

ע"ס. הנסיגה דחוישום מרמז 1-1: $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (g_{il,j} - g_{ij,l} + g_{jl,i}) g^{lk}$

$(g_{ij}) = \frac{\alpha^2}{x^2} (\delta_{ij}) \quad (g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(\frac{\alpha^2}{x^2})'_x = \frac{-2\alpha^2 x}{x^4} = \frac{-2\alpha^2}{x^3} \Rightarrow (g_{ij})_1 = \frac{-2\alpha^2}{x^3} (\delta_{ij})$

המטריצה אלו כסויית ודבר -

$(g_{ij}) = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{x^2}} (\delta_{ij}) = \frac{x^2}{\alpha^2} (\delta_{ij})$

$\Gamma'_{11} = \frac{1}{2} g'' (g_{11,1} - g_{11,1} + g_{11,1}) + \frac{1}{2} g'^2 (\dots)$

$= \frac{1}{2} g'' \cdot g_{11,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^2} \cdot \frac{-2\alpha^2}{x^3} = -\frac{1}{x}$

$\Gamma'_{12} = \Gamma'_{21} = \frac{1}{2} g'' (g_{12,1} - g_{21,1} + g_{21,1}) + \frac{1}{2} g'^2 (\dots) = 0$

$\Gamma'_{22} = \frac{1}{2} g'' (g_{22,2} - g_{22,2} + g_{22,2}) + \frac{1}{2} g'^2 (\dots)$

$= \frac{1}{2} g'' (-g_{22,1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^2} \cdot (-\frac{-2\alpha^2}{x^3}) = \frac{1}{x}$

$\Gamma'_{11} = -\frac{1}{x}, \Gamma'_{21} = \Gamma'_{12} = 0, \Gamma'_{22} = \frac{1}{x}$

סה"כ :

ק. יהי Δ_{LB} של מטריקה $g_{ij} = f^2 \delta_{ij}$ - האפורטור f פונקציה ממשית $h(x,y)$.

$\Delta_{LB}(h) = \frac{1}{f^2} (h_{xx} + h_{yy})$

סדומיננט זכאום מוקדמ "ע"ס :

$K = -\frac{1}{2} \Delta_{LB}(\ln f^2) = -\frac{1}{2} \Delta_{LB}(\ln f^2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \Delta_{LB}(\ln f)$

$K = -\Delta_{LB}(\ln f)$

←

שאלה 1 - המשך

(ג) המשוואה הקואווריאנט מוכתרת " $(\alpha^k)'' + \Gamma_{ij}^k (\alpha^i)' (\alpha^j)' = 0$

עבור פרמטריזציה $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$

נציג את מקבצי המסלול $\hat{K}$ ונקסל:

$$(\alpha^1)'' + \Gamma_{11}^1 ((\alpha^1)')^2 + 0 + \Gamma_{22}^1 ((\alpha^2)')^2 = 0$$

~~נקסל~~ $\alpha^2 = y$, $\alpha^1 = x$ נסמן

משוואת דיפרנציאלית
קוואדראטית
המשוואה

$$x'' + (-\frac{1}{x})(x')^2 + \frac{1}{x}(y')^2 = 0$$

סה"כ: $x'' - \frac{1}{x}(x')^2 + \frac{1}{x}(y')^2 = 0$

(ד) המטריקס נתונה בקואורדינטות איבירטיות: $g_{ij} = f^2(x,y) \delta_{ij}$

עם נתיב כלשהו α אופרטור לפסס פססרמי:

$$K = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} (\ln \frac{x^2}{x^2}) = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} (\ln (\frac{x}{x})^2)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-2) \Delta_{LB} (\ln \frac{x}{x}) = \Delta_{LB} (\ln \frac{x}{x})$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial^2 \ln \frac{x}{x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln \frac{x}{x}}{\partial y^2} \right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} \right) = \frac{x^2}{x^2} \cdot -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$K = -\frac{1}{x^2}$

סה"כ

שאלה 2

נניח $X(u,v) = (u, v, \ln(\frac{\cos u}{\cos v}))$: $X(u,v)$ פרמטריזציה

ב-3 מרחב ישרים H , L_{ij} מטריצה

~~המטריצה~~

~~המטריצה~~

קורס בלייב חוקי, נניח מטריצה L הפרמטריזציה:

$$X(u,v) = (u, v, \ln \cos u - \ln \cos v)$$

$$(\ln \cos t)' = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$X_u = (1, 0, -\tan u), \quad X_v = (0, 1, \tan v)$$

