חשבון אינפיניטסימלי 3

באינפי 1,2 למדנו על פונק' $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהן פונק' של משתנה אחד x - $f(x)$.

יש גם פונק' של שני משתנים, כמו $f(x,y)=x^3e^{x^2y}$

וגם פונק' של כמה משתנים $f(x_1,\dots,x_n)$ כאשר $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$.

נוח לנו להביט על פונק' אלה כפונק' של משתנה אחד - $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

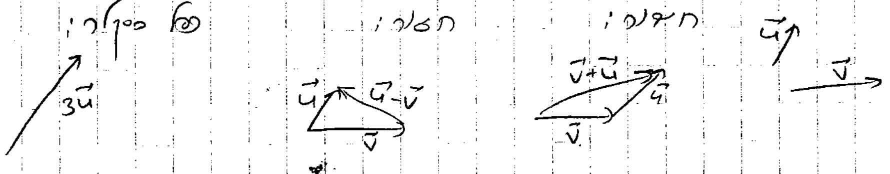
יש לפחות 3 הצגות של $\mathbb{R}^n$:

1. אוסף כל ה-n-יות של מס' ממשיים - $(x_1,\dots,x_n)$
2. מרחב גאומטרי של n ממדים.

הצגה זו מתקשרת להצגה הראשונה ע"י בחירת מע' צירים אורתוגונליים של $x_1,\dots,x_n$, ובהתאם מתאימים לכל נק' במרחב ע' קואורדינטות $x_1,\dots,x_n$.

3. מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{R}$.

"וקטור קלאסי" הוא כל דבר שיש לו גודל וכיוון - מוצג ע"י חץ שכיוונו כיוון הוקטור ואורכו אורך הוקטור.



הצגה 3 מתקשרת עם הצגה 1 ע"י בחירת בסיס (אוקלידי - בסיס אורתונורמלי) למרחב - $\vec e_1,\dots,\vec e_n$

ואז כרגיל, כל וקטור מקבל הצגה יחידה: $\vec v=\sum_{k=1}^{n} x_k\vec e_k=(x_1,\dots,x_n)$

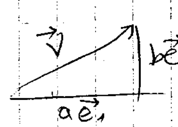
הצגה 3 מתקשרת עם הצגה 2 ע"י בחירת צירים אורתוגונליים $x_1,\dots,x_n$ ווקטורי יחידה $\vec e_1,\dots,\vec e_n$ שכיוון החיובי של הצירים. במסגרת זו וקטור (או חץ) שיוצא מהראשית $(0,\dots,0)$ ומסתיים בנק' $(x_1,\dots,x_n)$ הוא בדיוק הוקטור $x_1\vec e_1+\dots+x_n\vec e_n$.

כמו כן, הוקטור מ-$(x_1,\dots,x_n)$ עד $(y_1,\dots,y_n)$ הוא $\vec v=\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)\vec e_k$.

נשתמש בכל ההצגות הנ"ל באופן חופשי - בתקווה שלא נתבלבל.

<u>הערה:</u> יהי $\vec v\in\mathbb{R}^n$ וקטור כלשהו. "הנורמה" של $\vec v$ מסומנת $\|\vec v\|$ והיא האורך של $\vec v$.

ב-$\mathbb{R}^2$:



ואז - $\vec v=a\vec e_1+b\vec e_2$, ולפי פיתגורס: $\|\vec v\|=a^2+b^2$

ב-$\mathbb{R}^3$: אם $\vec v=a\vec e_1+b\vec e_2+c\vec e_3$ ולפי פיתגורס - $\|\vec v\|^2=\|\vec v_1\|^2+c^2=a^2+b^2+c^2$

באינדוקציה, אם - $\vec v=(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k\vec e_k$ שייך ל-$\mathbb{R}^n$, אז- $\vec v=\vec v_1+x_n\vec e_n$

