

מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)

פתרון מועד ב' (03.03.15)

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

ניקוד: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

שאלה 1

הוכיחו את כלל השרשרת:

תהיינה f, h שתי פונקציות ממשיות ותהי $g = f \circ h$ ההרכבה שלהן (כלומר $g(t) = f(h(t))$). אזי לכל ערך של t שעבורו הנגזרות $f'(h(t)), h'(t)$ קיימות, גם הנגזרת $g'(t)$ קיימת ומתקיים:
$$g'(t) = f'(h(t))h'(t)$$

פתרון

נסמן $y = g(t) = f(h(t))$ ולכן $y = f(x), x = h(t)$.

יהי $\Delta t \neq 0$ אינפיניטסימל. נרצה להראות שהביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ קיים וסופי ו- $\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = g'(t)$.

לפי הנתון הנגזרת $h'(t)$ קיימת ולכן לפי משפט השינוי (עבור ה- Δt שבחרנו) נקבל ש- Δx המתאים הוא אינפיניטסימל.

הנגזרת $f'(x)$ קיימת לפי הנתון ולכן לפי משפט השינוי עבור ה- Δx הנ"ל מתקיים:

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$ עבור ε אינפיניטסימלי כלשהו. מכיוון ש- $\Delta t \neq 0$ ניתן לחלק בו ולקבל:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

נזכור כי $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ הוא מוגדר וסופי (שכן $\text{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = h'(t)$) ולכן $\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$

הוא אינפיניטסימל. לבסוף, הביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$ מוגדר ומתקיים

$$\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = f'(x)\text{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) + \text{st}\left(\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = f'(x)h'(t) + 0$$

ולכן $g'(t) = f'(x)h'(t)$

שאלה 2

- א. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} (n! - 10^n)$, במידה וקיים.
ב. הוכיחו/הפריכו: כל סדרה מונוטונית היא סדרת קושי (Cauchy).

פתרון

- א. מתקיים $n! - 10^n = \left(\frac{n! - 10^n}{10^n}\right) 10^n = \left(\frac{n!}{10^n} - 1\right) 10^n$. ראינו בהרצאה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{10^n} = \infty$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{10^n} = \infty$.
ב. הפרכה: הסדרה המוגדרת על-ידי האיבר הכללי $a_n = n$ היא מונוטונית עולה, אך אינה סדרת קושי שכן אינה מתכנסת.

שאלה 3

- א. נתבונן בפונקציה $f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 1 \\ 4x & x > 1 \end{cases}$. האם היא רציפה? האם היא גזירה?
הוכיחו את תשובתכם!
ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $x = 3y^3 + 2y$ בנקודה $(x, y) = (5, 1)$ (ניתן להניח שהפונקציה הפיכה).

פתרון

- א. ברור שלכל $x \neq 1$ הפונקציה רציפה ב- x . נבדוק את $x = 1$ מתקיים:
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x = 4 = f(1)$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 = 4 = f(1)$$
ולכן f רציפה ב- $x = 1$.
נבדוק גזירות.
ברור שהפונקציה גזירה ב- $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. נבדוק גזירות בנקודה $x = 1$.
יהי $\Delta x \neq 0$ אינפיניטסימל. נרצה לחשב את הביטוי הבא (במידה וקיים):
$$\text{st} \left(\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \right)$$
נחלק לשני מקרים:
1. $\Delta x > 0$. נקבל: $\text{st} \left(\frac{4(1 + \Delta x) - 4}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{4\Delta x}{\Delta x} \right) = 4$

$$2. \Delta x < 0. \text{ נקבל: } \operatorname{st}\left(\frac{4-4}{\Delta x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{0}{\Delta x}\right) = 0.$$

לביטוי $\operatorname{st}\left(\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}\right)$ יש ערכים שונים עבור $\Delta x \approx 0$ שונים ולכן הפונקציה אינה גזירה ב- $x=1$.

