

מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (89-132) מועד **א** (16.02.2017)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: אלעד עטיי, מרדכי יעקב, אריאל ויצמן, אורלי בארשבסקי

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון גרפי). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט הנקודה הקריטית:

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I . תהי $c \in I$ ונניח שיש ל- f מינימום או מקסימום ב- c .
אחד מהבאים מתקיים בהכרח:

א. c היא נקודת קצה של I ;

ב. $f'(c)$ אינה מוגדרת;

ג. $f'(c) = 0$.

שאלה 2

א. (7 נקודות) תהי סדרה הנתונה באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$$

הוכיחו ש- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת, וחשבו את גבולה.

ב. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{n+1} + 2^{2n}}$.

שאלה 3

א. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^3 - x) - 3}{x}$.

ב. (20 נקודות) נתבונן בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} a \ln(e^3 + 2 - x) & x < 2 \\ x^2 + bx + a & 2 \leq x < 3 \\ \frac{ax + 9b}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) & 3 \leq x \end{cases}$$

1. עבור אילו ערכי $a, b \in \mathbb{R}$ הפונקציה הנ"ל רציפה ב- \mathbb{R} ?

2. הציבו בפונקציה f את ערכי ה- a, b שמצאתם בסעיף הקודם. האם f גזירה

בנקודה $x = 2$? הוכיחו את תשובתכם!

ג. (5 נקודות) התבוננו שוב בפונקציה f מסעיף ב' והציבו בה את הערכים $a = 1, b = 1$.

נתון שעבור הערכים האלה, f אינה רציפה בנקודה $x = 2$. מהו סוג אי-הרציפות

שם (סליקה, מין ראשון, מין שני)? הוכיחו את תשובתכם!

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר. הוכיחו את

תשובתכם!

א. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)^n}{n!}$ עבור $a \in \mathbb{R}$.

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-1}$.

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

שאלה 5

- א.** (15 נקודות) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בכל נקודה. נניח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: $f'(x) \leq -1$, ובנוסף נתון כי $f(1) = 2$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (1,5)$ כך ש- $f(c) = 0$.
- ב.** (10 נקודות) תהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר פונקציה חדשה $f(x) = xg(x) + \sin x$. הוכיחו ש- f גזירה בנקודה $x = 0$ ומצאו את $f'(0)$ (שימו לב כי תשובתכם יכולה להיות תלויה ב- g).

שאלת בונוס (7 נקודות)

- תהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נתון שקיים $x_0 \in \mathbb{R}$ המקיים: $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \neq 0$.
הוכיחו שקיימת סביבה של x_0 שבה g מחליפה סימן, כלומר, הסביבה מכילה לפחות נקודה אחת x_1 עבורה $g(x_1) > 0$ ולפחות נקודה אחת x_2 עבורה $g(x_2) < 0$.

בהצלחה!