

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132) מועד ג' (18.08.16)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: ויקטוריה בליזניאבסקי, דר' מנחם שלוסברג

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון פשוט. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \leq 1$.

שאלה 2 (12 נקודות)

א. (7 נקודות) מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\ln n)^2}$, במידה וקיים.

ב. (5 נקודות) מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n)}$ (נמקו היטב את תשובתכם!).

שאלה 3

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{א. (20 נקודות) נתבונן בפונקציה}$$

(1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה. הוכיחו את תשובתכם!

(2) מצאו את כל הנקודות ב- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ בהן הפונקציה גזירה. הוכיחו את תשובתכם!

ב. (10 נקודות) מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $(3, 2)$ עבור העקומה $y^4 + 5y^2 = x^4 - 5x^2$.

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר (הוכיחו את תשובתכם).

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(\ln 5)^n}$ (7 נקודות)

ב. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^n)}$ (7 נקודות)

ג. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n + \ln n}$ (7 נקודות)

שאלה 5

א. (15 נקודות) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהיו $a < b \in \mathbb{R}$ המקיימים

$$f(a) \geq b, f(b) \leq a.$$

הוכיחו שקיים $x \in (a, b)$ עבורו $f(x) = x$.

ב. (10 נקודות) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $f(2x) = 2f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו

$$\text{שם קיים } L \in \mathbb{R} \text{ עבורו } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L, \text{ אזי } L = 0.$$

שאלה בנוס (7 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח שגם פונקציית הנגזרת f' היא רציפה על כל \mathbb{R} . נניח בנוסף

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \text{ קיימים (סופיים). הוכיחו ש-} \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

בהצלחה!