

# מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)

## תשע"ט, מועד א'

מרצים: פרופ' מיכאל כץ, ד"ר לואי ג'נינגס, אלעד עטייא, דורון פרלמן.  
מתרגלים: רועי אבל, אורלי בארשבסקי, אבי כדריה, עקיבה מלכה, דורון פרלמן.

משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.  
מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

**שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.**

### שאלה 1 (21 נקודות)

א. (7 נק') תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $x_0$ ,  $g$  פונקציה שאיננה רציפה ב- $x_0$ . הוכיחו או הפריכו:  $f + g$  איננה רציפה ב- $x_0$ .

הטענה נכונה. הוכחה: נניח בשלילה ש- $f + g$  רציפה ב- $x_0$ . לכן  $(f + g) - f$  גם כן רציפה ב- $x_0$  כהפרש של רציפות, כלומר  $g$  רציפה ב- $x_0$  וזו סתירה להנחה.

ב. (7 נק') יהיו  $a \approx a'$ ,  $b \approx b'$  מספרים היפרממשיים. הוכיחו או הפריכו:  $ab \approx a'b'$ .

הטענה לא נכונה. נראה דוגמא נגדית: נבחר  $a = \epsilon$ ,  $a' = 2\epsilon$  באשר  $\epsilon$  מספר אינפיניטסימלי השונה מ-0. נבחר  $b = b' = \frac{1}{\epsilon}$ . אז  $ab = 1$ ,  $a'b' = 2$  לא קרובים אינסופית זה לזה.

ג. (7 נק') יהיו  $\delta, \epsilon$  מספרים אינפיניטסימליים חיוביים. הוכיחו או הפריכו:  $\epsilon^\delta$  מספר אינפיניטסימלי חיובי.

הטענה לא נכונה. נראה דוגמא נגדית: נסתכל על  $\epsilon^\epsilon$  באשר  $\epsilon$  מספר אינפיניטסימלי חיובי. נראה ש- $st(\epsilon^\epsilon) = 1$  ובפרט לא אינפיניטסימלי. אכן,  $st(\epsilon^\epsilon) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim e^{x \ln(x)} = e^{\lim x \ln(x)} = e^0 = 1$ .  
 כי  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim(-x) = 0$

### שאלה 2 (22 נקודות)

$$f(x) = \begin{cases} 6 \ln(e^3 + 2 - x) & x < 2 \\ x^2 + 4x + 6 & 3 > x \geq 2 \\ \frac{6x+36}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{א. (11 נק') תהי}$$

מיצאו את  $f'$  בנקודות בהן  $f$  גזירה. לפי כללי גזירה,

$f'(x)$

$$= \begin{cases} \frac{-6}{e^3 + 2 - x} & x < 2 \\ 2x + 4 & 3 > x > 2 \\ \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{6x+36}{\pi \sqrt{1 - \frac{1}{(x-2)^2}} (x-2)^2} & x > 3 \end{cases}$$

ונשאר לבדוק אם הפונקציה גזירה בנקודות  $x=2, x=3$ .

בנקודה  $x=2$  משמאל מקבלים לפי לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6 \ln(e^3 - x) - 18}{x} = \lim \frac{-6}{e^3 - x} = \frac{-6}{e^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2+x)^2 + 4(2+x) + 6 - 18}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 8 = 8$$

כלומר הפונקציה לא גזירה בנקודה  $x=2$ .  
בנקודה  $x=3$  מימין מקבלים לפי לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{6(3+x)+36}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{1+x}\right) - 27}{x} =$$

$$\lim \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{54+6x}{\pi} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x)^2}} (1+x)^2} = \infty$$

כי הביטוי הימני שואף לאינסוף ושאר הביטויים סופיים.  
כלומר הפונקציה לא גזירה בנק'  $x=3$ .

ב. (11 נק') האם  $f'$  רציפה לכל  $x \in \mathbb{R}$ ? אם לא – מיצאו את נקודות אי-הרציפות של  $f'$ , וסווגו אותן.

עבור  $x < 2$ , וכן עבור  $2 < x < 3$ , וכן עבור  $x > 3$ , הפונקציה  $f'$  גזירה כחיבור, חיסור, כפל, חילוק והרכבה של פונקציות רציפות (כי המכנים לא מתאפסים, השורשים חיוביים, ו-  $y = \arcsin(x)$  רציפה עבור  $-1 < x < 1$ ).

בנקודות  $x = 2, x = 3$  האנגזרת  $f'$  לא מוגדרת לכן ודאי לא רציפה.

נסווג את הנקודה  $x = 2$ : הגבול משמאל הוא  $\frac{-6}{e^3}$  ומימין הוא 8, כלומר נקודת אי-הרציפות היא ממין ראשון (קפיצה).

