

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132)

תשע"ט, מועד א'

מרצים: פרופ' מיכאל כץ, ד"ר לואי ג'נינגס, אלעד עטייא, דורון פרלמן.
מתרגלים: רועי אבל, אורלי בארשבסקי, אבי כדריה, עקיבה מלכה, דורון פרלמן.

משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.
מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1 (21 נקודות)

א. (7 נק') יהיו f, g פונקציות אשר לא רציפות ב- x_0 . הוכיחו או הפריכו:
 $f + g$ לא רציפה ב- x_0 .

ב. (7 נק') יהיו $a \approx a', b \approx b'$ מספרים היפרממשיים. הוכיחו או הפריכו:
 $a + b \approx a' + b'$.

ג. (7 נק') תהי f פונקציה ממשית גזירה ב- (a, b) ותהי $x_0 \in (a, b)$ כך ש- $f''(x_0) = 0$. הוכיחו או הפריכו: לא נקודת קיצון מקומי של $f(x)$.

שאלה 2 (22 נקודות)

א. (11 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ויהי $a \in \mathbb{R}$. נגדיר פונקציה חדשה:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)\sin^2 x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי a הפונקציה $g(x)$ רציפה לכל x ממשי? נמקו.

ב. (11 נק') עבור ערכי a שמצאתם בסעיף א', הראו כי הפונקציה $g(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$ וחשבו את נגזרתה שם (כלומר בטאו את התוצאה באמצעות הפונקציה $f(x)$).

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (11 נק') הוכיחו כי לפולינום $f(x) = \frac{5}{7}x^7 + x^3 + x + 10$ יש שורש ממשי אחד בלבד.

ב. (11 נק') הוכיחו שלכל $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ מתקיים

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b) - \tan(a) < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

שאלה 4 (22 נקודות)

א. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\pi n^2|}{n^2}$ (באשר $[x]$ היא פונקציית הערך השלם כלומר העיגול כלפי מטה של המס' הממשי x).

ב. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n) \cdot \ln(e^{7n} - 6n)}{n}$.

שאלה 5 (21 נקודות)

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \sqrt{n}}$

ב. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{(n^2)}}{(n!)^3}$

ג. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^{5779}}{(\ln 2019)^n}$

בהצלחה!