psi(x) + a\psi'(x) + \frac{a^2}{2} \psi''(x) + \frac{a^3}{3!} \psi^{(3)}(x) + \dots \\ &= \psi(x + a) \end{aligned}$$

כלומר, האופרטור e^{iap_x} מזיז את הפונקציה מרחק a שמאלה בציר x . אופרטורים שהקומוטטור שלהם קבוע מקיימים יחס מיוחד, הנובע מהעובדה שניתן לראות אחד מהם כיוצר של הזזה בשני:

משפט 12 (עקרון אי הודאות)

לכל שני אופרטורים הרמיטיים, A ו- B מתקיים

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

הוכחה. עבור מצב כללי $|\psi\rangle$ נסמן

$$\langle AB \rangle = \langle \psi | AB | \psi \rangle$$

A ו- B הרמיטיים ולכן

$$\langle \psi | AB | \psi \rangle^\dagger = \langle \psi | BA | \psi \rangle$$

ומכאן

$$\Re \langle AB \rangle - i \Im \langle AB \rangle = \Re \langle BA \rangle + i \Im \langle BA \rangle$$

כלומר

$$\begin{aligned} \Re \langle AB \rangle &= \Re \langle BA \rangle \\ \Im \langle AB \rangle &= -\Im \langle BA \rangle \end{aligned}$$

כלומר

$$\Im \langle AB \rangle = \frac{1}{2i} \langle AB - BA \rangle$$

לפי אי-שוויון קושי שורץ נקבל

$$\langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle \langle \psi | B^\dagger B | \psi \rangle = \|A|\psi\rangle\|^2 \|B|\psi\rangle\|^2 \geq \|\langle \psi | AB | \psi \rangle\|^2$$

אבל,

$$|\langle \psi | AB | \psi \rangle|^2 \geq |\Im \langle \psi | AB | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2i} \langle \psi | AB - BA | \psi \rangle \right|^2$$

ולכן,

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

□

עבור האופרטורים x ו- p_x מתקיים

$$[x, p_x] = i\hbar$$

וגם

$$[x - \langle x \rangle, p_x - \langle p_x \rangle] = i\hbar$$

ולכן

$$Var(x)Var(p_x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

ומסמנים

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

כאשר Δx מסמן את סטיית התקן של ערכי x האפשריים וכן"ל עבור p_x . זהו עקרון אי הוודאות המפורסם.

7.2.3 משוואת שרדינגר

כאמור באקסיומה 7.1.2, ההתפתחות של מצב קוונטי בזמן נתונה ע"י אופרטור יוניטרי. במכניקת הקוונטים הלא יחסותית של חלקיק אחד, התפתחות זו מתוארת ע"י משוואת שרדינגר:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\Psi$$

כאשר Ψ הוא המצב הקוונטי ו- H הוא אופרטור הרמיטי המכונה ההמילטוניאן הקוונטי. אין תשובה ידועה לשאלה כיצד בוחרים את ההמילטוניאן הקוונטי.² הדרך המקובלת היא להתחיל מההמילטוניאן הקלאסי ולהחליף את המשתנים הדינמיים (x, p) (וכו') באופרטורים המתאימים. תהליך זה נקרא קוונטיזציה קנונית. כאן יש מספר בעיות:

- מסתבר כי, למרות שניתן לכתוב את ההמילטוניאן הקלאסי בכל מערכת קואורדינטות מוכללות ולקבל את אותה ההתנהגות הפיסיקלית, בחירה של קואורדינטות שונות בהמילטוניאן הקוונטי תשנה את התנהגות המערכת, כך שההתנהגות הנכונה תתקבל רק עבור בחירה מסוימת של הקואורדינטות.
- בניגוד למשתנים הדינמיים, בכתיבת אופרטורים יש חשיבות לסדר. יש לשמור על סדר שיתיר את H הרמיטי. לדוגמה xp איננו אופרטור הרמיטי (בדקו!), אך $(xp + px)/2$ הוא הרמיטי.
- גם אם שומרים על הרמיטיות של H , לעיתים קיימת יותר מבחירה אחת לסדר האופרטורים. לדוגמה x^2p^2 אינו הרמיטי, אך x^2p^2, px^2p, xp^2x וכן $(xpxp + pxpx)/2$ כל צרוף לינארי שלהם הוא הרמיטי (בדקו).

למרות האמור לעיל, תורת הקוונטים יושמה עבור בעיות רבות ובדיוק רב. בדוגמאות שיובאו להלן, נשתמש בהמילטוניאן בקואורדינטות קרטזיות ונהפוך אותו לקוונטי. באופן כללי, צורת ההמילטוניאן בקואורדינטות קרטזיות היא

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

²ישנן תורות פיסיקליות שהן קוונטיות מיסודן. שם בעיה זו אינה קיימת.

כאשר $V(x)$ הוא הפוטנציאל. נציב את האופרטור $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ הקוונטי ונקבל את משוואת שרדינגר. בממד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t)$$

ובשלושה ממדים:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t)$$

כאשר נדרוש ש Ψ גזירה פעמיים ב x .

ניתן לכתוב את משוואת שרדינגר בצורה

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle$$

והצמוד שלה:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi| = \langle \Psi| H^\dagger = \langle \Psi| H$$

ולכן,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \Psi \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \right) | \Psi \rangle + \langle \Psi | \left(\frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle \right) = \frac{1}{i\hbar} (\langle \Psi | H | \Psi \rangle - \langle \Psi | H | \Psi \rangle) = 0$$

כלומר, ההתפתחות בזמן יוניטרית - סכום ההסתברויות נותר 1. נשים לב כי אם $|u\rangle$ מצב עצמי של ההמילטוניאן, כלומר,

$$H |u\rangle = E |u\rangle$$

כאשר E מספר, המתאר את האנרגיה של המערכת, אזי ההתפתחות בזמן תהיה

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |u\rangle = H |u\rangle = E |u\rangle$$

ופתרונה הוא

$$|u(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} |u\rangle$$

כל מצב ניתן לכתיבה כסכום של מצבים כאלה (שכן המצבים העצמיים של האופרטור ההרמיטי H מהווים בסיס למרחב הילברט). אם נסמן את המצבים העצמיים של ההמילטוניאן ב $|u_j\rangle$ ואת ערכי האנרגיה המתאימים ב E_j אזי

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j c_j e^{-iE_j t/\hbar} |u_j\rangle$$

כאשר את המקדמים c_j ניתן למצוא על פי פונקצית הגל בזמן $t = 0$. לכן, כל המידע על התנהגות פונקצית הגל בזמן ניתן ע"י המצבים העצמיים של ההמילטוניאן, שהם פתרונות המשוואה

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = E \Psi(\vec{r}, t)$$

משוואה זו נקראת לעיתים "משוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן" (בניגוד למשוואת שרדינגר הרגילה, הנקראת "משוואת שרדינגר התלויה בזמן"). לרוב לא עבור ערך של E קיים פתרון למשוואה העומד בתנאים ($\Psi \in L^2$). הערכים עבורם יש פתרון כזה נקראים ערכי האנרגיה המותרים. במדידה ניסויית של האנרגיה, תמיד יתקבל אחד הערכים האלה.

7.2.4 בור פוטנציאל

בור פוטנציאל אינסופי

הדוגמה המעניינת הפשוטה ביותר לפתרון משוואת שרדינגר היא בור פוטנציאל אינסופי חד-ממדי. בבור פוטנציאל כזה הפוטנציאל הוא:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x \geq a \vee x \leq 0 \end{cases}$$

(האזור $|x| < a$ נקרא בור - מסיבות מובנות).
מפתרון משוואת שרדינגר נדרוש כי $\Psi(x) = 0$ עבור $x \geq a$ ועבור $x \leq 0$. בתחום $0 < x < a$ נקבל את המשוואה

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \Psi(x)$$

שפתרונה הוא

$$\Psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

כאשר

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

כיון שדרשנו $\Psi(x) = 0$ עבור $x \geq a$ ועבור $x \leq 0$, מרציפות הפונקציה נובע כי $A = 0$ וכן

$$ka = n\pi$$

כלומר

$$E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

עבור n ששלם חיובי ממש. לכן, קיימים פתרונות רק עבור ערכי n אלה. שימו לב כי המשמעות היא שחלקיק בבור פוטנציאל אינו יכול לקבל כל ערך לאנרגיה אלא רק ערכים מסויימים.