נסווג את הנקודה  $x=3$ : הגבול מימין ב- $x=3$  של

$$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) + \frac{-6x-36}{\pi \sqrt{1 - \frac{1}{(x-2)^2}} (x-2)^2}$$

הוא אינסופי (כי הביטוי הימני אינסופי והשמאלי סופי. הימני אינסופי כי המכנה שואף ל-0 בעוד המונה שואף ל-36), לכן נקודת אי-הרציפות היא ממין שני (עיקרית).

**שאלה 3 (22 נקודות)**

א. (11 נק') תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ . יהיו  $x_1, x_2 \in (a, b)$ .

הוכיחו כי קיימת  $x \in (a, b)$  כך ש-  $f(x) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ .

נגדיר  $g(x) = f(x) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ . זו פונקציה רציפה בקטע כי  $f$

רציפה שם.

$$g(x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2}$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2}$$

כלומר  $g(x_1) = -g(x_2)$ . לכן או ש-  $g(x_1) = 0$  או שאחד מבין  $g(x_1), g(x_2)$  חיובי והשני שלילי, ואז לפי ערך הביניים יש נקודה ביניהם בה  $g(c) = 0$ . בכל מקרה קיבלנו נק'  $x$  בקטע בה  $g(x) = 0$ . מש"ל.

ב. (11 נק') הוכיחו שלכל  $0 < a < b$  מתקיים  $\frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}$ .

לפי משפט לגרנז' עבור הפונקציה  $f(t) = \sqrt{t}$  בקטע  $[a, b]$  (בו היא רציפה וכן

גזירה בקטע הפתוח המתאים כי  $a > 0$ ) קיימת  $a < c < b$  כך ש-  $\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$ .

כיוון ש-  $a < c < b$  מתקיים  $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{b}}$  כלומר  $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{b}}$ .

כדרוש.

## שאלה 4 (22 נקודות)

א. (11 נק') חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

$$4^n \leq 2^n + 3^n + 4^n \leq 3 \cdot 4^n$$

לכן

$$4 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq 4 \cdot \sqrt[n]{3}$$

הסדרה הימנית שואפת ל-4 וכך גם הסדרה השמאלית, לכן לפי משפט הסנדויץ' הסדרה הנתונה גם היא שואפת ל-4.

ב. (11 נק') חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 - 1}{2n^3 + 9} \right)^{3n^3 + 9}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 - 1}{2n^3 + 9} \right)^{3n^3 + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 + 9 - 10}{2n^3 + 9} \right)^{3n^3 + 9}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-10}{2n^3 + 9} \right)^{3n^3 + 9}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{-10}{2n^3 + 9} \right)^{\frac{2n^3 + 9}{-10}} \right)^{\frac{-10(3n^3 + 9)}{2n^3 + 9}} = e^{-15}$$

לחלופין ע"י הטריק של  $e^{\ln(\cdot)}$  ומעבר לפונקציה המתאימה בשביל להשתמש בלופיטל.

### שאלה 5 (21 נקודות)

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. (7 נק')  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

נבדוק בהחלט: צריך לבדוק את ההתכנסות של  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ . הסדרה

$\frac{1}{n \ln n}$  יורדת לכן ניתן להשתמש בעיבוי: הטור הוא חבר של הטור

המוחלטים לא מתכנס.  $\sum \frac{2^n}{2^{n \ln(2^n)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{n}$  המתבדר, לכן מתבדר. כלומר טור הערכים

נבדוק התכנסות: הסדרה  $\frac{1}{n \ln n}$  יורדת ושואפת ל-0 לכן לפי מבחן לייבניץ

הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$  מתכנס.

לסיכום: הטור מתכנס בתנאי.

ב. (7 נק')  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7n^2}{\sqrt{5n^6-n+14}}$

זה טור חיובי. נבצע מבחן השוואה גבולי עם הטור  $\sum \frac{1}{n}$ :

$$\frac{2n+7n^2}{\sqrt{5n^6-n+14}} \cdot \frac{n}{1} = \frac{2n^2+7n^3}{\sqrt{5n^6-n+14}} = \frac{2n^{-1}+7}{\sqrt{5-n^{-5}+14n^{-6}}}$$

$$\rightarrow \frac{7}{\sqrt{5}}$$

כלומר הטורים חברים. לכן מהתבדרות  $\sum \frac{1}{n}$  מקבלים את התבדרות הטור שלנו.

ג. (7 נק')  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}$

נבדוק התכנסות בהחלט: צריך לבדוק את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n^2)|}{n^{5/4}}$ .

מתקיים  $\frac{|\sin(n^2)|}{n^{5/4}} \leq \frac{1}{n^{5/4}}$  לכן מהתכנסות  $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$  שהוא טור-p עם  $p > 1$

מקבלים את התכנסות  $\sum \frac{|\sin(n^2)|}{n^{5/4}}$  (מבחן השוואה ראשון).

כלומר הטור מתכנס בהחלט.

**בהצלחה!**