שאלון בחינה: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א' : 05.07.20

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>
להקפיד על כתב מסודר. חובה להגיש פתרונות דרך מודל ובזמן. אין אפשרות להגיש באיחור. משלא הגיש בזמן יצטרך לגשת למועד ב'. מומלץ להגיש פתרונות זמן משמועתי לפני סוף המבחן כדי להמנע מאי-נעימות של הרגע האחרון. מבחן ללא חומר עזר. אסור להיעזר ע"י אחרים. אפשר לשלוח שאלות דרך דואר אלקטרוני לפרופסור כץ.
כל אחת מ-4 שאלות הבאות שווה 25 נקודות. שאלת בונוס שווה 8 נקודות.

1. נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y)=-x^2-4xy-2y^2$
   א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y)=1$. לאפיין את העקומה.
   ב. לאפיין את המשטח המתקבל כ-גרף של התבנית הריבועית $z=Q\left(x,y\right)$ ולמצא את עקמומיות גאוס של הגרף בראשית הצירים.

2. קבע כמה נקודות קיימות של עקמומיות מקסימלית על כל אחת מהעקומה הבאות במישור (x,y), ומצא אותן (אם קיימות):
   א. עקומה $x+2y+y^2=0$.
   ב. עקומה $xy+1=0,\ x<0$.
   ג. עקומה $x+\ln y=1$.

3. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח עם פרמטריזציה $\underline{x}(u,v)$.
   א. הוכיחו שאם הקואורדינאטות (u,v) הן איזותרמיות עם מטריקה $g_{ij}=f^2\delta_{ij}$, אזי מתקיים $\Delta\underline{x}=-2f^2H\vec{n}$, כאשר Δ הוא האופרטור הלפלסיאן, H היא העקמומיות הממוצעת של המשטח ו-$\vec{n}$ הוא וקטור הנורמל למשטח.
   ב. הוכיחו שמשטח הסיבוב של העקומה $x=\cosh z$ הוא משטח מינימלי.

4. הביטוים הבאים משתמשים בסימון סכימה של Einstein . עבור כל אחד מהביטוים, לקבוע איזה אינדקסים הם אינדקסים חופשיים ואיזה מהם הם אינדקסי סכימה, ולבטא באמצעות מקדמים Γ_{ij}^{ℓ}, L_{ij}, $L^k{}_{\ell}$, K, H, וכו' ולפשט ככל האפשר:
   א. $g_{ab}\delta^b{}_c g^{cd}\delta_d{}^a$.
   ב. $L_{ij}\delta^j{}_k g^{k\ell}\delta^i{}_m$.
   ג. $\left\langle\underline{x}_{ij},n\right\rangle\delta^i{}_p\, g^{pq}\,\delta^j{}_q$.

5. (שאלת בונוס) תהי $C\subseteq\mathbb{R}^2$ עקומת Jordan שעבורה קיימת פרמטריזציה רגולרית בסביבה של כל נקודה. האם בנקודה של C הרחוקה ביותר לראשית, רדיוס-וקטור הוא בהכרח מאונך ל-וקטור המשיק בנקודה ?

בהצלחה!