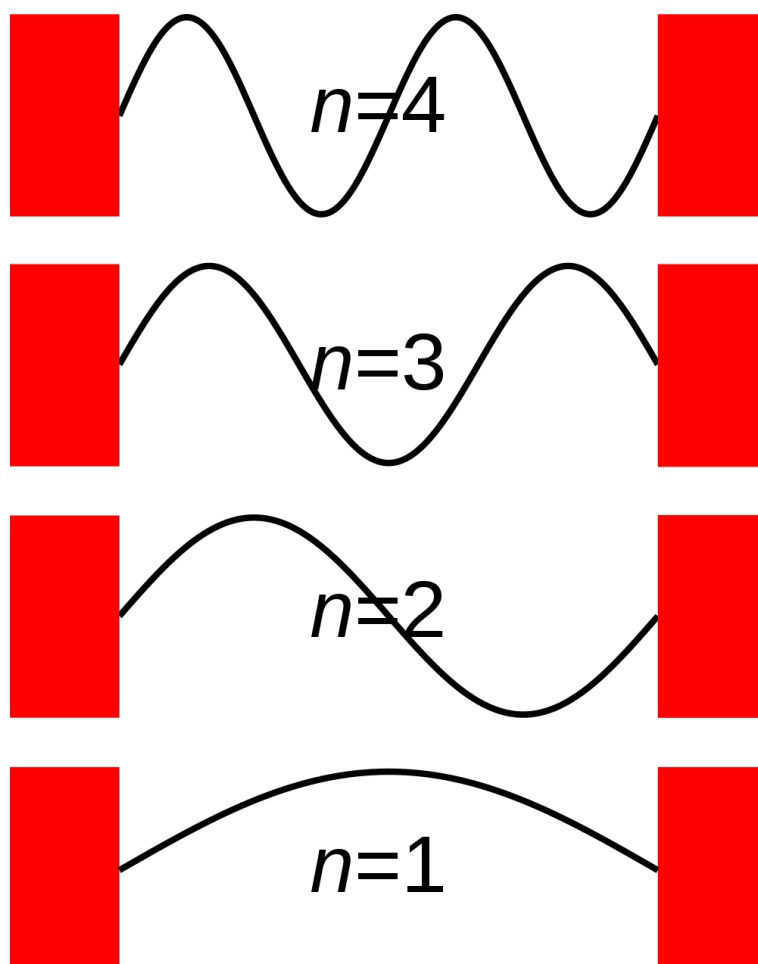
שימו לב עוד, כי הנגזרת אינה רציפה בנקודות 0 ו a , ולכן הנגזרת השניה אינה מוגדרת שם. זה המחיר ששילמנו על הכנסת פוטנציאל אינסופי לבעיה.

בור פוטנציאל סופי

במקרה זה הפוטנציאל מחוץ לבור אינו אינסופי אלא בעל גודל סופי V , כלומר³

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ V & |x| \geq a \end{cases}$$

³נשתמש כאן בבור סימטרי סביב האפס שכן כתיבת הפתרון פשוטה יותר במקרה זה.



איור 7.1: מצבים שונים של חלקיק בבור פוטנציאל אינסופי. המלבנים האדומים מציינים את קצות הבור והקו השחור את פונקציית הגל.

כאשר נגביל את עצמנו למקרה $E < V$ ⁴.
נחפש שוב פתרון למשוואת שרדינגר

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x) - V(x)\Psi(x)$$

כאשר הפעם יש לחלק את המרחב לשלושה תחומים. בתחום המרכזי $|x| < a$ נפתור את המשוואה

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_{II}(x)}{dx^2} = E\Psi_{II}(x)$$

ונקבל, כמו קודם

$$\Psi_{II}(x) = A_{II} \cos(kx) + B_{II} \sin(kx)$$

כאשר

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

בתחום $x \leq -a$ המשוואה היא

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_I(x)}{dx^2} + V\Psi_I(x) = E\Psi_I(x)$$

ופתרונה

$$\Psi_I(x) = A_I \exp(\alpha x) + B_I \exp(-\alpha x)$$

כאשר

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$$

כיון שתחום זה כולל את $x \rightarrow -\infty$ ואנו דורשים פתרון ניתן לנירמול, חייבים לקחת $B_I = 0$.
כלומר

$$\Psi_I(x) = A_I \exp(\alpha x)$$

הפתרון בתחום $x \geq a$ זהה לתחום $x \leq -a$,

$$\Psi_{III}(x) = A_{III} \exp(\alpha x) + B_{III} \exp(-\alpha x)$$

כאשר הפעם $A_{III} = 0$, כלומר

$$\Psi_{III}(x) = B_{III} \exp(-\alpha x)$$

⁴במקרה $E > V$ נקבל פתרון של "גלים חופשיים" שאינו ב- L^2 ולא נדון בו כאן.

נדרוש עתה כי בתפר בין התחומים נקבל שהפונקציה רציפה. בנקודה $x = -a$:

$$A_I \exp(-\alpha a) = A_{II} \cos(-ka) + B_{II} \sin(-ka) \quad (7.1)$$

ובנקודה $x = a$

$$B_{III} \exp(-\alpha a) = A_{II} \cos(ka) + B_{II} \sin(ka) \quad (7.2)$$

וכן, שהנגזרת רציפה. בנקודה $x = -a$

$$\alpha A_I \exp(-\alpha a) = -A_{II} k \sin(-ka) + B_{II} k \cos(-ka) \quad (7.3)$$

ובנקודה

$$-\alpha B_{III} \exp(-\alpha a) = -A_{II} k \sin(ka) + B_{II} k \cos(ka) \quad (7.4)$$

קיבלנו ארבע משוואות לינאריות הומוגניות בארבעה נעלמים $(A_I, B_{II}, A_{II}, B_{III})$. למשוואות אלה תמיד קיים הפתרון הטריטיואלי

$$A_I = A_{II} = B_{II} = A_{III} = 0$$

אולם פתרון זה נותן פונקציה גל המתאפסת זהותית. כדי שיהיה פתרון פיסיקלי לבעיה נדרוש שהמשוואות תלויות. כלומר,

$$\begin{vmatrix} -\exp(-\alpha a) & \cos(-ka) & \sin(-ka) & -\exp(-\alpha a) \\ -\alpha \exp(-\alpha a) & -k \sin(-ka) & k \cos(-ka) & \alpha \exp(-\alpha a) \\ \cos(ka) & \sin(ka) & & \\ -k \sin(ka) & k \cos(ka) & & \end{vmatrix} = 0$$

כשנציב $k = k(E)$ ו $\alpha = \alpha(E)$ נקבל משוואה טרנסנדנטית על E . רק לערכי E הפותרים את המשוואה קיימת פונקציה עצמית מתאימה. כלומר, גם כאן קיבלנו ערכי אנרגיה דיסקרטיים. פונקציות הגל המתאימות ניתנות ע"י פתרון המשוואות 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, כאשר ניתן להוסיף להן את תנאי הנרמול

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

המהווה משוואה לא לינארית ולא הומוגנית ולכן מאפשר לקבוע חד ערכית (עד כדי פאזה) את ערכי המקדמים.

