שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד ב': 05.09.18
<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>
<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u>
שאלות 1-5 שוות 20 נקודות. שאלת בונוס שווה 10 נקודות.

1. יהי (e_1,e_2) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. יהי $C\subseteq\mathbb{R}^2$ עקומת Jordan קמורה חלקה עם פרמטריזציה $\alpha(s)$ במהירות יחידה. יהי $v(s)$ וקטור מהירות שלה. יהי $\theta(s)$ הזוית נמדד נגד כיוון השעון בין e_1 לבין $v(s)$.
   א. תנו שתי הגדרות מפורטות של פונקצית עקמומיות $k_\alpha(s)$ של העקומה.
   ב. הגדר עקמומיות גלובלית $Tot(C)$ של עקומה C.
   ג. מצא (עם הוכחה) את עקמומיות גלובלית של C.
   ד. לקבוע אם פונקצית עקמומיות של עקומה $2x^2-3y^2=1$ בנקודות (x,y) היא פונקציה קבועה, באמצעות אופרטור Bateman-Reiss.

2. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח מוגדר על ידי גרף של $z=f(x,y)$ כאשר $f(x,y)=-6xy$.
   יהי (e_1,e_2,e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.
   א. מצא מטריצת Hessian H_f של f בראשית הצירים.
   ב. יהיו λ_i (כאשר $i=1,2$) ערכים עצמיים של H_f. יהי v_i וקטור עצמי במישור (x,y) השייך לערך עצמי λ_i. נגדיר מישור $P_i\subseteq\mathbb{R}^3$ ($i=1,2$) הנפרש על ידי וקטור עצמי v_i ווקטור e_3. נגדיר עקומה $\gamma_i\subseteq\mathbb{R}^3$ על ידי $\gamma_i=M\cap P_i$. מצא את העקמומיות של כל אחת מן העקומות γ_i בראשית הצירים.
   ג. חשב את העתקת Weingarten של M בראשית הצירים ואת עקמומיות Gauss של M בראשית הצירים.
   ד. חשב את עקמומיות ממוצעת H של משטח M בראשית הצירים.

3. הביטויים הבאים משתמשים בסימון חיבור של Einstein. לקבוע איזה אינדקסים הם של סכימה ואיזה מהם חופשיים, לבטא באמצעות מקדמים Γ_{ij}^{ℓ}, L_{ij}, וכו., ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:
   א. לבטא באמצעות Γ_{ij}^{ℓ} ו- L_{ij} *בלבד*: $\delta^k{}_m\left\langle x_{ab},n_k\right\rangle$.
   ב. $\left\langle x_j,x_{pq}\right\rangle g^{jp}$.
   ג. $\left\langle x_{pqr},n\right\rangle$.
   ד. $|x_{ij}|^2$.

4. בקואורדינטות $\left(u^1,u^2\right)=\left(x,y\right)$, נניח $h(x,y)=Cx$ כאשר $C>0$ ונתבונן במטריקה עם מקדמים $g_{ij}=h(x,y)^{-2}\delta_{ij}$.

א. חשב את המקדמים Γ^1_{11} , Γ^1_{21} , Γ^1_{12} , Γ^1_{22} של המטריקה.

ב. הגדר אופרטור Laplace-Beltrami Δ_{LB} של המטריקה ותן נוסחה לעקמומיות של Gauss באמצעות Δ_{LB} .

ג. בטא משוואה דיפרנציאלית מפורשת של קו גאודזי של המטריקה.

ד. חשב את עקמומיות $K=K(x,y)$ של המטריקה

5. יהי M משטח עם פרמטריזציה $X(u,v)$.

א. הוכיחו שאם הקואורדינאטות איזותרמיות עם פונקציה f , אז מתקיים $\Delta X=-2f^2H\vec{n}$, כאשר Δ מסמלת את אופרטור הלפלסיאן, H את העקמומיות הממוצעת של המשטח ו- $\vec{n}$ את וקטור הנורמל למשטח.

ב. הוכיחו שמשטח הסיבוב של העקומה $x=\cosh z$ הוא משטח מינימלי.

ג. הוכיחו שהמשטח הבא הוא משטח מינימלי : $X(u,v)=\left(u,v,\ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$.

6. (בונוס) נניח שמתקיים $f(x,y)\geq C(x^2+y^2)$ כאשר $C>0$ עבור פונקציה חלקה f ונניח $f(0,0)=0$. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ גרף של f . האם העקמומיות Gauss של M בראשית הצירים היא בהכרח חיובית?

בהצלחה!