

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132, 88-132)

תשע"ט, מועד מיוחד

מרצים: פרופ' מיכאל כץ, ד"ר לואי ג'נינגס, אלעד עטייא, דורון פרלמן.
מתרגלים: רועי אבל, אורלי בארשבסקי, אבי כדריה, עקיבה מלכה, דורון פרלמן.

משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.
מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1 (21 נקודות)

- א. (7 נק') יהיו a, b מספרים היפרממשיים, ונתון כי $st(a)$ לא קיים. הוכיחו או הפריכו: $st(ab)$ גם הוא לא קיים.
- ב. (7 נק') יהי H מספר אינסופי חיובי ויהי a היפרממשי סופי. הוכיחו כי $H > a$.
- ג. (7 נק') יהיו f, g פונקציות המוגדרות לכל מספר ממשי. נתון כי הן אינן גזירות בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ אך הן כן גזירות בכל נקודה אחרת. הוכיחו או הפריכו: fg לא גזירה ב- x_0 .

שאלה 2 (22 נקודות)

תהי:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\arccos\left(\frac{1}{3}e^{\sin x}\right)} & x \leq 0 \\ \arctan(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \end{cases}$$

- א. (11 נק') מיצאו (ונמקו) באילו נקודות $f(x)$ רציפה, ובנקודות אי-הרציפות קיבעו את סוג אי-הרציפות (סליקה, סוג ראשון, סוג שני).
ב. (11 נק') מיצאו את $f'(x)$ בנקודות בהן $f(x)$ גזירה.

שאלה 3 (22 נקודות)

- א. (11 נק') הוכיחו כי הסדרה הבאה היא מונוטונית:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

- ב. (11 נק') תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בכל \mathbb{R} ונגדיר פונקציה חדשה $g(x)$ ע"י הנוסחא:

$$g(x) = f(x) + f(6-x)$$

- הוכיחו כי קיימת $x_0 \in \mathbb{R}$ עבורה הנגזרת של g מתאפסת, כלומר $g'(x_0) = 0$.

שאלה 4 (22 נקודות)

א. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

ב. (11 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 10^n + 15^n + \dots + 100^n}$.

שאלה 5 (21 נקודות)

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi n}{6n+11}$

ב. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 7^n}$

ג. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

בהצלחה!