7.2.5 אוסילטור הרמוני קוונטי

עבור אוסילטור הרמוני חד-ממדי משוואת שרדינגר היא

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{kx^2}{2} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

נציב את תדירות האוסילטור הקלאסי $\omega^2 = k/m$ ונקבל:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

אם ננחש פתרון מהצורה

$$\Psi = e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} u(x)$$

ונציב במשוואה, וכן, נגדיר את המשתנים

$$\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}, \quad y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

נקבל

$$u'' - 2yu' + (2\varepsilon - 1)u = 0 \quad (7.5)$$

כאשר הגזירה היא לפי המשתנה y .
משוואה 7.5 היא משוואת הרמיט. פתרונה הוא הטורים,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$$

שמקדמיהם מקיימים את יחס הרקורסיה

$$c_{n+2} = c_n \frac{2n+1-2\varepsilon}{(n+1)(n+2)}$$

כאשר $n \rightarrow \infty$ המקדמים מתנהגים כמו

$$c_n \sim \frac{2^{n/2}}{n!!}$$

עבור y גדול, אם כן, הטור מתנהג כמו

$$u \sim e^{y^2} = e^{\frac{m\omega x^2}{\hbar}}$$

ולכן

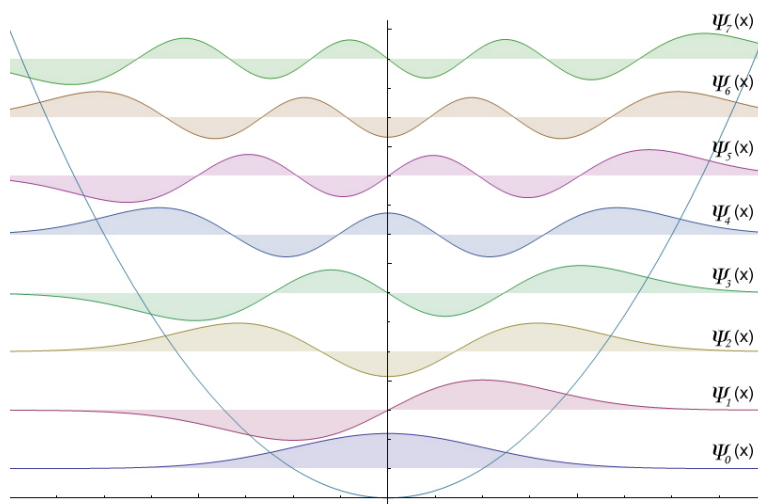
$$\Psi \sim e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

כלומר Ψ לא שואף לאפס כאשר $x \rightarrow \infty$ ולכן גם לא ניתן לנרמול. לפיכך המקרים היחידים בהם הטור ניתן לנרמול הם כאשר אחד המקדמים מתאפס, ולכן גם כל הבאים אחריו. זה קורה כאשר $2n+1-2\varepsilon=0$ עבור n כלשהו כלומר

$$\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega} = n + \frac{1}{2}$$

כלומר רמות האנרגיה המותרות הן

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$



איור 7.2: המצבים $n = 1, 2, \dots, 7$ של אוסילטור הרמוני קוונטי. הפרבולה מסמלת את הפוטנציאל.

עבור n שלם אי-שלילי.
הפולינומים המתקבלים הם פולינומי הרמיט

$$u(y) = H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

הפתרונות הכלליים, כולל הנרמול הם

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$$

אופרטורי יצירה והריסה

קיימת שיטה נוספת לפתרון בעית האוסילטור ההרמוני הקוונטי. נתחיל ממשוואת שרדינגר,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{kx^2}{2} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

נגדיר $\omega^2 = k/m$ ונקבל

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

נגדיר עתה את האופרטור

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$$

(כאשר p הוא אופרטור התנע $(-i\hbar \frac{d}{dx})$, ואת הצמוד ההרמיטי שלו

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right)$$

ניתן לכתוב

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a)$$

וכן

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$

ניתן לכתוב את ההמילטוניאן בצורה (בדקו!)

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

נשים לב כי

$$\langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = \|a | \Psi \rangle\|^2 \geq 0$$

ולכן

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

כמו כן, (בדקו!)

$$[a, a^\dagger] = 1$$

נגדיר

$$N = a^\dagger a$$

מתקיים

$$[N, a] = a^\dagger a a - a a^\dagger a = (a^\dagger a - a a^\dagger) a = -a$$

ובאופן דומה

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger$$

לכן, אם $|n\rangle$ מצב עצמי של האופרטור N עם ערך עצמי n אזי הוא גם מצב עצמי של ההמילטוניאן, עם ערך עצמי $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. נקבל

$$Na |n\rangle = aN |n\rangle + [N, a] |n\rangle = an |n\rangle - a |n\rangle = (n-1) a |n\rangle$$

כלומר גם $a|n\rangle$ מצב עצמי של N , עם ערך עצמי $n-1$ (או שמתקיים $a|n\rangle = 0$). באופן דומה, גם $a^\dagger|n\rangle$ מצב עצמי של N עם ערך עצמי $n+1$. מסיבה זו, האופרטורים a ו- $a^\dagger$ נקראים אופרטורי העלאה והורדה בהתאמה, ולעיתים גם אופרטורי יצירה והריסה. האופרטור N נקרא אופרטור המספר.

כיון ש- N אופרטור חיובי לא יתכן שנקבל מצב עם ערך עצמי שלילי. אם נפעיל a מספיק פעמים על מצב הערך העצמי שלו ירד עוד ועוד. בסופו של דבר חייבים לקבל מצב כלשהו (שנסמן ב- $|0\rangle$) שעבורו

$$a|0\rangle = 0$$

(שימו לב ש- 0 הוא וקטור האפס, ואילו $|0\rangle$ הוא מצב שאינו וקטור האפס). עבור מצב זה

$$N|0\rangle = a^\dagger a|0\rangle = 0 = 0|0\rangle$$

לכן, זהו מצב עצמי של N עם ערך עצמי 0 .
עתה, ניתן להגדיר מצבים נוספים ע"י $|1\rangle = c_1 a^\dagger|0\rangle$, $|2\rangle = c_2 (a^\dagger)^2|0\rangle$ ובאופן כללי

$$|n\rangle = c_n (a^\dagger)^n|0\rangle$$

כאשר c_n הם קבועי נרמול והערך העצמי של מצב $|n\rangle$ הוא המספר n . לא יתכנו מצבים עצמיים עם ערכים עצמיים לא שלמים, שכן, אחרי הפעלת האופרטור a מספר סופי של פעמים הם חייבים להגיע לוקטור האפס, ואם כן, בצעד לפני כן האופרטור N ייתן 0 . אולם בכל הפעלה של a הערך העצמי יורד באחד, כך שהערך העצמי המקורי חייב להיות שלם. לכן, הערכים המותרים של האנרגיה הם

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$[a, (a^\dagger)^n] = n (a^\dagger)^{n-1} \quad \text{טענה:}$$

הוכחה. נראה באינדוקציה:

עבור $n = 1$ נקבל $[a, a^\dagger] = 1$ כפי שראינו למעלה.

נניח שהביטוי נכון עבור n . צ"ל: $[a, (a^\dagger)^{n+1}] = (n+1) (a^\dagger)^n$. אבל

$$\begin{aligned} [a, (a^\dagger)^{n+1}] &= a (a^\dagger)^{n+1} - (a^\dagger)^{n+1} a \\ &= \sum_{m=0}^n \left((a^\dagger)^m a (a^\dagger)^{n+1-m} - (a^\dagger)^{m+1} a (a^\dagger)^{n-m} \right) \\ &= \sum_{m=0}^n \left((a^\dagger)^m [a, a^\dagger] (a^\dagger)^{n-m} \right) \\ &= \sum_{m=0}^n \left((a^\dagger)^m \cdot 1 \cdot (a^\dagger)^{n-m} \right) \\ &= (n+1) (a^\dagger)^n \end{aligned}$$

□

אם נניח שהמצב $|n\rangle$ מנורמל, נקבל כי

$$\|a^\dagger |n\rangle\|^2 = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle + \langle n|[a, a^\dagger]|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle + 1$$

בהצבת $n = 0$ נקבל . מהטענה נובע כי $\|a^\dagger |0\rangle\|^2 = 1$ ומכאן קל לראות (ולהוכיח באינדוקציה): $\|a^\dagger |n\rangle\|^2 = n + 1$. תמיד ניתן לבחור את הפאזה כך שהמקדמים יהיו ממשיים. לכן נבחר את הנירמול c_n כך ש $\sqrt{n}c_n = c_{n-1}$. כלומר,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

ולכן

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$$

המטריצות (האינסופיות) אם כן יהיו:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \\ & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\ & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את מצב היסוד (המצב עם האנרגיה הנמוכה ביותר) של אוסילטור הרמוני, נפתור את המשוואה $\Psi_0 \equiv |0\rangle$

$$a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} - \left(i\hbar \frac{d}{dx} \right) \right) \Psi_0(x) = 0$$

ונקבל

$$\frac{d\Psi_0}{dx} = -\frac{m\omega x}{\hbar} \Psi_0$$

שפתרונה

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

כלומר פונקצית הגל במצב היסוד היא גאוסין (כשהמקדם מיועד לנרמול). נוכל עתה למצוא את הפונקציות העצמיות האחרות ע"י הפעלה חוזרת של האופרטור הדיפרנציאלי $a^\dagger$:

$$\Psi_n = c_n (a^\dagger)^n \Psi_0$$

7.3 תנע זוויתי

לצורך הפשטות נעבוד מעתה ואילך ביחידות בהן $\hbar = 1$ (כלומר, אנרגיה תמדד ביחידות של תדירות).

