

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132) מועד א' (05.02.15)

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

ניקוד: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

שאלה 1

הוכיחו את משפט Rolle:

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על הקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a, b) . אם $f(a) = f(b) = 0$ אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

שאלה 2

א. מצאו את הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$, במידה וקיים.

ב. הוכיחו/הפריכו: כל סדרה חסומה היא סדרת קושי (Cauchy).

שאלה 3

א. הוכיחו שהפונקציה הבאה גזירה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ וחשבו את נגזרתה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ב. מצאו $\frac{dy}{dx}$ עבור $x = y^4 + y^2 + 1$ ($y \geq 0$).

(ניתן להשאיר את התשובה כפונקציה של y .)

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{10n+5}$

$$; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \text{ב.}$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n} \quad \text{ג.}$$

שאלה 5

- א. יהי I קטע פתוח כלשהו ותהי $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בנקודה $x_0 \in I$. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (x - x_0)g(x)$ גזירה בנקודה x_0 .
- ב. תהי f פונקציה רציפה המקיימת $f(x + 2\pi) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו שקיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

שאלת בונוס

- תהי f פונקציה ממשית המקיימת $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$ לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. הוכיחו ש- f היא פונקציה קבועה.

בהצלחה!