

מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132) מועד **ב** (08.04.18)

מרצה: פרופסור מיכאל כץ

מתרגל: דורון פרלמן

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות!). כל חומר עזר פרט למחשבון-אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (24 נקודות – 8 נקודות לכל סעיף)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. יהי H מספר אינסופי חיובי ויהי $b \in \mathbb{R}$. אזי $H - b$ הוא מספר אינסופי חיובי.
ב. תהיינה f, g שתי פונקציות ממשיות ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם הגבולות $\lim_{x \rightarrow c} f(x), \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

לא קיימים, אז הגבול $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$ לא קיים.

- ג. תהי f פונקציה ממשית חיובית המוגדרת בכל נקודה ב- \mathbb{R} ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ קיים, אז $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$.

[שימו לב: "חיובית" אומר ש- $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$].

שאלה 2 (26 נקודות)

I. נתונה פונקציה ממשית $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת באמצעות:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- א. (7 נקודות) באילו נקודות f רציפה?
ב. (8 נקודות) מצאו את f' בנקודות שבהן f גזירה.
ג. (6 נקודות) האם f' רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$? אם כן – הוכיחו; אם לא – סווגו את נקודות האי-רציפות שלה (סליקה, מין ראשון, מין שני).

II. (5 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שאינו קיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x \right)$$

נמקו היטב כל צעד בתשובתכם!

שאלה 3 (22 נקודות)

- א. (10 נקודות) הוכיחו ש- $ex \leq e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
- ב. (12 נקודות) תהיינה f, g שתי פונקציות ממשיות רציפות ב- $[a, b]$ וגזירות ב- (a, b) , עבור $a < b \in \mathbb{R}$. נתון ש- $f(a) = g(a)$ ו- $f'(x) < g'(x)$ לכל $x \in (a, b)$. הוכיחו ש- $f(b) < g(b)$.

שאלה 4 (14 נקודות)

- א. (8 נקודות) הוכיחו שהסדרה הבאה היא מונוטונית: $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.
- ב. (6 נקודות) מצאו את הגבול הבא אם קיים, ואחרת הוכיחו שאינו קיים:
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 6}{(n+1)! + 8}$$

שאלה 5 (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$$

ב.
$$\sum_{n=15}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$$

שאלת בונוס (10 נקודות)

תהי f פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} ונניח ש- f' רציפה ב- \mathbb{R} . יהיו $a < b \in \mathbb{R}$ ונניח ש-
 $f(a) = f(b)$ וגם $f'(a) = f'(b)$.

הוכיחו שקיימים $x_1, x_2 \in (a, b)$ כך ש- $x_1 \neq x_2$ וגם $f'(x_1) = f'(x_2)$.

[שימו לב! יש להוכיח מנימוקים מתמטיים בלבד! אי אפשר להוכיח בציורים ו/או בדוגמאות.
נימוקים בסגנון "לפי ההגיון מתקיים כך וכך" לא יתקבלו!]

בהצלחה!