כזכור במכניקה קלאסית, הגדרנו את התנע הזוויתי באופן

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

או, לפי רכיבים

$$L_x = yp_z - zp_y \quad (7.6)$$

$$L_y = zp_x - xp_z \quad (7.7)$$

$$L_z = xp_y - yp_x \quad (7.8)$$

לפי הגדרת אופרטורי התנע הקוונטיים

$$(1 + i\epsilon L_z) \psi(x, y, z) = \left(1 + \epsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \psi(x, y, z) = \psi(x - \epsilon y, y + \epsilon x, z) + o(\epsilon)$$

(פתחו לפי טור טיילור את האיבר האחרון!) ומכאן iL_z הוא היוצר האינפיניטיסימלי של סיבובים סביב ציר z . לפי המפה האקספוננציאלית

$$e^{i\theta L_z} \psi(x, y, z) = \psi(x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta, z)$$

כלומר $e^{i\theta L_z}$ הוא סיבוב בזווית θ סביב ציר z . ובאופן כללי, אם $\hat{n}$ וקטור יחידה

$$e^{i\theta \hat{n} \cdot \vec{L}} \equiv e^{i\theta \hat{n}_x \cdot L_x + \hat{n}_y \cdot L_y + \hat{n}_z \cdot L_z}$$

הוא סיבוב בזווית θ סביב ציר $\hat{n}$.

L_x, L_y, L_z הם, אם כן, היוצרים האינפיניטיסימליים של חבורת הסיבובים ב-3 ממדים, $SO(3)$.

7.3.1 הצגות של חבורות ואלגברות לי

הצגה של חבורה היא הומומורפיזם מהחבורה לחבורת האוטומורפיזמים של מרחב וקטורי.

בעברית, ואם נגביל את עצמנו לממד סופי ולמרחבי הילברט מעל $\mathbb{C}$: הצגה של חבורה G היא פונקציה $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ עבור n כלשהו, המקיימת

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

לכל $g_1, g_2 \in G$.

באופן דומה, הצגה של אלגברת לי A היא פונקציה $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ המקיימת

$$\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

וכן

$$\varphi([a_1, a_2]) = [\varphi(a_1), \varphi(a_2)] \equiv \varphi(a_1)\varphi(a_2) - \varphi(a_2)\varphi(a_1)$$

הצגה תיקרא פריקה אם יש לכל המטריצות בה תת מרחב אינווריאנטי משותף. כלומר, קיים בסיס בו כל המטריצות מתפרקות לצורה

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

כאשר A מטריצה $m \times m$, B מטריצה $(n-m) \times (n-m)$ והאפסים מייצגים בלוקים של אפסים. הצגה שאיננה פריקה תקרא "לא פריקה" (irreducible). קיימת תאוריה עשירה של תכונות הצגות לא פריקות של חבורות ואלגברות, ולה השלכות רבות במכניקת הקוונטים.

7.3.2 הצגות התנע הזוויתי

נזכור כי

$$[r_l, p_m] = i\delta_{l,m}$$

כאשר $l, m = 1, 2, 3$ המסמנים את הכיוון x, y או z בהתאמה. נקבל אם כן (בדקו!)

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= iL_z \\ [L_y, L_z] &= iL_x \\ [L_z, L_x] &= iL_y \end{aligned}$$

רואים, כי במכניקת הקוונטים כל שניים משלושת הגדלים האלה אינם קומוטטיביים (באופן כללי), ולכן, אם יודעים בוודאות אתערכו של אחד מהם, לא ניתן לדעת בוודאות את ערכי האחרים. כמו כן, שימו לב לסגירות האלגברה הנוצרת ע"י רכיבי התנע הזוויתי ופעולת הקומוטטור.

נגדיר את אופרטור התנע הזוויתי הכולל בריבוע,⁵

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

נשים לב כי L^2 סכום ריבועים של אופרטורים הרמיטיים, ולכן כל הערכים העצמיים שלו ממשיים אי שליליים. ניתן לראות כי (בדקו!)

$$[L_x, L^2] = [L_y, L^2] = [L_z, L^2] = 0$$

⁵ אין להתבלבל בין האופרטור L^2 לבין מרחב L^2 בו לא נדון כלל בסעיף זה.

כלומר, ניתן לדעת בו זמנית את ערכו של אחד הרכיבים ואת התנע הזוויתי הכולל. אופרטור ריבועי המתחלף עם כל אחד מהיוצרים באלגברת לי נקרא אופרטור קזימיר (Casimir operator).
כיון ש

$$[L_z, L^2]$$

קיים בסיס של וקטורים עצמיים משותפים של L_z ו L^2 . נסמן את וקטורי הבסיס הזה ב $|l, m\rangle$ כאשר $L_z |l, m\rangle = \lambda_m |l, m\rangle$ וכן $L^2 |l, m\rangle = \mu_l |l, m\rangle$.

משפט 13 (הצגות התנע הזוויתי) לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת הצגה לא פריקה של האלגברה הנוצרת ע"י L_x, L_y, L_z . כל וקטור במרחב הילברט המתאים להצגה זו יקיים $L^2 |v\rangle = l(l+1) |v\rangle$ כאשר $l = (n-1)/2$ (כלומר l שלם או חצי שלם אי שלילי). כמו כן, ניתן לבחור את הבסיס למרחב הוקטורי המתאים להצגה זו כך שוקטורי הבסיס יהיו $|v_m\rangle$ עבור $m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$.⁶ $L_z |v_m\rangle = m |v_m\rangle$ כאשר

הוכחה. נגדיר את האופרטורים

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y \\ L_- &= L_x - iL_y \end{aligned}$$

מתקיים

$$L_+ = L_-^\dagger$$

אופרטורים אלה נקראים אופרטורי הסולם של התנע הזוויתי. נשים לב כי

$$[L_+, L^2] = [L_-, L^2] = 0$$

כמו כן (בדקו!),

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_z^2 + L_+ L_- - L_z = L_z^2 + L_- L_+ + L_z \quad (7.9)$$

וכן

$$[L_z, L_+] = [L_z, L_x] + i[L_z, L_y] = iL_y + L_x = L_+$$

ומכאן

$$L_z L_+ = L_+ L_z + L_+$$

וכן

$$[L_z, L_-] = [L_z, L_x] - i[L_z, L_y] = iL_y - L_x = -L_-$$

ולכן

$$L_z L_- = L_- L_z - L_-$$

⁶שימו לב שאנו משתמשים ב L_x, L_y, L_z הן כיוצרים של האלגברה והן כהצגה (המטריציונית) של היוצרים. למעשה, ניתן לעבור מיידית למטריצות של ההצגה ולראות כל מקום שבו מופיעים L_x, L_y, L_z כאילו נכתב בו $\varphi(L_x), \varphi(L_y), \varphi(L_z)$.

נתבונן עתה במצב $|l, m\rangle$

$$\begin{aligned} L_z L_+ |l, m\rangle &= L_+ L_z |l, m\rangle + L_+ |l, m\rangle \\ &= \lambda_m L_+ |l, m\rangle + L_+ |l, m\rangle \\ &= (\lambda_m + 1) L_+ |l, m\rangle \end{aligned} \quad (7.10)$$

מכאן, שאם $L_+ |l, m\rangle = 0$ או שגם $L_+ |l, m\rangle$ וקטור עצמי של L_z עם ערך עצמי $\lambda_m + 1$. נשתמש אם כן בתגיות $\lambda_m = m$, כלומר $L_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle$ (כאשר עדיין איננו יודעים מהם ערכי m המותרים⁷).

$$L^2 L_+ |l, m\rangle = L_+ L^2 |l, m\rangle = \mu_l L_+ |l, m\rangle$$

ומכאן של לא משתנה בהפעלת L_+ . לכן $L_+ |l, m\rangle = c_{lm} |l, m+1\rangle$ עבור קבוע כלשהו c_{lm} .

