שאלון בחינה: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ׳ מיכאל כץ
סמסטר ב׳, מועד א׳ : 28.06.22

יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות
להקפיד על כתב מסודר**!**
כל אחת מ-4 שאלות הבאות שווה 25 נקודות. שאלת בונוס שווה 8 נקודות.

1. בקואורדינטות $\left(u^1,u^2\right)=\left(x,y\right)$, נניח $f(x,y)=\dfrac{\alpha}{x}$ כאשר $\alpha>0$ ונתבונן במטריקה עם מקדמים $g_{ij}=f^2(x,y)\delta_{ij}$.
   א. חשב את המקדמים Γ_{11}^1 , Γ_{21}^1 , Γ_{12}^1 , Γ_{22}^1 של המטריקה.
   ב. הגדר אופרטור Laplace-Beltrami Δ_{LB} של המטריקה ותן נוסחה עבור עקמומיות של Gauss באמצעות Δ_{LB} .
   ג. בטא משוואה דיפרנציאלית מפורשת באמצעות x,y ונגזרותהם, של קו גאודזי של המטריקה.
   ד. חשב את עקמומיות $K=K(x,y)$ של המטריקה.

2. יהי M משטח עם פרמטריזציה $X(u,v)$. הוכיחו שהמשטח M הבא הוא משטח מינימלי: $X(u,v)=\left(u,v,\ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$.

3. השאלה הזאת עוסקת בעקמומיות.
   א. נניח שמתקיים $f(x)\ge ax^2$ כאשר $a>0$ עבור פונקציה חלקה f המקיימת $f(0)=0$. יהי C גרף של f במישור. האם העקמומית של C בראשית הצירים היא בהכרח שונה מ-אפס?
   ב. נניח שמתקיים $g(x,y)\ge a(x^2+y^2)$ כאשר $a>0$ עבור פונקציה חלקה g המקיימת $g(0,0)=0$. יהי M גרף של g במרחב תלת-מימדי. האם העקמומיות Gauss של M בראשית הצירים היא בהכרח חיובית?

4. השאלה הזאת עוסקת במשטחים.
   א. בטא את Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij} עם הוכחה.
   ב. הוכח שהביטוי $\dfrac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{ij}^{\ell}x_{\ell}+L_{ij}n\right)$ הוא סימטרי ביחס לאינדקסים j,k .
   ג. פרט את היחס בין L_{ij} ו- ${L^k}_{\ell}$.
   ד. כתוב את הביטוי $L_{i[j}{L^k}_{\ell]}$ באמצעות של מקדמי המטריקה ונגזרותיהם.

5. (בונוס) נתבונן בפרמטריזציה $\underline{x}(u^1,u^2)$.
   א. לזהות את האינדקסים החופשיים בביטוי $\langle x_{ij},n_k\rangle g^{k\ell}$.
   ב. לבטא את הביטוי של סעיף א׳ באמצעות $g_{ij},L_{ij},{L^i}_j,\Gamma_{ij}^k,K,H$ ולפשט ככל האפשר.
   ג. לזהות את האינדקסים החופשיים בנוסחה הסופית של סעיף ב׳ ולהשוות לתשובה של סעיף א׳.

בהצלחה!