

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132) מועד ב' (03.03.16)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: ויקטוריה בליזניאבסקי, דר' מנחם שלוסברג

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון פשוט. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \leq 1$.

שאלה 2 (12 נקודות)

הוכיחו כי הסדרה הרקורסיבית הבאה מתכנסת וחשבו את גבולה:

הסדרה מוגדרת על-ידי הכלל $a_1 = 10, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$

שאלה 3

א. (20 נקודות) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ונניח שהפונקציה $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$ רציפה וגזירה

בנקודה $x = 1$. מצאו את a, b (נמקו היטב!).

ב. (10 נקודות) מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $(3, 2)$ עבור העקומה $y^4 + 5y^2 = x^4 - 5x^2$.

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר (הוכיחו את תשובתכם).

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(\ln 3)^n}$ (7 נקודות)

ב. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{0.3} n}$ (7 נקודות)

ג. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ (7 נקודות)

שאלה 5

א. (15 נקודות) נניח ש- f היא פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} המקיימת $f'(x) \geq \frac{3}{2}$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נתון ש-

$$f(1) = 2 \text{ . הוכיחו ש-} f(5) \geq 8$$

ב. (10 נקודות) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $f(2x) = 2f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו

שם קיים $L \in \mathbb{R}$ עבורו $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$, אזי $L = 0$.

שאלה בונוס (7 נקודות)

יהיו $x_0, a \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה גזירה באינטרוול (x_0, ∞) המקיימת $f'(x) \geq a > 0$ לכל $x > x_0$.

הוכיחו ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

בהצלחה!