נניח עתה כי קיים מצב עם m' מקסימלי⁸, $|l, m'\rangle \neq 0$ שעבורו

$$L_+ |l, m'\rangle = 0$$

במצב זה

$$L^2 |l, m'\rangle = L_z^2 |l, m'\rangle + L_- L_+ |l, m'\rangle + L_z |l, m'\rangle = (m'^2 + 0 + m') |l, m'\rangle$$

ונסמן עבור אותו מצב $l = m'$. מכאן

$$L^2 |l, m'\rangle = l(l+1) |l, m'\rangle$$

באופן דומה למשוואה 7.10 נקבל

$$L_- |l, m\rangle = c'_{lm} |l, m-1\rangle$$

כאשר

$$c'_{l(m+1)} c_{lm} = \langle l, m | L_- L_+ |l, m\rangle = \langle L_+ l, m | L_+ |l, m\rangle = c_{lm}^* c_{lm}$$

כלומר אם $c_{lm} \neq 0$ אז $c'_{l(m+1)} = c_{lm}^*$. כמו כן,

$$L_- L_+ |l, m\rangle = (L^2 - L_z^2 - L_z) |l, m\rangle = (l(l+1) - m(m+1)) |l, m\rangle$$

$$L_+ L_- |l, m\rangle = (L^2 - L_z^2 + L_z) |l, m\rangle = (l(l+1) - m(m-1)) |l, m\rangle$$

7

□

הוכחה. למטה נראה שיש רק מצב אחד עם ע"ע m ולכן הסימון מוצדק.

⁸הנחה זו הכרחית כי אנו מעוניינים בהצגות במימד סופי.

ומכאן שעליה וירידה מחזירה אותנו לאותו מצב, ולכן בהצגה הנוכחית יש רק מצב אחד עבור כל m .

בהפעלת n פעמים L_- נקבל

$$L_-^n |l, m\rangle = C |l, m - n\rangle$$

7.9 נציב מצב כללי במשוואה

$$\begin{aligned} L^2 |l, m\rangle &= l(l+1) |l, m\rangle \\ &= (L_z^2 + L_+ L_- - L_z) |l, m\rangle \\ &= (m^2 + c_{l(m-1)} c'_{lm} - m) |l, m\rangle \end{aligned}$$

ומכאן

$$\begin{aligned} l(l+1) |l, m\rangle &= (m^2 + (c'_{lm})^* c'_{lm} - m) |l, m\rangle = (m(m-1) + (c'_{lm})^* c'_{lm}) |l, m\rangle \\ (7.11) \end{aligned}$$

ולכן $c'_{lm} = 0$ אם ורק אם $l(l+1) = m(m-1)$. למשוואה זו שני פתרונות $m = l+1$ ו- $m = -l$. עבור הפתרון הראשון נקבל

$$\begin{aligned} L^2 |l, l+1\rangle &= l(l+1) |l, l+1\rangle \\ &= (L_z^2 + L_- L_+ + L_z) |l, l+1\rangle \\ &= ((l+1)^2 + c_{l(l+1)}^* c_{l(l+1)} + (l+1)) |l, l+1\rangle \end{aligned}$$

אבל מצב זה לא ייתכן כי $c_{l(l+1)}^* c_{l(l+1)}$ לא יכול להיות שלילי. לכן $L_- |l, -l\rangle = 0$. אם נתחיל עכשיו מהמצב עם m מקסימלי, $m = l$, נקבל

$$L_-^n |l, l\rangle = C |l, l - n\rangle$$

עבור קבוע כלשהו C . קיים n עבורו

$$L_-^{n+1} |l, l\rangle = 0$$

לכן,

$$L_-^n |l, l\rangle = C |l, l - n\rangle = C |l, -l\rangle$$

כלומר $n = 2l$ ומכאן שלם או חצי שלם.

לכן, לכל $l \geq 0$ שלם או חצי שלם קיימים מצבים $l, l-1, \dots, -l, m$. עבור כל l מקבלים הצגה נפרדת של $SO(3)$, שכן L_+, L_-, L_z אינם משנים את l . כדי לראות שהצגה זו היא אי־פריקה נניח שקיים תת־מרחב אינווריאנטי לא טריויאלי, $S = \text{span}\{|v_1\rangle, \dots, |v_k\rangle\}$. הוא צירוף לינארי כלשהו של הוקטורים $|l, l\rangle, \dots, |l, -l\rangle$. ע"י הפעלה חוזרת של L_- על $|v_1\rangle$ נקבל את $|l, -l\rangle$ בלבד (שכן כל השאר ייתאפסו), לכן גם $|l, -l\rangle$ חלק מתת־המרחב האינווריאנטי. ע"י הפעלה חוזרת של L_+ ניתן להגיע לכל $|l, m\rangle$, ולכן כל תת־מרחב אינווריאנטי מכיל את $\text{span}\{|l, -l\rangle, \dots, |l, l\rangle\}$. ממשוואה 7.11 מקבלים

$$(c_{l(m-1)})^* c_{l(m-1)} = (c'_{lm})^* c'_{lm} = l(l+1) - m(m-1)$$

כלומר,

$$c_{lm}^* c_{lm} = l(l+1) - m(m+1)$$

משוואה זו מאפשרת לקבוע את c_{lm} עד כדי פאזה, ואכן יש חופש בבחירת הפאזה. אולם, מסתבר כי תמיד ניתן לבחור את c_{lm} להיות ממשי חיובי

$$c_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}$$

וע"י בחירה זו לקבל מטריצות מפורשות עבור $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$, $L_y = \frac{i}{2}(L_- - L_+)$ ו L_z . מהצורה בה בנינו אותן קל לראות כי המטריצות אכן מקיימות את יחסי הקומוטציה הנדרשים. מכאן שהצגה של האלגברה קיימת עבור כל מימד $n \equiv 2l+1$.⁹ □

נתבונן במצב בממדים שונים:
בבחירת בסיס בו L_z מלוכסנת נקבל:
עבור $l=0$ הצגה בממד 1:

$$L_x = L_y = L_z = (0)$$

עבור $l = \frac{1}{2}$ הצגה בממד 2:

$$L_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(מטריצות אלה, ללא המקדם $\frac{1}{2}$, נקראות מטריצות פאולי).
באופן כללי $l(l+1)$ מסמן את גודל התנע הזוויתי הכולל בריבוע, m מסמן את גודל רכיב התנע הזוויתי בכיוון z .
עבור $l = \frac{1}{2}$ נהוג לסמן את המצב $m = \frac{1}{2}$ up:

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והמצב $m = -\frac{1}{2}$ down:

$$|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שימו לב כי עבור ההצגה $l = \frac{1}{2}$ נקבל שהאופרטור עבור סיבוב בן 2π רדיאנים סביב ציר כלשהו (לדוגמה z) ייתן

$$e^{i2\pi \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

ורק סיבוב בזווית 4π יחזור למצב המקורי. תכונה זו נובעת מהטופולוגיה של חבורת הסיבובים, שבה קיימת לולאה מהראשית לראשית אשר איננה ניתנת לכיווץ לנקודה. אך, אם חוזרים על אותה לולאה פעמיים מקבלים לולאה טרייבאלית (הניתנת לכיווץ לנקודה).

⁹ניתן להוכיח (אם כי לא במסגרת קורס זה) שהצגות אלה הן כל ההצגות הלא פריקות של חבורה זו.

7.4 אטום המימן הקוונטי

באטום מימן אלקטרון ופרוטון. בתמונה הקאלסטית האלקטרון סובב סביב הפרוטון. למעשה, אנו יודעים היום כי שניהם מקיימים משוואת שרדינגר. הכח ביניהם הוא (בקירוב) משיכה אלקטרוסטטית (בין המטען החיובי של הפרוטון למטען השלילי של האלקטרון), אשר האנרגיה הפוטנציאלית שלו היא

$$U(\vec{r}_e, \vec{r}_p) = -\frac{C}{\|\vec{r}_e - \vec{r}_p\|}$$

כאשר C קבוע כלשהו ו $\vec{r}_p, \vec{r}_e$ הם מיקומי האלקטרון והפרוטון בהתאמה. ומשוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן היא

$$H\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_p) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_e^2\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_p) - \frac{\hbar^2}{2m_p}\nabla_p^2\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_p) - \frac{C}{\|\vec{r}_e - \vec{r}_p\|}\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_p) = E\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_p)$$

כאשר m_e מסת האלקטרון, m_p מסת הפרוטון ו ∇_e^2, ∇_p^2 הם הלפלסיאנים לפי הקואורדינטות של $\vec{r}_e$ ו $\vec{r}_p$ בהתאמה. שימו לב כי משוואה זו היא האנלוג הקוונטי של משוואת קפלר במכניקה קלאסית.