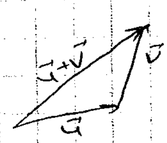
כאשר $x_1\in\mathbb{R}^{n-1}$ ולפי פיתגורס - $\|\vec v\|^2=\|\vec v_1\|^2+x_n^2$

ולפי אינדוקציה - $\|\vec v\|^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$

תכונות של הנורמה:

1. אי-שליליות: $\|V\|\ge 0$ ושוויון רק עבור $\vec{V}=\vec{0}$
2. המוגנות: $\|t\vec{V}\|=|t|\,\|\vec{V}\|$ עבור $\vec{V}\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$
3. אי-שוויון המשולש: $\|u+v\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{V}\|$

הסבר לג':



$\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

כי הדרך הקצרה בין 2 נק' היא על הישר המחבר ביניהן.

הכללת המושג נורמה:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. פונק' $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$ נקראת נורמה אם:

1. לכל $v\in V$, $\|v\|\ge 0$ עם שוויון רק עבור $v=0$.
2. $\|tv\|=|t|\,\|v\|$ לכל $t\in\mathbb{R}$ ו-$v\in V$
3. $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$ (נובע גם ש- $\|u-v\|\ge\big|\|u\|-\|v\|\big|$)

דוגמאות:

1. על $\mathbb{R}^n$ אפשר להגדיר $\|x\|_\infty=\|(x_1,\dots,x_n)\|=\max_{1\le k\le n}|x_k|$ ← נורמת אינסוף
2. על $\mathbb{R}^n$ אפשר להגדיר $\|x\|_1=\|(x_1,\dots,x_n)\|=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$
3. אם $[a,b]$ קטע ב-$\mathbb{R}$, $C([a,b])$ מוגדר להיות אוסף כל הפונק' הרציפות $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

קל לראות שזה מ"ו מעל $\mathbb{R}$ כי אם $f,g\in C([a,b])$ ו-$c\in\mathbb{R}$ אז $f(x)+cg(x)\in C([a,b])$.

נראה ש-$C([a,b])$ מ"ו ממימד ∞ מעל $\mathbb{R}$.

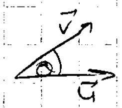
הוכחה: נתבונן בפונק' $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. נראה שהן בת"ל מעל $\mathbb{R}$. אם $\sum a_k x^k=p(x)\in C([a,b])$ אז הרי $p(x)$ פולינום ממעלה n. לכן $p(x)$ מתאפס לכל היותר ב-n נק' ב-$[a,b]$ אלא אם כן $p(x)\equiv 0$, כלומר לכל k - $a_k=0$.

במילים אחרות - צירוף לינארי (סופי) של הפונק' $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ שווה לפונק' אפס $\Longleftrightarrow$ כל מקדמי הצירוף מתאפסים.

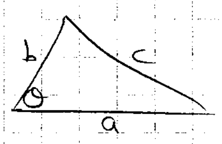
לפי הגדרה עבור אי-תלות זה אומר שהפונק' $\{x^n\}$ בת"ל.

כיוון שיש ∞ פונק' בת"ל ב-$C([a,b])$, בהכרח מימד המרחב הוא ∞.

המכפלה הפנימית או המכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{R}^n$:

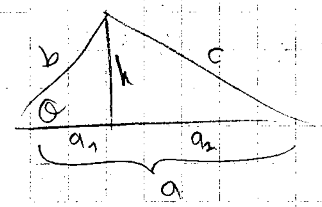
קלאסית -  מגדירים $\langle \vec u, \vec v\rangle = \vec u\cdot\vec v = \|\vec u\|\|\vec v\|\cos\theta$

המקור להגדרה - משפט הקוסינוס:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

הוכחה:

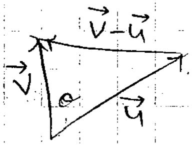


מתקיים מפיתגורס - $h^2=b^2-a_1^2=c^2-a_2^2$ כמו כן -

$$c^2=b^2+a_2^2-a_1^2=b^2+(a_2+a_1)(a_2-a_1)=b^2+a(\underbrace{a-a_1}_{a_2}+a_1)$$

לכן- $c^2=b^2+a^2-2aa_1=b^2+a^2-2ab\cos\theta$ וכך הוכחנו את משפט הקוסינוסים.

