

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132) מועד א' (04.02.16)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: ויקטוריה בליזניאבסקי, דר' מנחם שלוסברג

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון פשוט. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (15 נקודות)

הוכיחו את משפט הערך הממוצע של Lagrange:

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על הקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a, b) . אזי

$$קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.$$

שאלה 2

א. (7 נקודות) הוכיחו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

ב. (5 נקודות) מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n)}$ (נמקו היטב את תשובתכם!).

שאלה 3

א. (20 נקודות) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונגדיר באמצעותה פונקציה חדשה:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{f(x) \sin^2 x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. הוכיחו ש- G רציפה ב- \mathbb{R} .

2. האם G גזירה ב- $x=0$? אם לא – הסבירו מדוע, אם כן – חשבו את $G'(0)$ (שימו לב

שהתשובה שלכם אמורה להיות תלויה ב- f).

ב. (10 נקודות) מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $(1, 2)$ עבור העקומה $4x^2 + 2xy + y^2 = 12$.

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר (הוכיחו את תשובתכם!).

א. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4 - n^2}}$

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 3^{-n}}$

שאלה 5

א. (15 נקודות) תהי f פונקציה גזירה בכל \mathbb{R} ונגדיר פונקציה חדשה

$$h(x) = f(x) + f(2-x)$$

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in [0, 2]$ עבורה הנגזרת של h

$$h'(c) = 0$$

מתאפסת, כלומר

ב. (10 נקודות) תהי f פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} וניח שקיים $c \in \mathbb{R}$ עבורו מתקיים $f'(c) > 0$.

$$f(x) > f(c)$$

הוכיחו שקיים $x > c$ ממשי המקיים

שאלת בונוס (7 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו שקיים $c \in \mathbb{R}$ עבורו $f(c) = \frac{c}{1-c^2}$.

בהצלחה!