$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \tan^2 u = \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$g_{21} = g_{12} = -\tan u \tan v, \quad g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + \tan^2 v = \frac{1}{\cos^2 v}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 u} & -\tan u \tan v \\ -\tan u \tan v & \frac{1}{\cos^2 v} \end{pmatrix} \quad \text{ה'ג'}$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\tan u \\ 0 & 1 & \tan v \end{vmatrix} = (\tan u, -\tan v, 1)$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1} \Rightarrow n = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}} (\tan u, -\tan v, 1)$$

$$L_{ij} = \langle n, X_{ij} \rangle \quad \text{נניח כיוון } n$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0) \quad X_{uu} = (0, 0, -\frac{1}{\cos^2 u})$$

$$X_{vv} = (0, 0, \frac{1}{\cos^2 v})$$

$$L_{11} = \langle X_{11}, n \rangle = \langle X_{uu}, n \rangle = -\frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}}$$

$$L_{12} = L_{21} = \langle X_{uv}, n \rangle = 0 \quad L_{22} = \langle X_{vv}, n \rangle = \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}}$$

$$(L_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cos^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 v} \end{pmatrix} \quad \text{ה'ג'}$$

←

2-2 תנאי

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 u} & -\tan u \tan v \\ -\tan u \tan v & \frac{1}{\cos^2 v} \end{pmatrix}$$

$$(L_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cos^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 v} \end{pmatrix}$$

$$L^i_j = -g^{ik} L_{kj}$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 v} & \tan u \tan v \\ \tan u \tan v & \frac{1}{\cos^2 u} \end{pmatrix}$$

$$(L^i_j) = -\frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 v} & \tan u \tan v \\ \tan u \tan v & \frac{1}{\cos^2 u} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cos^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 v} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\det(g_{ij}) \sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cos^2 u \cos^2 v} & \frac{\tan u \tan v}{\cos^2 v} \\ -\frac{\tan u \tan v}{\cos^2 u} & \frac{1}{\cos^2 u \cos^2 v} \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(L^i_j) = \frac{-1}{2 \det(g_{ij}) \sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}} \left(-\frac{1}{\cos^2 u \cos^2 v} + \frac{1}{\cos^2 u \cos^2 v} \right)$$

$$H = 0$$

המשטח מן המסלול

✓

3 לאור

(K) נתון שמתקיים $f(x) \geq ax^2$ כאשר $a > 0$ עבור פונקציה חלקה f

המקיימת $f(0) = 0$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) \geq ax^2 \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(0+h) \geq a(0+h)^2 = ah^2 > 0$$

עם נק' מינימום של C .

C זהו של f קמישור.

עם משפט מהמשפחה מתקיים כי

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

$$f(0+h) \geq a(0+h)^2 = ah^2$$

$$f(0-h) \geq a(0-h)^2 = ah^2$$

עבור $x=0$

$$f(0) = 0$$

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2} \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah^2 + ah^2}{h^2} = 2a$$

עם משפט מהמשפחה, כאשר C סקורה המוקדמת בקרב של f

ואם נק' קריטית של f אזי (הסקמויות של C בנק' a שווה ל $f''(a)$ (לפי חישובים אלגוריתמיים פנימיים))

ובכיון ש $(0,0)$ נק' מינימום אזי

$$a_C(0,0) = f''(0) \geq 2a$$

זלמן טון שסבא, (הסקמויות של C הראשית הצריח) בהכרח שונה מ 0 .

שאלה 3-המשך

(ב) נניח שמתקיים $g(x,y) \geq a(x^2+y^2)$ כאשר $a > 0$ עבור פתח חלקה g

המתקיימת $g(0,0) = 0$ ו g במרחב תלת-ממדי.

$$\left. \begin{array}{l} g(0+h,0) \geq ah^2 > 0 \\ g(0,0+h) \geq ah^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{נ'ק' מניחות. } (0,0) \text{ , } g(x,y) \geq a(x^2+y^2) > 0$$

כפי משפט מההכרזה, אם λ_i ו μ_i של L^i ו V^i הו"ף המסבאים הם,

ו ניקח מישור הנפח π : $\{V^i, \lambda_i\}$, אזי העקומה הנוצרת מהחיתוך המישור

ה"ף π עם המשטח M , העקומה שלה בת' P היא λ .

בפירט, נסתכל על הת' $(0,0)$. ניקח מישור π של $\{V^i, \lambda_i\}$ כי $e_3 \perp M$ נא.