נחזור לוקטורים -



לפי המשפט - $\|\vec v-\vec u\|^2=\|\vec v\|^2+\|\vec u\|^2-2\|\vec u\|\|\vec v\|\cos\theta$

אם $\vec u=(u_1,\dots,u_n)$, $\vec v=(v_1,\dots,v_n)$ אז $\vec v-\vec u=(v_1-u_1,\dots,v_n-u_n)$

משפט הקוסינוסים הנ"ל אומר $\sum_{k=1}^n (v_k-u_k)^2=\sum_{k=1}^n v_k^2+\sum_{k=1}^n u_k^2-2\|\vec u\|\|\vec v\|\cos\theta$

נרצה להוכיח שזה שקול ל- $\|\vec v-\vec u\|^2=\|\vec v\|^2+\|\vec u\|^2-2\vec u\cdot\vec v$

נפתח סוגריים ונקבל: $\sum(\cancel{v_k^2}+\cancel{u_k^2}-2u_kv_k)=\sum\cancel{v_k^2}+\sum\cancel{u_k^2}-2\|\vec u\|\|\vec v\|\cos\theta$

נעביר אגף ונקבל - $\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|\cos\theta=\sum_{k=1}^n u_kv_k$

כלומר - $\vec u\cdot\vec v=\sum u_kv_k$

תכונות של המכפלה הפנימית:

1. סימטריות: $(v,u)=(u,v)$

2. בילינאריות: $(u, av_1+bv_2)=a(u,v_1)+b(u,v_2)$

$(au_1+bu_2, v)=a(u_1,v)+b(u_2,v)$

3. חיוביות: $(u,u)\geq 0$ עם שוויון רק עבור $u=0$.

אבסטרקציה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. פונ' $(\ ,\ ): V\times V\to\mathbb{R}$ נקראת מ"פ אם מקיימת 1,2,3.

דוגמאות מעבר ל-$\mathbb{R}^n$:

1. על $C([a,b])$ אפשר להגדיר מ"פ - $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$

2. ℓ^2 מוגדר להיות מרחב כל הסדרות הממשיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2<\infty$

קל להראות שזה מ"ו מעל $\mathbb{R}$. נוכל להגדיר מ"פ על ℓ^2 ע"י:

$x=(x_n)$, $y=(y_n)$ אז- $\langle x,y\rangle=\sum x_n y_n$.

הרבה מאוד דוגמאות כי כל מ"פ משרה נורמה על V. הנורמה - $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ או $\|x\|=\langle x,x\rangle$

עוד שם- $C([a,b])$ הנורמה המושרית על המ"פ אינה שווה לנורמה הסטנדרטית $\|f\|_{C([a,b])}=\max|f(x)|$

הערה: $\boxed{\text{המרחק}}$ בין 2 נק' $x=(x_1,..,x_n)$, $y=(y_1,..,y_n)$ ב-$\mathbb{R}^n$ הוא אורך הקטע המחבר את הנק' -

$d(x,y)$ = המרחק בין x,y. מוגדר ע"י - $\sum(y_k-x_k)^{1/2}$

ל-d יש 3 תכונות:

1. סימטריה: $d(x,y)=d(y,x)$

2. חיוביות- $d(x,y)\geq 0$ עם שוויון אם"ם $x=y$.

3. אי שוויון המשולש- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

הוכחה: 1,2 טריוויאליים מהגדרה.

