

בחינה בקורס
88-524-01 מועד א, תשע"ד
גיאומטריה פרויקטיבית
פרופ' מ. כץ

זמן הבחינה: שעתיים וחצי
יש לענות על כל השאלות ולתת הצדקה והסבר.

- השאלה הזאת עוסקת ברביעיות הרמוניות.
 - א. נניח שישירים a, b, c הם קונקורנטים. בנה ישר d כאשר רביעייה a, b, c, d היא הרמונית.
 - ב. תנו סדרת שרטוטים כדי לאייר את הבניה בסעיף (א).
 - ג. נניח שמתקיים יחס הרמוני $H(A, B, C, D)$ זאת אומרת רביעייה A, B, C, D היא הרמונית. מצא שבעה סידורים נוספים של נקודות A, B, C, D כאשר היחס ההרמוני מתקיים.
 - ד. נניח ש- C היא נקודה אמצעית של קטע AB . מהי הנקודה רביעית הרמונית D ? הוכח.
- יהי $R(A, B, C, D_k)$ יחס הכפול של נקודות על ישר מרוכב פרואקטיבי, כאשר $A = \infty$, $B = 0$, $C = 1$, $D_k = e^{\frac{ik\pi}{3}}$, כאשר $k = 1, \dots, 5$.
 - א. מהם הערכים האפשריים של היחס הכפול תחת כל התמורות של רביעה (A, B, C, D_k) כאשר $k = 1$?
 - ב. מהם הערכים האפשריים של היחס הכפול כאשר $k = 2$?
 - ג. תהי $f(k)$ מספר טוטאלי של ערכים שונים זה מזה של היחס הכפול תחת כל התמורות של רביעה (A, B, C, D_k) . חשב $f(k)$ כפונקציה מפורשת של האינדקס $k = 1, \dots, 5$.
- מצא טרנספורמציה פרויקטיבית השולחת חתך חרוט אחד לשני כלהלן:
 - א. מעגל $x^2 + y^2 = 1$ להיפרבולה $X^2 - Y^2 = 1$.
 - ב. מעגל $x^2 + y^2 = 1$ לפרבולה $Y = X^2 + 1$.
 - ג. היפרבולה $xy = 1$ ל אליפסה $X^2 + 4Y^2 = 1$.
- יהיו p, p' ישרים שונים במישור פרויקטיבי ממשי. נתבונן בנקודות $A, B, C \in p$ וגם $A', B', C' \in p'$.
 - א. בסימנים דלעיל, נסח ביטוי מפורט של משפט Pappus.
 - ב. שרטט ציור מדויק המהווה איור למשפט של סעיף א'.
 - ג. תרגם נקודות לישרים וגם קולינאריות לקונקורנטיות, ונסח ביטוי מדויק של משפט דואלי למשפט Pappus.
 - ד. שרטט ציור מדויק המהווה איור למשפט של סעיף ג'.
- הבעיה הזאת עוסקת בפולאריות.
 - א. הצג ניסוח מדויק של משפט Pascal על חתך חרוט Ω .
 - ב. נסח משפט פולארי למשפט Pascal. כאן פולאריות היא ביחס לחתך החרוט Ω .
 - ג. ערוך שרטוט המתאר את המשפט הפולארי למשפט Pascal.
 - ד. נסח והוכח משפט ההדדיות לגבי פולריות.

בהצלחה !