מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה 1 (88-161)
סמסטר א' מועד א'

הוראות:

משך המבחן שעתיים.
כל חומר עזר מותר בשימוש.
יש לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות.
בתשובתכם לכל סעיף נא הקיפו את התשובה הסופית באופן ברור, וכן ציינו באילו נוסחאות\התפלגויות\משפטים השתמשתם.

1. מנהל חברה מעוניין לשכור 5 סטטיסטיקאים. הוא מראיין מועמדים עד שיאייש את חמש המשרות. ההסתברות של כל מועמד להתקבל היא p=0.3.
   א) מהי התוחלת וסטיית התקן של מספר המועמדים שיראיין?
   ב) מהי ההסתברות שיראיין בדיוק 10 מועמדים?
   ג) בהינתן שראיין בדיוק 13 מועמדים, מהי ההסתברות שהמועמד השני שראיין התקבל לעבודה?
   ד) מה יהיו תשובותיך לסעיפים א-ג אם p=0.1?

תשובה:

א) התפלגות בינומית שלילית: $P(n)=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ עם r=5 ו p=0.3

התוחלת היא r/p, או במקרה זה, 5/0.3=16.666.

השונות היא $r(1-p)/p^2$ ובמקרה זה בערך 35, וסטיית התקן 5.92

ב) מציבים בהתפלגות ומקבלים 0.051

ג) הדרך הקשה: ידוע שהמועמד ה-13 התקבל, ולפניו התקבלו עוד ארבעה (מתוך 12). מחשבים הסתברות מותנית: ההסתברות שמס' 2 התקבל (=0.3) וגם עוד 3 התקבלו (בינומית: 3 מ-11 הנותרים) חלקי ההסתברות שארבעה מ-11 התקבלו (בינומית: 4 מ-12).
הדרך הקלה: התקבלו 4 מ-12 ולכל אחד הסתברות זהה. לכן ההסתברות ש-2 התקבל היא 4/12=1/3.

ד) א' ו-ב' יש לחשב מחדש עם p=0.1. ג' לא ישתנה (קל לראות מהדרך הקלה)

2. על השולחן 2 כדים זהים. בכד א' 6 כדורים אדומים. בכד ב' 4 כדורים אדומים ושניים כחולים. בוחרים באקראי כד, ושולפים ממנו כדור אחד.

א) מהי ההסתברות שהכדור שנשלף יהיה אדום?
ב) בהינתן שהכדור יצא אדום מהי ההסתברות שהכד שנבחר הוא כד א'?
ג) שולפים כדור נוסף מאותו הכד. מהי ההסתברות שגם הוא יהיה אדום?
ד) גם כדור זה יצא אדום. עתה, מהי ההסתברות שהכד שנבחר הוא א'?

תשובה:

א) $P(red)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$

ב)חוק בייס: $P(a\,|\,red)=\frac{p(red\,|\,a)\cdot p(a)}{p(red)}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{5}$

ג) על פי הידע החדש בהסתברות 3/5 בחרנו מכד א' שבו נותרו עכשיו 5 כדורים אדומים, ובהסתברות 2/5 מכד ב' שבו נותרו 3 אדומים ו-2 כחולים. לכן $P(red)=\frac{3}{5}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{21}{25}$

ד) ניתן לחשב מההתחלה (עבור 2 כדורים אדומים) או לפי ההסתברויות מסעיף ב',ג'.

לדוגמה: בדרך השנייה נקבל $P(a\,|\,red)=\frac{p(red\,|\,a)\cdot p(a)}{p(red)}=\frac{1\cdot\frac{3}{5}}{\frac{21}{25}}=\frac{5}{7}$

3. שני מתמודדים מתחרים בקליעה למטרה. על כל פגיעה מקבלים 2 נקודות. כל מתמודד יורה 3 פעמים. מתמודד א' פוגע בכל ירייה בהסתברות $p_1=2/3$ ומתמודד ב' פוגע בהסתברות $p_2=1/3$.
הניסיונות בלתי תלויים.

א) מהי תוחלת ושונות מספר הנקודות של כל מתמודד?
ב) מהי ההסתברות שמתמודד א' ניצח?
ג) מהי ההסתברות שהתוצאה היא שוויון?
ד) אם ידוע שהתחרות הסתיימה בשוויון מהי תוחלת הנקודות של מתמודד א'?

תשובה:

א) מספר הפגיעות מתפלג בינומית. למתחרה א' תוחלת מס' הפגיעות היא $Np=2$ והשונות $Np(1-p)=2/3$. למתחרה ב' תוחלת מס' הפגיעות היא $Np=1$ והשונות $Np(1-p)=2/3$. תוחלת הנקודות היא פי 2 מתוחלת הפגיעות והשונות בנקודות היא פי 4 משונות מס' הפגיעות.

ניקוד	הסתברות מתחרה א'	הסתברות מתחרה ב'
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$
2	$3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27}$	$3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}$
4	$3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}$	$3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27}$
6	$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

ב) $P(a\,won)=P_a(2)P_b(0)+P_a(4)(P_b(0)+P_b(2))+P_a(6)(P_b(0)+P_b(2)P_b(4))=\frac{496}{729}$

ג) $P(tie)=P_a(0)P_b(0)+P_a(2)P_b(2)+P_a(4)P_b(4)+P_a(6)P_b(6)=\frac{160}{729}$

ד) $E(A\,|\,tie)=\frac{0\cdot P_a(0)P_b(0)+2\cdot P_a(2)P_b(2)+4\cdot P_a(4)P_b(4)+6\cdot P_a(6)P_b(6)}{P(tie)}=3$

4. ההתפלגות המשותפת של שני משתנים מקריים X,Y הנמצאים בטווח $X, Y \in \{1,2,3,4\}$

נתונה ע"י p(x,y)=c(x+2y).

א) מצאו את c.

ב) מצאו את התוחלת של x+y.

ג) מצאו את התוחלת המותנית E(X|Y=3) .

ד) מצאו את ה-covariance, σ_{xy} .

תשובה:

א) $\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{4} c(x+2y) = c(40+80) = 120c$ לכן $c = 1/120$

ב) $E(x+y) = \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{4} (x+y)\cdot c(x+2y) = \frac{660}{120} = \frac{11}{2}$

ג)

$$E(x \mid y=3) = \sum_{x=1}^{4} xp(x \mid y=3) = \sum_{x=1}^{4} x\frac{p(x \wedge y=3)}{p(y=3)} = \sum_{x=1}^{4} x\frac{p(x \wedge y=3)}{\sum_{x=1}^{4} p(x, y=3)} = \sum_{x=1}^{4} x\frac{c(x+6)}{\sum_{x=1}^{4} c(x+6)} = \frac{90}{34}$$

ד)

$$\sigma_{xy} = E(xy) - E(x)E(y) = \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{4} xyp(x,y) - \left(\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{4} xp(x,y)\right)\left(\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{4} yp(x,y)\right) = \frac{900}{120} - \frac{320}{120}\cdot\frac{340}{120} = -0.0555$$

בהצלחה!