לגבי 3 נראה ש- $d(x,y)=\|x-y\|$ ואז זה אי-שוויון המשולש לנורמה:

$$d(x,z)=\|z-x\|=\|z-y+y-x\|\leq\|z-y\|+\|y-x\|=d(y,z)+d(x,y)$$

הגדרה: יהי X קבוצה. $\boxed{\text{מטריקה}}$ על X היא פונקציה $d: X\times X\to\mathbb{R}$

שמקיימת את תכונות 1,2,3 למרחק:

דוגמאות:

1. אם X מרחב נורמי אז אפשר להגדיר מטריקה על X ע"י $d(x,y)=\|y-x\|=\|x-y\|$
2. על משטח במרחב (למשל פני כדור), אפשר להגדיר מרחק גאודזי:

$d(x,y)$ = אורך המסילה המינימלית שמחברת x ל-y על המשטח.

הגדרה: $\boxed{\text{מרחב מטרי}}$ הוא זוג (X,d) כאשר X קבוצה ו-d מטריקה המוגדרת ב-X.

אנו נשתמש בעיקר ב- $X=\mathbb{R}^n$ ו-d תהיה המטריקה הסטנדרטית $d(x,y)=\left[\sum(x_k-y_k)^2\right]^{1/2}$

בהמשך X יסמן מרחב מטרי שעליו מוגדרת מטריקה d.

הערה: אם (X,d) מרחב מטרי, אז לכל תת-קבוצה $Y\subset X$, (Y,d) מרחב מטרי.

הגדרה: יהי $x\in X$. הקבוצה $B(x,r)=\{y\in X \mid d(x,y)<r\}$ נקראת $\boxed{\text{הכדור הפתוח}}$ ברדיוס r סביב x.

$\overline{B(x,r)}=\{y\in X \mid d(x,y)\le r\}$ נקרא $\boxed{\text{הכדור הסגור}}$ ברדיוס r סביב x.

$B(x,r)$ נקרא "סביבה בסיסית של x".

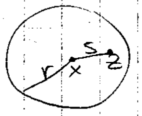
הגדרה: תת-קבוצה $S\subset X$ נקראת $\boxed{\text{קבוצה פתוחה}}$ אם לכל $x\in S$ קיים $r>0$ (תלוי ב-x)

כך ש- $B(x,r)\subset S$.

הגדרה: עבור כל $S\subset X$ נסמן ב-S^c את $\boxed{\text{המשלים}}$ של S: $S^c=X-S$.

הגדרה: $S\subset X$ נקראת $\boxed{\text{קבוצה סגורה}}$ אם S^c פתוחה.

דוגמאות:



1. כל כדור פתוח $B(x,r)$ הוא קבוצה פתוחה

הוכחה: ניקח $z\in B(x,r)$ כלשהו. כיוון ש-$z\in B(x,r)$, מתקיים $d(x,z)=s<r$.

טענה - $B(z,r-s)\subset B(x,r)$

הוכחת הטענה - אם $y\in B(z,r-s)$ הרי $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)<s+(r-s)=r$

ולכן $y\in B(x,r)$

2. $\overline{B(x,r)}$ סגורה.

הוכחה: נוכיח ש-$\overline{B(x,r)}^c$ פתוחה. ניקח $z\in\overline{B(x,r)}^c$, לפי הגדרה $d(x,z)=s>r$ ולכן $B(z,s-r)\subset\overline{B(x,r)}^c$

המשך תרגול

3. X ו-ϕ פתוחות וסגורות שתיהן.

הוכחה: X פתוחה כי אם $x\in X$ ואם $r>0$ אז $B(x,r)\subset X$

ϕ פתוחה כי אם $x\in\phi$ לכל $r>0$ - $B(x,r)\subset\phi$

כיוון ש-X פתוחה $\phi=X^c$ סגורה וגם כיוון ש-ϕ פתוחה - $X=\phi^c$ סגורה.

