

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית (88-201)

שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ

סמסטר ב', מועד א': 30.07.18

יש לנמק את כל התשובות

משך הבחינה: שלוש שעות. שאלון סגור.

שאלות 1-5 שוות 20 נקודות. שאלת בונוס שווה 10 נקודות.

1. הבעיה הזאת עוסקת בעקומות במרחב אוקלידי.
 - א. הגדר מושג של פרמטר s במהירות יחידה של עקומה.
 - ב. התבונן בעקומה $\alpha(t) = (8 \cos t, 10 - 10 \sin t, -6 \cos t)$. מצא פרמטר במהירות יחידה $s = s(t)$ של העקומה.
 - ג. חשב את העקמומיות של העקומה בחלק ב'.
2. הבעיה הזאת עוסקת במשטחים במרחב אוקלידי. נניח שמשטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ מקיים $g_{ij} = L_{ij} = 0$ כאשר $i \neq j$.
 - א. הגדר מושג של עקמומיות ראשיות k_1, k_2 של משטח M , מצא מטריצה של העתקת Weingarten, מצא k_1, k_2 ובטא את היחס $\frac{k_1}{k_2}$ כפונקציה של מקדמים של תבניות יסודיות ראשונה ושניה.
 - ב. מצא וקטור נורמל n כאשר M הוא משטח סיבוב המתקבל על-ידי סיבוב של פרבולה $x = z^2 + \frac{1}{4}$ מסביב לציר z .
 - ג. חשב את היחס $\frac{k_1}{k_2}$ במקרה כאשר M הוא משטח סיבוב המתקבל על-ידי סיבוב של פרבולה $x = z^2 + \frac{1}{4}$ מסביב לציר z .
3. הבעיה הזאת עוסקת במשטחים.
 - א. בטא את Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij} עם הוכחה.
 - ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^\ell x_\ell + L_{ij} n)$ הוא סימטרי ביחס לאינדקסים j ו- k .
 - ג. הסבר את היחס בין L_{ij} ו- $L_{\ell i}$.
 - ד. כתוב את הביטוי $L_{i[j} L_{\ell]}$ באמצעות של מקדמי המטריקה ונגזרותיה.

4. הביטויים הבאים משתמשים בסימון סכימה של Einstein כאשר האינדקסים רצים מ 1 ל 2. לקבוע איזה אינדקסים הם חופשיים ואיזה של סכימה, ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:

א. $\langle x_j, n_k \rangle (\delta_m^k) g^{m\ell}$

ב. $\langle x_j, x_{pq} \rangle \delta_r^j$

ג. $\langle x_{pq}, x_m \rangle$

ד. $\delta_b^a g_{ca} g^{bd} \delta_d^c$

5. מצא נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה הבאה במישור (x, y) :

א. עקומה $xy + y^2 = 1$

ב. עקומה $xy + 1 = 0, x > 0$

ג. עקומה $x + \ln y = 0$

6. (שאלת בונוס) תהי $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ עקומת Jordan שעבורה קיימת פרמטריזציה רגולרית בסביבה של כל נקודה. האם בהכרח מתקיים שבנקודה של C הקרובה ביותר לראשית, וקטור-המיקום של הנקודה הוא מאונך לוקטור המשיק?

בהצלחה!