כדי לפתור את משוואת אטום המימן נעבור בתחילה לקואורדינטות מרכז המסה. נגדיר

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{m_e\vec{r}_e + m_p\vec{r}_p}{m_e + m_p} \\ \vec{r} &= \vec{r}_e - \vec{r}_p\end{aligned}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}\vec{r}_e &= \frac{M\vec{R} + m_p\vec{r}}{M} \\ \vec{r}_p &= \frac{M\vec{R} - m_e\vec{r}}{M}\end{aligned}$$

כאשר $M \equiv m_e + m_p$.
אם נסמן

$$\begin{aligned}\vec{R} &\equiv \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ \vec{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

נוכל לכתוב

$$\frac{\partial}{\partial x_e} = \frac{\partial X}{\partial x_e} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_e} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{m_e}{M} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}$$

ולכן

$$\frac{\partial^2}{\partial x_e^2} = \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{m_e}{M} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left(\frac{m_e}{M} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{m_e}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X}$$

וכן

$$\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} = \left(\frac{m_p}{M}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{m_p}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X}$$

אם נמשיך עבור קואורדינטות z, y ונציב בלפלסיאן נקבל משוואת שרדינגר בצורה (בדקו!)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \Psi(\vec{R}, \vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Psi(\vec{R}, \vec{r}) - \frac{C}{\|\vec{r}\|} \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E \Psi(\vec{R}, \vec{r})$$

כאשר $\mu \equiv (m_e^{-1} + m_p^{-1})^{-1}$ הם הלפלסיאנים לפי הקואורדינטות של $\vec{r}$ ו $\vec{R}$ בהתאמה.

עתה ניתן לבצע הפרדת משתנים. נניח כי ניתן לכתוב

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \Phi_R(\vec{R}) \psi(\vec{r})$$

ונקבל את המשוואות

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Phi_R(\vec{R}) = E_R \Phi_R(\vec{R}) \quad (7.12)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi(\vec{r}) - \frac{C}{\|\vec{r}\|} \psi(\vec{r}) = E_r \psi(\vec{r}) \quad (7.13)$$

כאשר $E = E_r + E_R$.

משוואה 7.12 היא משוואה של חלקיק חפשי, ללא פוטנציאל. היא מתארת תנועה בתנע קבוע של מרכז המסה. כמו בפתרון הקלאסי של משוואת קפלר, גם כאן המערכת כולה יכולה לנוע במהירות קבועה. נתעלם מכך ונניח כי אנו עובדים במערכת שבה מרכז המסה של האטום נייח.

כדי לפתור את משוואה 7.13 נעבור לקואורדינטות כדוריות, r, θ, φ . בקואורדינטות אלה, המשוואה מקבלת את הצורה

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{C}{r} \psi = E_r \psi$$

נשים לב כי φ אינה מופיעה מפורשות במשוואה. נפריד $\psi(r, \theta, \varphi) = \psi_1(r, \theta) \psi_2(\varphi)$ ונקבל

$$\frac{\sin^2 \theta}{\psi_1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{\psi_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} = -\frac{2r\mu E_r + C}{\hbar^2} r \sin^2 \theta$$

נשים לב כי המחובר השני בצד שמאל תלוי רק ב φ ואילו שאר המחוברים אינם תלויים כלל ב φ ולכן נקבל

$$\frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} = const$$

פתרון המשוואה צריך להיות ניתן לנרמול ומחזורי ב 2π ולכן נקבל שהפתרונות המותרים היחידים הם פתרונות המשוואה

$$\frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} = -m^2$$

כאשר הקבוע הוא ריבוע של מספר שלם $m \in \mathbb{Z}$. הפתרונות הם

$$\psi_2(\varphi) = e^{im\varphi}$$

נציב זאת במשוואה ונקבל

$$\frac{\sin^2 \theta}{\psi_1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{\psi_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - m^2 = -\frac{2r\mu E_r + C}{\hbar^2} r \sin^2 \theta$$

נפריד שוב: $\psi_1(r, \theta) = \psi_3(r)\psi_4(\theta)$ ונקבל

$$\frac{1}{\psi_3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{\psi_4 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_4}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -\frac{2r\mu E_r + C}{\hbar^2} r$$

ועבור שני המחוברים האמצעיים, שהם היחידים התלויים ב θ נקבל

$$\frac{1}{\psi_4 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_4}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \text{const}$$

אם מחליפים משתנים ל $y = \cos \theta$ ונקבל

$$\frac{1}{\psi_4} \frac{\partial}{\partial y} \left((1-y^2) \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \right) - m^2 = \text{const} \cdot (1-y^2)$$

זוהי משוואת לז'נדר המוכללת. יש לה פתרון הניתן לנרמול רק עבור קבוע השווה ל $-l(l+1)$ כאשר l שלם אי שלילי, $l \in \mathbb{N}_0$ וכן צריך להתקיים $l \geq |m|$. נקבל את המשוואה

$$\frac{1}{\psi_4} \frac{\partial}{\partial y} \left((1-y^2) \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \right) - m^2 = -l(l+1) \cdot (1-y^2)$$

שפתרונה הוא

$$\psi_4(y) = P_l^m(y) \equiv \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-y^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dy^{l+m}} [(y^2-1)^l]$$

הפתרון הכללי של החלק הזוויתי הוא, אם כן

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

חלק זה נכון לכל פוטנציאל שיש לו סימטריה כדורית, שכן לא השתמשנו בתלות ב r . שימו לב שקיבלנו שהחלק הזוויתי נקבע ע"י שני מספרים שלמים l, m , כאשר $-l \leq m \leq l$ והקבוע התלוי ב l הוא $l(l+1)$. זוהי בדיוק התוצאה שקיבלנו עבור התנע הזוויתי, שכן איברים אלה הם אכן התנע הזוויתי בקואורדינטות כדוריות. ההבדל היחיד מהמקרה הכללי הוא שכאן פתרונות עם l חצי שלם אינם אפשריים. זוהי תוצאה של העובדה שהמצב מתואר כאן ע"י פונקציה ב L^2 (המרחב, לא האופרטור) ופונקציות כאלה צריכות להיות מחזוריות ב 2π .¹⁰ הפונקציות Y_l^m נקראות spherical harmonics.

¹⁰למעשה, היה ניתן לעבוד גם עם פונקציות שאינן חד ערכיות – כלומר פונקציות עם מספר ענפים כמקובל במשתנה מרוכב. אולם פונקציות אלה מכילות גם סינגולריות, ואינן ניתנות לנרמול.

נעבור עתה לחלק הרדיאלי של המשוואה:

$$\frac{1}{\psi_3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) - l(l+1) = -\frac{2r\mu E_r + C}{\hbar^2} r$$

נעבור למשתנים חסרי יחידות

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \sqrt{\frac{8\mu |E_r|}{\hbar^2}} r \\ \lambda &\equiv \frac{C}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2|E_r|}} \end{aligned}$$

נכתוב את ψ_3 כפונקציה של ρ . המשוואה המתקבלת היא

$$\psi_3''(\rho) + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) \psi_3(\rho) = 0$$

אם ננחש פתרון מהצורה

$$\psi_3(\rho) = s(\rho) \rho^{l+1} e^{-\frac{\rho}{2}}$$

נקבל ש $s(\rho)$ ניתן לפיתוח לטור

$$s(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$$

כאשר מקדמי הטור מקיימים את המשוואה הבאה (בדקו!)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+l+1-\lambda}{(k+1)(k+2(l+1))}$$

כאשר $k \gg 1$ מקבלים

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \sim \frac{1}{k+1}$$

ולכן

$$a_k \sim \frac{c}{k!}$$

כלומר, עבור $\rho \gg 1$ הטור מתנהג כמו $s(\rho) \sim ce^\rho$ ולכן

$$\int_0^\infty \left| s(\rho) \rho^{l+1} e^{-\frac{\rho}{2}} \right|^2 \rho^2 d\rho = \infty$$

כלומר הפונקציה איננה ניתנת לנרמול. לכן, המצבים היחידים בהן הפונקציה ניתנת לנרמול הם המצבים בהם $s(\rho)$ הוא פולינום מדרגה סופית. זה יקרה רק אם $k+l+1-\lambda$ מתאפס עבור k שלם אי שלילי כלשהו. נגדיר $\lambda = n \geq l+1$ ונקבל

$$\frac{C}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2|E_r|}} = n$$

כלומר

$$E_n \equiv E_r(n) = -\frac{C^2 \mu}{2\hbar^2 n^2}$$

קיבלנו כי רמות האנרגיה הן דיסקרטיות. עבור כל n שלם מקבלים רמת אנרגיה. בנוסף, קיימות רמות אנרגיה רציפות עבור $E_n > 0$, אולם במצבים אלה האלקטרון "חפשי" – כלומר נע בחפשיות בקירוב ויכול להתרחק לאינסוף מהגרעין. עבור n כלשהו, אנרגית היינון היא הגודל $-E_n$, הדרוש כדי להעביר אלקטרון ממצב n למצב החפשי. את המרחקים בין רמות אנרגיה ניתן לראות בספקטרום הבליעה של האטום – כאשר מעבירים אור דרך גז, ומפזרים את האור דרך מנסרה, מקבלים שחלק מצבעי הקשת חסרים ובמקומם מופיע פס שחור. זה נקרא ספקטרום הבליעה של החומר, ובעזרתו ניתן לחקור את ההרכב הכימי של הגז. עבור גז מימן נקבל שפסי הבליעה יתאימו להפרשים בין שתי רמות אנרגיה $E_n - E_m$ עבור n ו- m שלמים.

