

**שאלון בחינה: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (201-88)**  
**שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ**  
**סמסטר ב', מועד ב' : 03.10.21**

**יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות**

להקפיד על כתב מסודר!

כל אחת מ-4 שאלות הבאות שווה 25 נקודות. שאלת בונוס שווה 8 נקודות.

1. בקואורדינטות  $(u^1, u^2) = (x, y)$ , נניח  $h(x, y) = Cx$  כאשר  $C > 0$  ונתבונן

$$g_{ij} = h(x, y)^{-2} \delta_{ij}$$

א. חשב את המקדמים  $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{21}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{22}^1$  של המטריקה.

ב. הגדר אופרטור Laplace-Beltrami  $\Delta_{LB}$  של המטריקה ותן נוסחה

לעקמומיות של Gauss באמצעות  $\Delta_{LB}$ .

ג. בטא משוואה דיפרנציאלית מפורשת של קו גאודזי של המטריקה באמצעות  $x, y$  ונגזרותיהם.

ד. חשב את עקמומיות  $K = K(x, y)$  של המטריקה.

2. יהי  $M$  משטח עם פרמטריזציה  $X(u, v)$ . הוכיחו שהמשטח  $M$  הבא הוא משטח

$$X(u, v) = \left( u, v, \ln \left( \frac{\cos u}{\cos v} \right) \right)$$

3. השאלה הזאת עוסקת בעקמומיות.

א. נניח שמתקיים  $f(x) \geq ax^2$  כאשר  $a > 0$  עבור פונקציה חלקה  $f$  ונניח  $f(0) = 0$ . יהי  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  גרף של  $f$ . האם העקמומיות של  $C$  בראשית הצירים היא בהכרח שונה מ-אפס?

ב. נניח שמתקיים  $g(x, y) \geq a(x^2 + y^2)$  כאשר  $a > 0$  עבור פונקציה חלקה  $g$  ונניח  $g(0, 0) = 0$ . יהי  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  גרף של  $g$ . האם העקמומיות Gauss של  $M$  בראשית הצירים היא בהכרח חיובית?

4. השאלה הזאת עוסקת במשטחים.

א. בטא את  $\Gamma_{ij}^k$  באמצעות מקדמי המטריקה  $g_{ij}$  עם הוכחה.

ב. הוכח שהביטוי  $\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^\ell x_\ell + L_{ij} n)$  הוא סימטרי ביחס לאינדקסים  $j, k$ .

ג. פרט את היחס בין  $L_{ij}$  ו- $L_\ell^k$ .

ד. כתוב את הביטוי  $L_{[j} L_{\ell]}^k$  באמצעות של מקדמי המטריקה ונגזרותיהם.

5. (בונוס) חשב את העקמומיות הכוללת של  $x^2 + 4y^2 = 4xy + 1$ .

**בהצלחה!**