

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה אוקלידית ולא-אוקלידית (537-88)

סמסטר א', מועד א': 19.03.24

מרצה: פרופ' מיכאל כץ

זמן בחינה: שלוש שעות

יש לענות על השאלות 1-4 ולתת נימוק והסבר.

שאלת בונוס 8 נקודות.

1. (25 נקודות)

א. יהיו A, B, C, A', B' נקודות נתונות במישור. תנו בנייה מפורטת המתחילה עם ישר שרירותי x דרך A ומיצרת נקודה $X \in x$ הנמצאת על חתך חרוט העובר דרך A, B, C, A', B' .

ב. מצא טרנספורמציה פרואקטיבית המעבירה מעגל $x^2 + y^2 = 1$ לחתך חרוט $XY + 1 = 0$.

2. (25 נקודות) נתבונן בשדה $F = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$ בעל 11 אברים. יהי

A המישור האפיני מעל F , יהי FP^1 הישר הפרויקטיבי מעל F , יהי FP^2 המישור הפרויקטיבי מעל F .

- א. מצא מספר נקודות ב- FP^1 ומספר נקודות ומספר ישרים ב- A .
ב. מצא מספר נקודות ומספר ישרים ב- FP^2 .

3. (25 נקודות) בהמשך לשאלה הקודמת:

ג. מצא מספר נקודות חיתוך ב FP^2 בין זוג ישרים פרויקטיביים מוגדרים ע"י משוואות $x^3 + 3x^2 + 5x = 0$ ו $4x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ (עם מקדמים בשדה F) בקואורדינטות הומוגניות.

ד. מצא מספר נקודות חיתוך ב FP^2 בין זוג ישרים פרויקטיביים מוגדרים ע"י משוואות $2x^3 - x^2 + 3x = 0$ וגם $3x^3 + 4x^2 - x = 0$ בקואורדינטות הומוגניות.

4. (25 נקודות) יהי $R(A, B, C, D_k)$ היחס הכפול של נקודות ב CP^1 כאשר $A = \infty$,

$$C = 1, B = 0 \text{ נניח } D_k = \frac{1}{2}(1 + ik\sqrt{3}), \text{ כאשר } k \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1}.$$

א. מצא כל הערכים האפשריים השונים של היחס הכפול תחת כל

התמורות של הרביעיה (A, B, C, D_k) כאשר $k = 0$.

ב. מצא כל הערכים האפשריים השונים של היחס הכפול תחת כל

התמורות של הרביעיה כאשר $k = 1$.

ג. יהי $f(k)$ מספר הכולל של ערכים שונים זה מזה של היחס הכפול

תחת כל התמורות של הרביעיה (A, B, C, D_k) . חשב $f(k)$

כפונקציה מפורשת של האינדקס $k \in \mathbb{Z}$.

(שאלת בונוס: 8 נקודות) להוכיח שכאשר A באינסוף, היחס הכפול

$$k = R(A, B, C, D) \text{ הוא סקלר עבורו } D = (1-k)B + kC.$$

ב ה צ ל ח ה !