עבור כל רמת אנרגיה E_n קיימים מצבים $l = 0, 1, \dots, n-1$ ולכל l קיימים $m = -l, -l+1, \dots, l$. בסה"כ עבור n מסויים מקבלים

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

מצבים שונים עם אותה האנרגיה (ניוון של n^2). בנוסף לניוון זה, לאלקטרון שני מצבים שונים של התנע הזוויתי הפנימי (שאינו מתואר ע"י משוואת שרדינגר) המכונים ספיין ופורסיס הצגה $l = \frac{1}{2}$ של התנע הזוויתי. בסה"כ ישנם $2n^2$ מצבים עם אנרגיה E_n . שימו לב, שבנוסף לניוון הצפוי של m , הנובע מהסימטריה הכדורית של הבעיה (שימור התנע הזוויתי), יש לנו כאן ניוון נוסף (שכן האנרגיה אינה תלויה גם ב- l). ניוון זה ייחודי לאטום המימן, וקשור לסימטריה הנוספת (שימור וקטור לפלס-רוגנה-לנץ) של בעיית קפלר הקלאסית. שימו לב גם, שכאן, בניגוד לבעיית קפלר הקלאסית, לא יכולנו להניח שהתנועה מוגבלת למישור בלבד, שכן עקרון אי הוודאות אוסר על הגבלת האלקטרון למישור בעובי אפס.

7.5 אי שיוויון בל

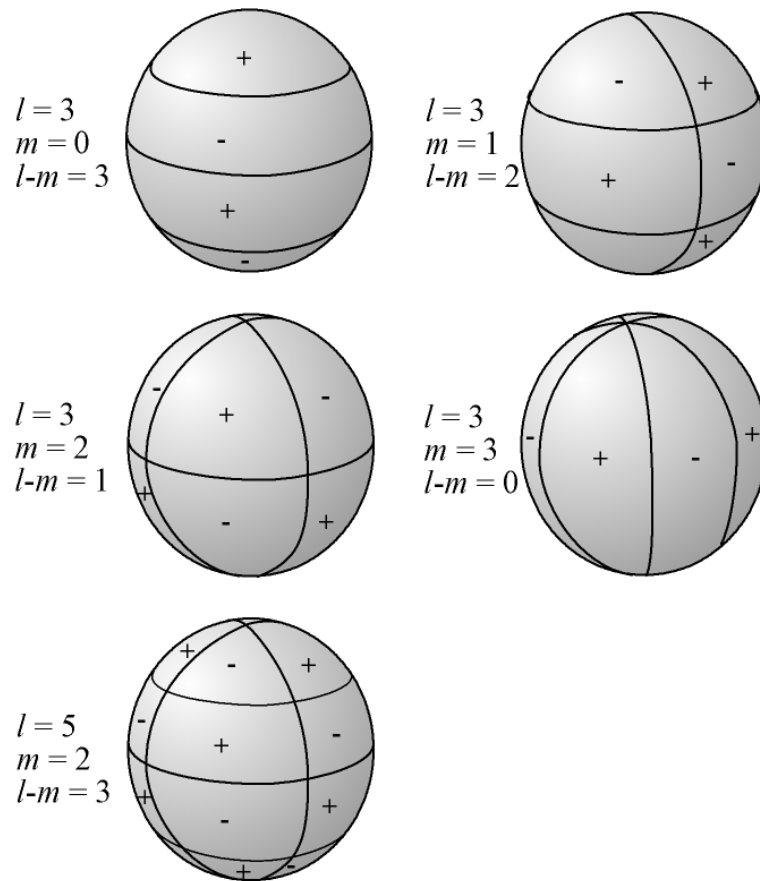
בטבע מערכות היוצרות זוגות חלקיקים במצבים שונים. ישנן מערכות היוצרות זוג חלקיקים, בעלי $l = \frac{1}{2}$ כל אחד, במצב המשותף

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_a \downarrow_b\rangle - |\downarrow_a \uparrow_b\rangle)$$

אמנם בקורס זה לא דננו בצורה מסודרת במצבים של יותר מחלקיק אחד, אך לצורך העניין נניח כי האינדקס a מתאים לחלקיק הנע ימינה והאינדקס b מתאים לחלקיק הנע שמאלה. עבור כל אופרטור נציין על איזה חלקיק הוא פועל.¹¹ נניח עתה כי הנסיינית בצד a (אליס) מבצעת מדידה של הספיין (תנע זוויתי) של החלקיק בציר z . אופרטורי ההטלה המתאימים יהיו

$$\begin{aligned} P_{\uparrow a} &= |\uparrow_a \uparrow_b\rangle \langle \uparrow_a \uparrow_b| + |\uparrow_a \downarrow_b\rangle \langle \uparrow_a \downarrow_b| \\ P_{\downarrow a} &= |\downarrow_a \uparrow_b\rangle \langle \downarrow_a \uparrow_b| + |\downarrow_a \downarrow_b\rangle \langle \downarrow_a \downarrow_b| \end{aligned}$$

¹¹מעניין לראות מהו התנע הזוויתי הכולל של זוג חלקיקים זה $L^2 = (L_x^{(a)} + L_x^{(b)})^2 + (L_y^{(a)} + L_y^{(b)})^2 + (L_z^{(a)} + L_z^{(b)})^2$. נסו ותופתעו!



איור 7.3: האזורים החיוביים והשליליים של פונקצית הגל עבור שילובים שונים של l ו- m .

לכן, היא יכולה לקבל את התוצאה $|\uparrow_a\rangle$ בהסתברות $\frac{1}{2}$, ואז יקרוס המצב למצב החדש

$$|\uparrow_a\downarrow_b\rangle$$

או שתקבל את התוצאה $|\downarrow_a\rangle$ (גם היא בהסתברות $\frac{1}{2}$) ואז המצב יהיה

$$|\downarrow_a\uparrow_b\rangle$$

אם עכשיו ימדוד הנסיין בצד b (בוב) את מצב הספין בצד שלו, הוא תמיד יקבל תוצאה הפוכה ל- a . כלומר אם אליס מדדה u הוא ימדוד $down$ ולהפך. למרות האופי ההסתברותי של המדידה הקוונטי ההתאמה (או ליתר דיוק, האנטי-התאמה) ביניהם תהיה מלאה. אם נסמן $s_a = \pm 1$ עבור ספין $up/down$ בהתאמה אצל אליס¹² ו- $s_b = \pm 1$ עבור הספין שמודד בוב נקבל תמיד $S = s_a s_b = -1$.

תוצאה זו הביאה להנחה שתורת הקוונטים אינה שלמה, שכן למרות האקראיות מקבלים קורלציה מלאה. רבים סברו כי בתורת הקוונטים יש "משתנים נסתרים", כלומר, לכל חלקיק יש מצב פנימי (שאולי איננו נגיש ישירות ניסויית) הקובע את תוצאת מדידתו במקרים שונים. כאשר נוצר זוג החלקיקים, נקבע מראש מה יהיה כיוון הראשון וכן כיוון השני. בשנות השבעים הציע בל את הניסוי הבא:¹³ אחרי שזוג החלקיקים יתחיל לנוע בכיוונים מנוגדים על ציר ה- x לכיוון אליס ובוב (המרוחקים זה מזה) תבחר אליס אחד משלושה כיוונים באופן אקראי ובהסתברות שווה. הכיוונים יהיו בזווית של 120° זה מזה. כיוון אחד יהיה בכיוון ציר ה- z והשניים האחרים יהיו מסובבים בזווית 120° עם ונגד כיוון השעון בהתאמה. גם בוב יבחר אחד משלושת המצבים האלה באופן בלתי תלוי באליס. הם ימדדו את כיוון הספין יחסית לכיוון שבחרו. הם יחזרו על הניסוי שוב ושוב כשעבור כל זוג חלקיקים הם בוחרים כיוון אקראי. לאחר מכן הם ישוחחו בטלפון ויחשבו את $S = s_a s_b$ עבור כל זוג חלקיקים.

