

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132)

תשע"ט, מועד א'

מרצה: פרופ' מיכאל כץ.

מתרגל: דורון פרלמן.

משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1 (21 נקודות)

א. (7 נק') יהיו f, g פונקציות אשר לא רציפות ב- x_0 . הוכיחו או הפריכו:
 $f + g$ לא רציפה ב- x_0 .

הטענה לא נכונה. למשל נסתכל על

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

הקבועה 0 שכמובן רציפה ב-0.

ב. (7 נק') יהיו $a \approx a', b \approx b'$ מספרים היפרממשיים. הוכיחו או הפריכו:
 $a + b \approx a' + b'$.

הטענה נכונה. הוכחה: $a \approx a'$ כלומר $a - a' = \epsilon$ באשר ϵ

אינפיניטסימל, וכן $b \approx b'$ כלומר $b - b' = \delta$ באשר δ אינפיניטסימל.
 כעת $\delta + \epsilon = a + b - (a' + b') = a - a' + b - b' = \epsilon + \delta$ כלומר $a + b \approx a' + b'$

ג. (7 נק') תהי f פונקציה ממשית גזירה ב- (a, b) ותהי $x_0 \in (a, b)$ כך ש- $f''(x_0) = 0$. הוכיחו או הפריכו: לא נקודת קיצון מקומי של $f(x)$.

הטענה לא נכונה. למשל נסתכל על $f(x) = x^4$ אז $f''(x) = 12x^2$ כלומר $f''(0) = 0$ אך 0 נקודת מינימום מקומי.

שאלה 2 (22 נקודות)

א. (11 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ויהי $a \in \mathbb{R}$. נגדיר פונקציה חדשה:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)\sin^2 x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי a הפונקציה $g(x)$ רציפה לכל x ממשי? נמקו.
 ראשית, עבור $x \neq 0$ הפונקציה $g(x)$ רציפה לכל ערך a . שנית, בנקודה $x=0$ הגבול הוא

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin x = 1 \cdot 0 = 0$$

באשר הגבול הימני הוא 0 כי $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ הוא מס' ממשי כי f גזירה לכן רציפה.

לכן כדי ש- $g(x)$ תהיה רציפה ב-0 צריך להתקיים $a = 0$.

ב. (11 נק') עבור ערכי a שמצאתם בסעיף א', הראו כי הפונקציה $g(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$ וחשבו את נגזרתה שם (כלומר בטאו את התוצאה באמצעות הפונקציה $f(x)$).

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)\sin^2 x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin^2 x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = f(0) \cdot 1^2 = f(0)$$

באשר המעבר הלפני אחרון הוא כי $f(x)$ גזירה ובפרט רציפה.

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (11 נק') הוכיחו כי לפולינום $f(x) = \frac{5}{7}x^7 + x^3 + x + 10$ יש שורש ממשי אחד בלבד.

$$f(0) > 0$$

$$f(-2) < 0$$

הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[-2, 0]$ לכן לפי ערך הביניים יש $-2 < c < 0$ כך ש- $f(c) = 0$ כלומר הראנו שיש לפחות שורש ממשי אחד.

כמו כן, $f'(x) = 5x^6 + 3x^2 + 1 = 5(x^3)^2 + 3x^2 + 1 > 0$, בפרט הנגזרת לא מתאפסת בשום נקודה. לכן לפולינום יש לכל היותר שורש אחד כי לו היו לו 2 שורשים ביניהם הנגזרת היתה מתאפסת לפי משפט רול.

לכן לפולינום יש בדיוק שורש אחד.

ב. (11 נק') הוכיחו שלכל $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ מתקיים

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b) - \tan(a) < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

הפונקציה $f(x) = \tan(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) כי $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. לכן לפי משפט לגרנד' קיימת $a < c < b$ כך ש-

$$\frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\tan(b) - \tan(a)}{b-a}$$

כעת, $a < c < b$ לכן $\cos^2(a) > \cos^2(c) > \cos^2(b)$ כי $y = \cos(x)$

פונקציה יורדת בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ לכן $\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b}$ כלומר

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\tan(b) - \tan(a)}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}, \text{ מש"ל.}$$

שאלה 4 (22 נקודות)

א. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\pi n^2|}{n^2}$ (באשר $[x]$ היא פונקציית הערך השלם כלומר העיגול כלפי מטה של המס' הממשי x).

$$\pi n^2 - 1 \leq |\pi n^2| \leq \pi n^2$$

לכן

$$\frac{\pi n^2 - 1}{n^2} \leq \frac{|\pi n^2|}{n^2} \leq \frac{\pi n^2}{n^2}$$

הסדרה הימנית היא הסדרה הקבועה π הסדרה השמאלית היא הסדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\pi n^2|}{n^2} = \pi - \frac{1}{n^2}$$

השואפת ל- π לכן לפי משפט הסנדויץ π .

ב. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n) \cdot \ln(e^{7n} - 6n)}{n}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x) \cdot \ln(e^{7x} - 6x)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{7x} - 6x)}{x} =$$

$$\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{7x} - 6x)}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7e^{7x} - 6}{e^{7x} - 6x} =$$

$$\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{49e^{7x}}{7e^{7x} - 6} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{343e^{7x}}{49e^{7x}} = \frac{7\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n) \cdot \ln(e^{7n} - 6n)}{n} = \frac{7\pi}{2}$$

לכן גם

שאלה 5 (21 נקודות)

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \sqrt{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n! \sqrt{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n!}} = e^0 = 1$$

לכן גם $\frac{1}{n! \sqrt{n}} \rightarrow 1$ לכן הטור לא מקיים את התנאי ההכרחי, כלומר הוא

מתבדר.

ב. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{(n^2)}}{(n!)^3}$

נשתמש במבחן המנה:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3^{((n+1)^2)} (n!)^3}{((n+1)!)^3 3^{(n^2)}} = \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}$$

הסדרה הזו שואפת ל- ∞ לכן הטור מתבדר.

ג. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^{5779}}{(\ln 2019)^n}$

נשתמש במבחן השורש:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n \sqrt[n]{n})^{5779}}{\ln 2019} \rightarrow \frac{1}{\ln 2019} < 1$$

לכן הטור מתכנס בהחלט.

בהצלחה!