כעת, החיתוך של פתח עם המשטח של M , ניקח עקומה C ,

$$g(x,y) \geq a(x^2+y^2) \text{ ודן } \text{חיתוך עם פתח ו } M \text{ עקומה שכולה } C \text{ חתוך}$$

$$\text{מוצגת } h(x) \geq ax^2 + k \text{ כאשר } x \text{ קטן, } k > 0, \text{ ו } h(x) \geq ax^2 + k \geq ax^2$$

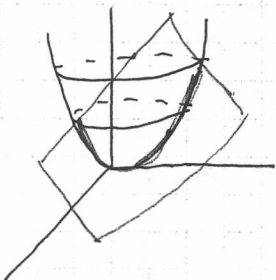
וכן λ_i סדרה λ_i העקומה של העקומה ה"ף קראשית $\lambda_i \leq 2a$.

זה מתקיים $i=1,2$ ו λ_i $\lambda_i \geq 2a$, המשפט של λ_i .

$$\text{וכפריט } \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 2a \cdot 2a = 4a^2 > 0$$

$$K_{(0,0)} = \det(L^i)_{(0,0)} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \text{ כדור,}$$

עקומה של M קראשית הצורה היא	דן
ההכרזה חלופית	



(k) a חשב : $g_{ij,k}$

$$g_{ij,k} = \langle x_i, x_j \rangle_k = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$= \langle \Gamma_{ik}^a x_a + L_{ik} n, x_j \rangle + \langle x_i, \Gamma_{jk}^a x_a + L_{jk} n \rangle$$

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n \quad \text{יחס דב' ה-2}$$

$$= \Gamma_{ik}^a \langle x_a, x_j \rangle + L_{ik} \langle n, x_j \rangle + \Gamma_{jk}^a \langle x_i, x_a \rangle + L_{jk} \langle x_i, n \rangle$$

$$= \Gamma_{ik}^a \langle x_a, x_j \rangle + \Gamma_{jk}^a \langle x_i, x_a \rangle$$

$$= \Gamma_{ik}^a g_{aj} + \Gamma_{jk}^a g_{ia}$$

~~הוכחה~~

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (g_{ie,j} - g_{ij,e} + g_{je,i}) g^{ek} \quad \text{הוכחה: מכאן נקבע המטריקס}$$

הוכחה:

(פתח את מה שבראשית)

$$(g_{ie,j} - g_{ij,e} + g_{je,i}) = \Gamma_{ij}^a g_{ae} + \Gamma_{ej}^a g_{ia} = \Gamma_{ie}^a g_{aj} - \Gamma_{je}^a g_{ia}$$

$$+ \Gamma_{ij}^a g_{ae} + \Gamma_{ej}^a g_{ia}$$

$$= \Gamma_{ij}^a g_{ae} + \Gamma_{ej}^a g_{ia} - \Gamma_{ie}^a g_{aj} - \Gamma_{je}^a g_{ia} + \Gamma_{ij}^a g_{ae} + \Gamma_{ie}^a g_{aj}$$

$$= \Gamma_{ij}^a g_{ae} + \Gamma_{ij}^a g_{ae} = 2\Gamma_{ij}^a g_{ae} = 2\Gamma_{ij}^k g_{ke}$$

שני אינדקסים פתוחים

$$2\Gamma_{ij}^k g_{ke} = (g_{ie,j} - g_{ij,e} + g_{je,i})$$

ודם: (נכפול ב g^{ek} והפכנו g_{ke} ונתקן ב-2):

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (g_{ie,j} - g_{ij,e} + g_{je,i}) g^{ek}}$$

סיום

שאלה 4 - הנחיה

$$\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^l x_l + L_{ij}^k u^k) = \frac{\partial}{\partial u^k} x_{ij}^k = x_{ij}^k = x_{ik}^j = \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{ik}^l x_l + L_{ik}^j u^j) \quad (1)$$

כל מה שיש והעצמות של המטריצה לא נכנסות
נניח שההתאמה היא פשוט מהמרחב

$$\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^l x_l + L_{ij}^k u^k) = \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{ik}^l x_l + L_{ik}^j u^j)$$

