

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132) מועד ב' (03.03.15)

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

ניקוד: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

שאלה 1

הוכיחו את כלל השרשרת:

תהיינה f, h שתי פונקציות ממשיות ותהי $g = f \circ h$ ההרכבה שלהן (כלומר $g(t) = f(h(t))$). אזי לכל ערך של t שעבורו הנגזרות $f'(h(t)), h'(t)$ קיימות, גם הנגזרת $g'(t)$ קיימת ומתקיים:
$$g'(t) = f'(h(t))h'(t)$$

שאלה 2

א. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} (n! - 10^n)$, במידה וקיים.

ב. הוכיחו/הפריכו: כל סדרה מונטונית היא סדרת קושי (Cauchy).

שאלה 3

א. נתבונן בפונקציה $f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 1 \\ 4x & x > 1 \end{cases}$. האם היא רציפה? האם היא גזירה?

הוכיחו את תשובתכם!

ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $x = 3y^3 + 2y$ בנקודה $(x, y) = (5, 1)$ (ניתן להניח שהפונקציה הפיכה).

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

$$א. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$$

$$; \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)} \quad \text{ב.}$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad \text{ג.}$$

שאלה 5

א. תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 . הוכיחו שהגבול הבא קיים:

$$\cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

ב. תהי $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ פונקציה רציפה. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך ש-

$$\cdot f(x_0) = 2 \sin x_0$$

שאלה בנוס

תהיינה f, g שתי פונקציות גזירות על קטע (a,b) ונניח ש- $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in (a,b)$. נניח

בנוסף שקיימת נקודה $x_0 \in (a,b)$ עבורה מתקיים $f(x_0) = g(x_0)$. הוכיחו כי

$$\cdot f'(x_0) = g'(x_0)$$

בהצלחה!