ב. אנו מעוניינים לחשב את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $(5,1)$. נגזור לשם כך את שני הצדדים של המשוואה

$$\text{לפי } x \text{ ונקבל: } 1 = 9y^2 \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} \text{ והשיפוע הוא } \frac{1}{11}.$$

שאלה 4

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

$$\text{א. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$$

פתרון

נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר, נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ מתכנס.

ניעזר במבחן המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot n!}{n!(n+1)2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

המוחלטים מתכנס, ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.

$$\text{ב. } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$$

פתרון

נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

ניעזר במבחן השוואה. מכיוון שמתקיים $\ln n < n$ מקבלים $\ln(\ln n) < \ln n$ ולכן

$$\frac{1}{\ln(\ln n)} > \frac{1}{n} \text{ הטור } \sum \frac{1}{n} \text{ מתבדר ולכן גם הטור } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)} \text{ מתבדר.}$$

נבדוק התכנסות בתנאי.

הסדרה $a_n = \frac{1}{\ln(\ln n)}$ היא יורדת ושואפת לאפס, ולכן מתקיימים תנאי משפט לייבניץ. לכן

הטור מתכנס.

לסיכום: הטור המקורי מתכנס בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad \text{ג.}$$

פתרון

ניעזר במבחן המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!}}{\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!n!(n+1)!}{(n+1)!(n+2)!(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{n+2} = 4 > 1$$

לכן, לפי מבחן המנה, הטור מתבדר.

שאלה 5

א. תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 . הוכיחו שהגבול הבא קיים:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

פתרון

נשים לב שמכיוון שהפונקציה גזירה בנקודה x_0 , הגבולות

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

קיימים ושניהם שווים ל- $f'(x_0)$.

כעת,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{-h} \right) \end{aligned}$$

הגבולות של שני הביטויים שבסוגריים שווים ל- $f'(x_0)$ (ושווה ל- $2f'(x_0)$).

ב. תהי $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ פונקציה רציפה. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך ש-

$$f(x_0) = 2 \sin x_0$$

פתרון

ניעזר במשפט ערך הביניים. נגדיר פונקציה חדשה $h(x) = f(x) - 2\sin x$ ונראה שקיימת נקודה בה h מתאפסת. נשים לב כי זוהי פונקציה רציפה על הקטע $[0,1]$ כהפרש של שתי פונקציות רציפות.

מתקיים $h(0) = f(0) - 2\sin 0 = f(0)$, ומכיוון ש- $f(0) \in [0,1]$ נקבל כי $h(0) \geq 0$

$$\text{כמו כן } h\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2 \cdot \frac{1}{2} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1$$

$$\text{מתקיים } f\left(\frac{\pi}{6}\right) \in [0,1] \text{ ולכן } f\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0 \text{ ולכן } h\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq 0$$

לכן, לפי משפט ערך הביניים עבור $h(x)$ בקטע $[0,1]$, נקבל כי קיימת נקודה

$$x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \text{ עבורה } h(x_0) = 0 \text{ וזה מוכיח הדרוש.}$$

שאלה בנוס

תהינה f, g שתי פונקציות גזירות על קטע (a,b) ונניח ש- $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in (a,b)$. נניח

בנוסף שקיימת נקודה $x_0 \in (a,b)$ עבורה מתקיים $f(x_0) = g(x_0)$. הוכיחו כי

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

פתרון

נגדיר פונקציה חדשה $h(x) = g(x) - f(x)$. זוהי פונקציה רציפה וגזירה על הקטע הפתוח (a,b) . מתקיים $h(x_0) = 0$ וכן לכל $x \in (a,b)$ כך ש- $x \neq x_0$ מתקיים $h(x) \geq 0$. לכן בנקודה x_0 יש ל- h נקודת מינימום.

x_0 היא לא נקודת קצה, בנוסף h גזירה בקטע הנתון ולכן, לפי משפט הנקודה הקריטית, נקבל

$$h'(x_0) = 0 \text{ מכאן } f'(x_0) = g'(x_0)$$

בהצלחה בהמשך השנה!