נראה שהמטריצה היא סימטרית ביחס לאינדקסים i, j

$$L_{ij}^k = -g^{ik} L_{kj} \quad (2)$$

ידוע כי $L_{ij} = \langle x_{ij}, u \rangle$ ואכן:

$$L_{ij} = \langle x_{ij}, u \rangle = \langle x_i, u_j \rangle - \langle x_i, u_k \rangle = 0 - \langle x_i, L_j^k x_k \rangle$$

$$= -L_j^k \langle x_i, x_k \rangle = -L_j^k g_{ik}$$

$$L_{ij} = -L_j^k g_{ik}$$

נכפול בהופכי g^{ik} :

$$g^{ik} L_{ij} = L_{ij} g^{ik} = -L_j^k g_{ik} g^{ik} = -L_j^k \delta_k^i = -L_j^i$$

נניח שההתאמה היא פשוט מהמרחב

נחלק ב-1 ונקבל:

$$L_j^i = -g^{ik} L_{ij}$$

דפיס - 4 הנחש

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^a x_a + L_{ij} n$$

• x_{ijk} 3) נוסחה

$$x_{ijk} = (x_{ij})_k = (\Gamma_{ij}^a x_a + L_{ij} n)_k = \Gamma_{ij,k}^a x_a + \Gamma_{ij}^a x_{ak} + L_{ij,k} n + L_{ij} n_k$$

$$= \Gamma_{ij,k}^a x_a + \Gamma_{ij}^a (\Gamma_{ak}^m x_m + L_{ak} n) + L_{ij,k} n + L_{ij} L_k^r x_r$$

כל המצבים האחרונים מכונים השוויים q : x_a, x_m, x_r ו- x_{ak} נקראת x_q

$$= (\Gamma_{ij,k}^q + \Gamma_{ij}^a \Gamma_{ak}^q + L_{ij} L_k^q) x_q + (\Gamma_{ij}^a L_{ak} + L_{ij,k}) n$$

$$x_{i[jk]} = \frac{1}{2} (x_{ijk} - x_{ikj}) = 0$$

כל המצבים האחרונים מכונים השוויים q : x_a, x_m, x_r ו- x_{ak} נקראת x_q

$$\Gamma_{i[jk]}^q + \Gamma_{i[j}^a \Gamma_{k]}^q a + L_{i[j} L_{k]}^q = 0$$

כל המצבים האחרונים מכונים השוויים q : x_a, x_m, x_r ו- x_{ak} נקראת x_q

$$\Gamma_{i[j,l]}^q + \Gamma_{i[j}^a \Gamma_{l]}^q a + L_{i[j} L_{l]}^q = 0$$

כל המצבים האחרונים מכונים השוויים q : x_a, x_m, x_r ו- x_{ak} נקראת x_q

$$\Gamma_{i[j,l]}^k + \Gamma_{i[j}^a \Gamma_{l]}^k a = -L_{i[j} L_{l]}^k$$

$$\textcircled{*} \boxed{L_{i[j} L_{l]}^k = -\Gamma_{i[j}^k \Gamma_{l]} - \Gamma_{i[j}^a \Gamma_{l]}^k a}$$

אם $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (g_{ij,k} - g_{ji,k} + g_{k,ij})$ אז $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (g_{ij,k} - g_{ji,k} + g_{k,ij})$

המשוואה והמשוואה האחרות נקראות משוואות

המשוואה והמשוואה האחרות נקראות משוואות

המשוואה והמשוואה האחרות נקראות משוואות

$$\langle x_{ij}, n_k \rangle g^{kl}$$

מטריצה

(א)

אנדרקסים חופשיים מופיעים רק במטריצה:

$$\boxed{i, j, l} \quad \text{האנדרקסים החופשיים הם}$$

✓

$$\langle x_{ij}, n_k \rangle g^{kl} = \langle \Gamma_{ij}^a x_a + L_{ij} n, L_k^m x_m \rangle g^{kl}$$

(ב)

$$\cancel{\Gamma_{ij}^a L_k^m} = \Gamma_{ij}^a L_k^m \langle x_a, x_m \rangle g^{kl} + L_{ij} L_k^m \langle n, x_m \rangle g^{kl}$$

$$= \Gamma_{ij}^a L_k^m g_{am} g^{kl} \quad \text{[crossed out terms]}$$

$$= \Gamma_{ij}^a \underbrace{g_{am} L_k^m}_{-L_{ak}} g^{kl} = -\Gamma_{ij}^a \underbrace{L_{ak} g^{kl}}_{= -L_a^l} = \Gamma_{ij}^a L_a^l$$

✓

$$\Rightarrow \boxed{\langle x_{ij}, n_k \rangle g^{kl} = \Gamma_{ij}^a L_a^l}$$

(ג) קואסיטת המטריצה האנדרקסים החופשיים הם i, j, l

אם כן המטריצה סדירה

✓