

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה אוקלידית ולא-אוקלידית (88-537)

סמסטר א', מועד א': 18.02.19

מרצה: פרופ' מיכאל כץ

זמן בחינה: שלוש שעות

יש לענות על כל השאלות 1-5 ולתת נימוק והסבר. שאלת בונוס היא רשות.

1. (15 נקודות) יהיו A, B, C, A', B', C' נקודות על מעגל Ω . נגדיר ישרים $d = AB'$, $d' = A'B$, $f = AC'$, $f' = A'C$, $g = BC'$, $g' = B'C$. נגדיר נקודות $L = d \cap d'$, $M = f \cap f'$, $N = g \cap g'$.

- לנסח משפט Pascal באמצעות הסימונים לעיל ולתרגם ע"י פולריות למשפט חדש.
- לאייר את המשפט החדש של סעיף א ע"י סרטוט מסודר ומפורט.
- בהנחת מפתט Pascal, להוכיח את המשפט החדש. ניתן להשתמש במשפטים שהוכחנו בכיתה.

2. (25 נקודות) נקודה x נקראת נקודת שבת של f אם $f(x) = x$.

- מצא העתקה פרויקטיבית f השולחת נקודות $0, 1, \infty$ לנקודות $0, 3, \infty$.
- מהן הנקודותיה השבת של f אם יש?
- מצא העתקה פרויקטיבית g השולחת $3, -3, 9$ לנקודות $0, -6, 6$.
- מהן הנקודותיה השבת של g אם יש?

3. (25 נקודות) מצא טרנספורמציה פרואקטיבית המעבירה:

- מעגל $x^2 + y^2 = 1$ לחתך חרוט $2XY + 1 = 0$.
- מעגל $x^2 + y^2 = 1$ לחתך חרוט $X^2 - 2XY + 1 = 0$.
- מעגל $x^2 + y^2 = 1$ לחתך חרוט $-4X^2 - 9Y^2 + 1 = 0$.

4. (20 נקודות)

- הגדר בצורה מפורטת את המושגים של פרספקטיביות ופרואקטיביות בין ישרים פרואקטיביים במישור פרואקטיבי.
- הוכח שפרואקטיביות בין שני ישרים שונים היא תמיד הרכבה של שתי פרספקטיביות.
- האם כל פרואקטיביות בין ישר ℓ לעצמו היא הרכבה של מספר סופי של פרספקטיביות?

5. (15 נקודות) יהיו A, B, C, A', B' נקודות נתונות במישור. תנו בנייה מפורטת בשלבים, המתחילה עם ישר שרירותי x דרך A ומיצרת נקודה $Y \in x$ (בדרך כלל $Y \neq A$) הנמצאת על החתך החרוט העובר דרך A, B, C, A', B' .

(שאלת בונוס 10 נקודות) תהי P נקודה במישור הנמצאת בתוך אליפסה E . יהי XY מיתר של E העובר דרך נקודה P . יהיו s, t משיקים לאליפסה בנקודות X, Y ונגדיר $A = s \cap t$. באופן דומה יהי $X'Y'$ מיתר אחר דרך P , s', t' משיקים ב X', Y' וגם $A' = s' \cap t'$. נתבונן בישר $p = AA'$. הוכח או הפרך: בהכרח ישר p הוא פולרי לנקודה P .

ב ה צ ל ח ה !