4. נגדיר $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-$ (חיוביים+שליליים)

$\mathbb{R}^+$ פתוחה כי אם $x\in\mathbb{R}^+$, הרי $0<x$ ו-$B(x,x)\subset\mathbb{R}^+$

באופן דומה רואים ש-$\mathbb{R}^-$ פתוחה.

כיוון ש-$\mathbb{R}^+$ פתוחה - $\mathbb{R}^-$ סגורה וגם כיוון ש-$\mathbb{R}^-$ פתוחה - $\mathbb{R}^+$ סגורה.

5. $S=\{x,y\in\mathbb{R}^2 \mid x^3\sin y-4x^2y^5<6\}$ קבוצה פתוחה. (זה נכון לא בגלל הצבה אם סימן קטן ממש)

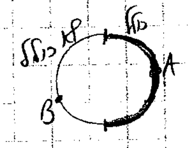
הסבר: אם $(x,y)\in S$ אז $f(x,y)=x^3\sin y-4x^2y^5$ רציפה. $f(x,y)<6$

לכן אם (x_1,y_1) קרובה מאוד ל-(x,y) אז מהרציפות ישנו $f(x_1,y_1)<6$.

מכאן שיש סביבה שלמה של (x,y) שבה f נשארת קטנה מ-6. לכן S פתוחה.

6. $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2y^3-e^{x^2y}\leq 8\}$ סגורה

הסבר: $S^c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2y^3-e^{x^2y}>8\}$ פתוחה מאותם נימוקים ל-5.



7. $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1,\ x\geq 0\}$

S לא פתוחה כי $A\in S$ אבל אין לה סביבה שלמה ב-S.

S^c לא פתוחה כי $B\in S^c$ ואין לה סביבה שלמה ב-S^c.

<u>סוגי נקודות</u>: תהי $S\subset X$ תת קבוצה במ"מ.

1. $x\in S$ נקראת $\boxed{\text{נקודה פנימית}}$ אם קיים $0<r$ כך ש $B(x,r)\subset S$.
2. $x\in S^c$ נקראת $\boxed{\text{נקודה חיצונית}}$ אם קיים $0<r$ כך ש- $B(x,r)\subset S^c$.
3. $x\in X$ נקראת $\boxed{\text{נקודת שפה}}$ אם כל סביבה $B(x,r)$ חותכת גם את S וגם את S^c.
4. $x\in S$ נקראת $\boxed{\text{נקודה מבודדת}}$ אם קיים $0<r$ כך ש $B(x,r)\cap S=\{x\}$.
5. $x\in X$ נקראת $\boxed{\text{נקודת הצטברות}}$ או $\boxed{\text{נקודת גבול}}$ אם כל סביבה שלה מכילה נקודות של S פרט ל-x עצמה.

(משמעות: כל סביבה של x מכילה ∞ נק' של S).

<u>משפט 1</u>: תהי $S\subset X$. התנאים הבאים שקולים:

א. S פתוחה.

ב. כל נק' ב-S פנימית.

ג. S לא מכילה אף נק' שפה שלה.

<u>הוכחה</u>: א$\Leftrightarrow$ב: S פתוחה $\Leftrightarrow$ לכל $x\in S$ קיים $0<r$ כך ש $B(x,r)\subset S$ $\Leftrightarrow$ כל $x\in S$ פנימית.

א$\Rightarrow$ג: נניח ש-S פתוחה ו-x נק' שפה של S. אז כל סביבה של x חותכת את S^c.
לכן אין ל-x סביבה שכולה ב-S. כיוון ש-x פתוחה, $x\notin S$.

ג$\Rightarrow$א: ניקח $x\in S$. לפי ג - x לא נק' שפה של S. לכן יש ל-x סביבה <u>שלא</u> חותכת
את S,S^c. אבל $x\in B(x,r)$ ולכן - $B(x,r)$ חותכת את S. לכן - $B(x,r)\cap S^c=\phi$.
במילים אחרות - $B(x,r)\subset S$ ו- S פתוחה.