בל הציע את התוצאה הבאה:

משפט 14 (אי שיוויון בל)

בניסוי שהוצג לעיל ובהנחה שתוצאות המדידות נקבעות ע"י משתנים פנימיים מקומיים (כלומר הנקבעים כאשר החלקיקים היו במגע זה עם זה) נקבל שההסתברות $P(S = -1) \geq \frac{5}{9}$.

הוכחה. נניח כי החלקיקים (ליתר דיוק, המשתנים החבויים בבעיה) קובעים מראש עבור אילו כיוונים של מדידות נקבל $S = -1$ ועבור אילו כיוונים נקבל $S = 1$. כל נסיין בוחר אחד משלושה כיוונים, כך שיש תשעה מצבים שונים.

אם שני הנסיינים מודדים את הספין באותו כיוון (קורה בשלושה מתשעת המצבים) נקבל תמיד $S = -1$.

אם נתבונן בחלקיק של אליס, הוא יכול לבחור אותה תוצאה (לדוגמה up) בשלושת הכיוונים (אפשרות א'). במקרה כזה החלקיק של בוב חייב לבחור את התוצאה המנוגדת. לכן בקרה כזה בכל מצב $S = -1$.

אפשרות אחרת (ב') היא שהחלקיק של אליס יבחר את אותה תוצאה (לדוגמה $s_a = 1$) בשניים משלושת המצבים (למשל 0° ו- 120°) ואת התוצאה ההפוכה ($s_a = -1$) במצב השלישי (240°). במקרה זה יבחר החלקיק של בוב את הכיוונים המנוגדים ($s_b = -1$) עבור 0° ו- 120° ו- $s_b = 1$ עבור 240° . נציג את התוצאה של $S = s_a s_b$ בטבלה:

¹²שימו לב כי $s_a = \pm 1$ מתאים למצבים $m = \pm \frac{1}{2}$ אצל אליס. השתמשנו ב- s_a לשם הפשטות.
¹³למעשה זו אחת מווריאציות רבות על ההצעה של בל.

בוב/אליס	240°	120°	0°
0°	1	-1	-1
120°	1	-1	-1
240°	-1	1	1

בחמישה מתשעת המקרים נקבל $S = -1$. כלומר לכל יחס בין ההסתברות לאפשרות א' להסתברות לאפשרות ב' נקבל $P(S = -1) \geq \frac{5}{9}$. $\square$

אי שיוויון בל איננו תלוי בהנחות הפיסיקליות על המערכת, אלא רק בקיום משתנים חבויים מקומיים ובכך שהניסיונאים חופשיים לבחור כיוונים באקראי באופן שאינו תלוי זה בזה ואינו ידוע לחלקיקים מראש (יש החולקים גם על הנחה זו). נבחן עתה את תוצאות הניסוי הצפויות על פי תורת הקוונטים: אם אליס ובוב מדדו באותו כיוון נקבל תמיד $S = -1$, כפי שנאמר לעיל. ההסתברות למקרה זה היא $\frac{1}{3}$. בהסתברות $\frac{2}{3}$, אליס ובוב בחרו כיוונים בזווית של 120° ($\frac{2\pi}{3}$ רדיאנים) – לדוגמה (וללא הגבלת הכלליות) אליס בחרה 0° ובוב בחר 120° . נאמר שאליס קבלה $s_a = 1$ כלומר המצב קרס $|\uparrow_a \downarrow_b\rangle$. בוב מודד את ההיטל של מצב זה על המצב

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{3}L_x} |\downarrow_b\rangle &= e^{i\frac{2\pi}{3}\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \sin \frac{\pi}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i \sin \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= i \sin \frac{\pi}{3} |\uparrow_b\rangle + \cos \frac{\pi}{3} |\downarrow_b\rangle \end{aligned}$$

במצב זה ההסתברות שבוב ימדוד $s_b = -1$ היא

$$P(s_b = -1) = \left| \langle \downarrow_b | \left(i \sin \frac{\pi}{3} |\uparrow_b\rangle + \cos \frac{\pi}{3} |\downarrow_b\rangle \right) \right|^2 = \left| \cos \frac{\pi}{3} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

לכן, במצב כזה ההסתברות שייתקבל $S = -1$ היא $\frac{1}{4}$. כל שאר המצבים אנלוגיים לזה (בדקו!), ולכן ההסתברות הכללית היא

$$P(S = -1) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

כלומר, התוצאה הקוונטית אינה מקיימת את אי שיוויון בל. יש לכך שתי השלכות:

- לא ניתן לפרש את תורת הקוונטים, על תחזיותיה כתאוריה חלקית של תורת משתנים חבויים מקומיים. תורת הקוונטים היא אי־דטרמיניסטית ו\או אי־מקומית בבסיסה.
- ניתן לבצע ניסוי שיכריע האם העולם מקומי ודטרמיניסטי או האם הוא פועל לפי חוקי תורת הקוונטים. ניסוי כזה אכן בוצע לפני כשלושים שנה, ובווריאציות נוספות פעמים רבות מאז. כל התוצאות הצביעו על הצלחה של תחזיותיה של תורת הקוונטים.

הניסוי שהוצע ע"י בל קיבל השראה מניסוי מחשבה שהוצע ע"י איינשטיין פודולסקי ורוזן (EPR). איינשטיין התקשה לקבל את המסקנות מתורת הקוונטים (למרות שהיה אחד מחלוציה) וכינה את התופעה בה לכאורה מדידת חלקיק אחד משפיעה על מצבו של חלקיק אחר "Spooky action at a distance". נראה כי השפעה זו יכולה לנוע מהר ממהירות האור, מה שנראה כסותר את עקרונות תורת היחסות. אולם, ניתן לראות, כי ללא תלות במדידה שמבצעת אליס, יקבל בוב תמיד up בהסתברות $\frac{1}{2}$ וdown בהסתברות $\frac{1}{2}$. כלומר, מתוצאות הניסוי שביצע, אין לו דרך לדעת מהו הניסוי שבחרה אליס. רק לאחר שידברו בטלפון (בתקשורת איטית מהאור) ישימו לב לקורלציות המוזרות בין תוצאותיהם. כלומר, ניסוי זה כלל אינו מאפשר העברת אינפורמציה בין אליס ובוב, למרות ה"טלפתיה" לכאורה בין החלקיקים. ניסוחים מודרניים אומרים בד"כ כי תורת היחסות אוסרת על מעבר **מידע** מהר ממהירות האור, ואכן ניסוי זה איננו סותר זאת.

Bibliography

- [G] H. Goldstein, C. P. Poole and J. L. Safco, “Classical Mechanics” (Addison-Wesley, 2001).
- [A] V. I. Arnold, “Mathematical Methods of Classical Mechanics” (Springer-Verlag, 1978).
- [L] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “Mechanics” (Butterworth-Heinemann, 1976).
- [R] W. Rindler, Essential Relativity: “Special, General and Cosmological” (Springer-Verlag, 1977).
- [M] A. Messiah, “Quantum Mechanics” (Dover, 1999).
- [C] C. Cohen-Tannoudji, “Quantum Mechanics” (Wiley-Interscience, 2006).
- [S] J. J. Sakurai, “Modern Quantum Mechanics” (Addison Wesley, 1993).
- [Sh] L. I. Schiff, “Quantum Mechanics” (McGraw-Hill, 1968).
- [Q] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information” (Cambridge University Press, 2000).
- [GT] S. Sternberg, “Group Theory and Physics “ (Cambridge University Press, 1995).
- [B] J. C. Baez, “Lectures on Classical Mechanics”,
<http://math.ucr.edu/home/baez/classical/textfiles/2005/book/classical.pdf>