

חשבון אינפיניטיסימלי 3-תרגיל 1

שאלה 1. יהיו X, Y מרחבים נורמיים עם הנורמות $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ בהתאמה. הוכיחו מי מהבאות היא נורמה על $X \times Y$, שימו לב כי החיבור והכפל בסקלאר ב- $X \times Y$ מוגדרים להיות חיבור וכפל איבר-איבר.

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad (1)$$

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X \|y\|_Y \quad (2)$$

$$\|(x, y)\| := \max(\|x\|_X, \|y\|_Y) \quad (3)$$

שאלה 2. יהי $a \in \mathbb{N}$ שונה מ-1. נגדיר פונקציה $d_a : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ כדלקמן,

$$d_a(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y; \\ \frac{1}{a^{k(x,y)}} & \text{אחרת.} \end{cases}$$

כאשר $k(x, y) := \max\{i \in \mathbb{N} : a^i \mid (x - y)\}$. הוכיחו כי זוהי מטריקה על \mathbb{Z} .

שאלה 3. עבור (X, d) וקבוצה $A \subseteq X$ נסמן ב- A' את קבוצת נקודות ההצטברות של A . בדומה, $A^{(n)} := (A^{(n-1)})'$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכל $a \in \mathbb{R}^k$ נגדיר $\phi(a)$ להיות קבוצה של איברים המתכנסים ל- a כולל a עצמה. נגדיר את:

$$A := \left(\bigcup_{x \in \phi(0)} \phi(x) \right) \cup \phi(0)$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ חשבו את $A^{(n)}$, ומצאו תת-קבוצה B שמוכלת ממש ב- \mathbb{R} כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $B^{(n)} \neq \emptyset$.
אתגר. האם תוכלו למצוא קבוצה B כך ש- $B^{(\infty)} \neq \emptyset$ אבל $(B^{(\infty)})' = \emptyset$?

שאלה 4. קבעו האם הקבוצות הבאות פתוחות או סגורות.

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \in (0, 1)\} \quad (1)$$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y\} \quad (2)$$

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y < 0, x + y > -1\} \quad (3)$$

שאלה 5. יהיו $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. הראו כי $P := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = b\}$ קבוצה סגורה ב- \mathbb{R}^n .

בהצלחה!