

שאלון בחינה: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א' : 08.08.21

יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות

להקפיד על כתב מסודר!

כל אחת מ-4 שאלות הבאות שווה 25 נקודות. שאלת בונוס שווה 8 נקודות

1. נתונה תבנית ריבועית $Q(x, y) = -2x^2 - 6xy - y^2$
- א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x, y) = -1$. לאפיין את העקומה.
- ב. לאפיין את המשטח המתקבל כ-קבוצת פתרון של $z^2 + 1 = Q(x, y)$.

2. קבע כמה נקודות קיימות של עקמומיות מקסימלית על כל אחת מהעקומה הבאות במישור (x, y) , ומצא אותן (אם קיימות):
- א. עקומה $x + 2y + y^2 = 0$
- ב. עקומה $2xy + 1 = 0, x < 0$

3. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח עם פרמטריזציה $\underline{x}(u, v)$.
- א. הוכיחו שאם הקואורדינאטות (u, v) הן איזותרמיות עם מטריקה $g_{ij} = f^2 \delta_{ij}$, אזי מתקיים $\Delta \underline{x} = -2f^2 H \bar{n}$, כאשר Δ הוא האופרטור הלפלסיאן, H היא העקמומיות הממוצעת של המשטח ו- \bar{n} הוא וקטור הנורמל למשטח.
- ב. הוכיחו שמשטח הסיבוב של העקומה $x = \cosh z$ הוא משטח מינימלי.

4. הביטויים הבאים משתמשים בסימון סכימה של Einstein. עבור כל אחד מהביטויים, לקבוע איזה אינדקסים הם אינדקסים חופשיים ואיזה מהם הם אינדקסי סכימה, ולבטא באמצעות מקדמים $H, K, L^k_\ell, L_{ij}, \Gamma^{\ell}_{ij}$ וכו' ולפשט ככל האפשר:

א. $\delta^a_d g_{ab} \delta^b_c g^{cd}$

ב. $\delta^i_m L_{ij} \delta^j_k g^{kl}$

ג. $g^{pq} \delta^j_q \langle \underline{x}_{ij}, n \rangle \delta^i_p$

5. (בונוס) לקבוע אם קיים מספר טבעי $n > 0$ עבורו עקמומיות של העקומה $y = x^n$ בראשית הצירים היא מקסימלית בין כל המספרים הטבעיים $n > 0$.

בהצלחה!