

שאלון בחינה: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
 שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
 סמסטר ב', מועד ב' : 11.09.17

יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.
שאלון סגור.

משך הבחינה: שלוש שעות. כל אחת מ-5 שאלות הבאות שווה 20 נקודות. שאלת בונוס שווה 8 נקודות.

1. הוכח את משפט Gauss-Bonnet: תהי $K = K_p$ עקמומיות Gauss בנקודה $p \in M$ של משטח

$$M \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ סגור קמור כאשר } K > 0. \text{ אזי מתקיים } \iint_M K_p dA_M = 4\pi.$$

2. עבור כל אחד מחתכי החרוט הבאים לקבוע אם הוא מנוון או לא ולאפיין אותו:

א. קבוצת פתרון של המשוואה $x^2 - 4xy + 5y^2 + 1 = 0$.

ב. קבוצת פתרון של המשוואה $x^2 - 4x + 3y^2 + 4 = 0$.

ג. קבוצת פתרון של המשוואה $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$.

ד. קבוצת פתרון של המשוואה $x^2 - 6xy + y + 9y^2 = 0$.

3. מצא נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה הבאה במישור (x, y) :

א. עקומה $xy + y^2 = 1$.

ב. עקומה $xy + x = 0$.

ג. עקומה $x + e^y = 0$.

4. בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$, נניח $\lambda = \frac{C^2}{x^2}$ כאשר $C > 0$ ונתבונן במטריקה $g_{ij} = \lambda \delta_{ij}$.

א. חשב את המקדמים $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{21}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{22}^1$ ומצא את משוואה דיפרנציאלית מפורשת של קו גאודזי של המטריקה.

ב. חשב את עקמומיות Gauss $K = K(x, y)$ של המטריקה.

5. הביטויים הבאים משתמשים בסימון סכימה של Einstein. עבור כל אחד מהביטויים, לקבוע איזה

אינדקסים הם אינדקסים חופשיים ואיזה מהם הם אינדקסי סכימה, לבטא באמצעות מקדמים Γ_{ij}^l ,

L_{ij} , וכו' ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:

א. $\langle x_a, x_{bc} g^{ab} \rangle$.

ב. $\langle x_{de}, n_k \delta_h^e \rangle$.

ג. $g_{ij} \delta_m^j \delta_n^i g^{mn}$.

ד. $|x_{pq}|$.

6. (שאלת בונוס) תהי $C \subseteq \mathbb{R}^2$ עקומת Jordan שעבורה קיימת פרמטריזציה רגולרית בסביבה של

כל נקודה. בנקודה של $C \subseteq \mathbb{R}^2$ במרחק מקסימום מראשית הצירים, האם בהכרח הרדיוס-וקטור הוא אורתוגונלי לוקטור המשיק של אותה נקודה?

בהצלחה!