מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)

פתרון מועד א' (05.02.15)

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

ניקוד: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

שאלה 1

הוכיחו את משפט Rolle:

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על הקטע הסגור $\left[a,b\right]$ וגזירה על הקטע הפתוח $\left(a,b\right)$. אם $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c\in\left(a,b\right)$ כך ש- $f'\left(c\right)=0$.

פתרון

לפי הנתון f רציפה על $\left[a,b\right]$ ולכן לפי משפט ויירשטראס היא מקבלת מינימום ומקסימום בקטע זה. נסמן את הערך המקסימלי ב- M ואת הערך המינימלי ב- m. מכיוון ש- $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ מתקיים: $M\geq 0 \ \wedge\ m\leq 0$.

נפצל למקרים:

1. $M\geq 0 \ \wedge\ m\leq 0$

   במקרה זה f היא פונקציית האפס ($\forall x\in\left[a,b\right]: f\left(x\right)=0$) ולכן לכל $c\in\left[a,b\right]$ מתקיים $f'\left(c\right)=0$.

2. $M>0$

   נסמן ב- x_1 את הנקודה בה המקסימום מתקבל, כלומר $f\left(x_1\right)=M$. לפי משפט הנקודה הקריטית ידוע שמתקיים אחד מהבאים:

א. x_1 היא נקודת קצה

מקרה זה לא ייתכן, שכן נתון כי f מתאפסת בקצוות ואילו אצלנו מתקיים $f(x_1)=M>0$. לכן x_1 היא נקודה פנימית.

ב. $f'(x_1)$ אינו מוגדר

לא ייתכן, שכן לפי הנחת המשפט הפונקציה גזירה לכל נקודה פנימית $x\in(a,b)$.

ג. $f'(x_1)=0$

מכיוון ששני התנאים הקודמים אינם מתקיימים, נובע שאכן $f'(x_1)=0$. לכן נבחר $c=x_1$ ונקבל הדרוש.

3. $m<0$

מראים (באותו אופן כמו במקרה השני) שהנקודה הרצויה היא הנקודה בה מתקבל המינימום.

<u>שאלה 2</u>

א. מצאו את הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$, במידה וקיים.

<u>פתרון</u>

מתקיים $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}=\frac{(n+1)^n}{n\cdot n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0\cdot e=0.$$

ב. הוכיחו/הפריכו: כל סדרה חסומה היא סדרת קושי (Cauchy).

<u>פתרון</u>

הפרכה: הסדרה המוגדרת על-ידי האיבר הכללי $a_n=(-1)^n$ היא חסומה, אך אינה סדרת Cauchy שכן אינה מתכנסת.

<u>שאלה 3</u>

א. הוכיחו שהפונקציה הבאה גזירה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ וחשבו את נגזרתה:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

<u>פתרון</u>

אם $x \neq 0$ ניתן לגזור לפי כללי הגזירה ולקבל $f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

עבור $x=0$ נגזור לפי ההגדרה:

$$f'(0)=\operatorname{st}\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right)=\operatorname{st}\left(\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right)=\operatorname{st}\left(\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}\right)=$$

$$=\operatorname{st}\left(\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)$$

מכיוון ש- $\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}$ חסום בין (-1) ל- 1, זהו מספר סופי ולכן $\Delta x\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}$ הוא אינפיניטסימלי. לכן $f'(0)=0$.

לסיכום:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

ב. מצאו $\dfrac{dy}{dx}$ עבור $x=y^4+y^2+1$ $(y\geq 0)$.

(ניתן להשאיר את התשובה כפונקציה של y.)

<u>פתרון</u>

נגזור תחילה את x לפי y: $\dfrac{dx}{dy}=4y^3+2y$. לפי משפט הפונקציה ההפוכה מתקיים

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3+2y}.$$

<u>שאלה 4</u>

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

א. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10n+5}$$

פתרון

נתבונן באיבר הכללי של הטור: $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{10n+5}$. קל לראות שהגבול $\lim_{n\to\infty}a_n$ לא קיים, שכן עבור $H\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ זוגי נקבל $\mathrm{st}(a_H)=-\frac{1}{10}$ ואילו עבור H אי-זוגי נקבל $\mathrm{st}(a_H)=\frac{1}{10}$.

לסיכום: האיבר הכללי של הטור אינו שואף לאפס ולכן הטור <u>מתבדר</u>.

ב. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

פתרון

נבדוק תחילה האם הטור מתכנס בהחלט. כלומר נבדוק את התכנסות הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n+1}\le\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ מתבדר.

סיכום ביניים: הטור אינו מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי.

הסדרה $\left\langle\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\rangle$ היא יורדת ומתכנסת לאפס. לכן לפי משפט לייבניץ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ מתכנס.

לסיכום: הטור <u>מתכנס בתנאי</u>.

ג. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ne^n}$$

פתרון

נשתמש במבחן השורש.

$$.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{ne^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{ne}}=\frac{1}{e}<1$$

לפי מבחן המנה, הטור מתכנס.

שאלה 5

א. יהי I קטע פתוח כלשהו ותהי $g:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בנקודה $x_0\in I$. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=(x-x_0)g(x)$ גזירה בנקודה x_0.

פתרון

נרשום את הגדרת הנגזרת בנקודה x_0. יהי $\Delta x\neq 0$ אינפי'. אזי:

$$f'(x_0)=\mathrm{st}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)=\mathrm{st}\left(\frac{(x_0+\Delta x-x_0)g(x_0+\Delta x)-(x_0-x_0)g(x_0)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\mathrm{st}\left(\frac{\Delta x\cdot g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\right)=\mathrm{st}\left(g(x_0+\Delta x)\right)$$

מכיוון ש- g רציפה ב- x_0, לפי הגדרת הרציפות מתקיים $\mathrm{st}\left(g(x_0+\Delta x)\right)=g(x_0)$ ולכן f גזירה ב- x_0 ומתקיים $f'(x_0)=g(x_0)$.

ב. תהי f פונקציה רציפה המקיימת $f(x+2\pi)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

פתרון

נגדיר פונקציה חדשה $h(x)=f(x+\pi)-f(x)$. זוהי פוקנציה רציפה כהפרש של שתי פונקציות רציפות. נראה שקיימת נקודה x_0 עבורה $h(x_0)=0$ ומכאן נקבל הדרוש.

לשם כך נשתמש במשפט ערך הביניים.

מתקיים:

$$h(0)=f(0+\pi)-f(0)=f(\pi)-f(0)$$

$$h(\pi)=f(\pi+\pi)-f(\pi)=f(2\pi)-f(\pi)$$

נשים לב כי $f(2\pi)=f(0+2\pi)=f(0)$.

לכן:

$$h(0)=f(\pi)-f(0)$$

$$h(\pi)=f(0)-f(\pi)$$

- אם $f(0)=f(\pi)$ סיימנו, שכן אז מתקיים, למשל, ש- $h(0)=0$.
- אם $f(0)>f(\pi)$ או $f(0)<f(\pi)$ אזי הביטויים $h(0),h(\pi)$ הם בעלי סימנים מנוגדים (אחד חיובי ואחד שלילי) ולכן לפי משפט ערך הביניים עבור הקטע $[0,\pi]$ קיימת נקודה $x_0\in(0,\pi)$ עבורה מתקיים $h(x_0)=0$. כלומר: $f(x_0+\pi)-f(x_0)=0$ וזה מוכיח את הדרוש.

<u>שאלת בונוס</u>

תהי f פונקציה ממשית המקיימת $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le(x_1-x_2)^2$ לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. הוכיחו ש- f היא פונקציה קבועה.

<u>פתרון</u>

לפי הנתון מתקיים $\left|x_1-x_2\right|\ge\frac{\left|f(x_1)-f(x_2)\right|}{\left|x_1-x_2\right|}$ $(*)$. נרצה להראות שהנגזרת של f מתאפסת לכל $x\in\mathbb{R}$. יהי $x\in\mathbb{R}$ ויהי $\Delta x\neq0$ אינפי'.

אזי $f'(x)=\mathrm{st}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$. נציב $x_1=x+\Delta x,\ \ x_2=x$ ב-$(*)$ ונקבל:

$\left|x+\Delta x-x\right|\ge\frac{\left|f(x+\Delta x)-f(x)\right|}{\left|x+\Delta x-x\right|}$, כלומר $\left|\Delta x\right|\ge\frac{\left|f(x+\Delta x)-f(x)\right|}{\left|\Delta x\right|}$. מכאן נובע שהביטוי $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|$ הוא אינפי' ולכן גם $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ הוא אינפי'. לכן $f'(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

כעת נותר להראות שהפוקנציה קבועה. מראים זאת באמצעות משפט הערך הממוצע (כפי שראינו בהרצאה, כאשר הוכחנו שאם הנגזרת של פוקנציה היא חיובית אזי הפוקנציה היא עולה וכד').

סוף