<u>הערה</u>: בלשון בני אדם, קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^2$ היא "שטח ללא שפה" וב-$\mathbb{R}^n$ היא "נפח ללא שפה".

__משפט 2__: א. כל איחוד של קב' פתוחות הוא קב' פתוחה.

ב. חיתוך סופי של קב' פתוחות הוא פתוחה.

ג. כל קב' פתוחה ב-X היא איחוד של כדורים $B(x,r)$.

__הוכחה:__

א. נניח $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ קבוצות פתוחות ב-X. נגדיר $T=\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$

__טענה:__ T פתוחה.

__הוכחת הטענה:__ אם $x\in T$ קיים $\alpha\in A$ כך ש-$x\in S_\alpha$. S_α פתוחה לכן קיים $r>0$ כך ש-$B(x,r)\subset S_\alpha$

לכן בהכרח $B(x,r)\subset T$ והוכחנו ש-T פתוחה.

ב. נניח $S_1,\dots,S_n$ פתוחות ונגדיר $T=\bigcap_{k=1}^{n} S_k$

__טענה:__ T פתוחה

__הוכחת הטענה:__ ניקח $x\in T$. לכל $k=1,\dots,n$ קיים $r_k>0$ כך ש-$B(x,r_k)\subset S_k$,

לכן נגדיר $0<r=\min(r_1,\dots,r_n)$, לכן מתקיים $B(x,r)\subset T$ ולכן T פתוחה.

ג. כיוון ש-S פתוחה, לכל $x\in S$ קיים $r_x>0$ כך ש- $B(x,r_x)\subseteq S$.

__טענה:__ $S=\bigcup_{x\in S} B(x,r_x)$

__הוכחת הטענה:__ $S\subseteq\bigcup_{x\in S} B(x,r_x)$ כי אם $x_0\in S$ אז $x_0\in B(x_0,r_{x_0})\subset\bigcup_{x\in S} B(x,r_x)$

להפך - לכל $B(x,r_x)\subset S$ ולכן - $\bigcup_{x\in S} B(x,r_x)\subseteq S$.

__הערה:__ חיתוך אינסופי של קב' פתוחות לא תמיד פתוח.

למשל ב-$\mathbb{R}$ קטעים $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$. החיתוך של כולם הוא נק' בודדת $\{0\}$ שהוא לא קב' פתוחה.

משפט 3: יהי $S\subset X$ קב' במ"מ. התנאים הבאים שקולים:

א. S סגורה.

ב. S מכילה את כל נק' השפה שלה.

ג. S מכילה את כל נק' הגבול שלה.

הוכחה: א⇔ב: S סגורה ⇔ S^c פתוחה $\overset{\text{לפי 1}}{\Longleftrightarrow}$ S^c לא מכילה אף נק' שפה שלה

ב⇔ג - נק' שפה של S^c הן אותן נק' כמו נק' השפה של S ⇔ S מכילה את כל נק' השפה

א⇐ג: דרך השלילה נניח ש-S סגורה ו-x נק' גבול של S שלא שייכת ל-S.

אם כן - $x\in S^c$ אבל S^c פתוחה. לכן יש סביבה $B(x,r)$ שמוכלת כולה ב-S^c.

זה סותר את הנתון ש-x נק' גבול של S.

ג⇐א: ניקח $x\in S^c$ אז לפי ג x הוא לא נק' גבול של S. לכן יש $r>0$ כך ש-$B(x,r)$ לא חותכת את S. במילים אחרות - $B(x,r)\subset S^c$. נקבל ש-S^c פתוחה. לכן S סגורה כנדרש.

משפט 4: א. כל חיתוך של קב' סגורות הוא סגור.

ב. איחוד סופי של קב' סגורות סגור.

הוכחה: זה נובע ממשפט 2 בעזרת חוקי דה-מורגן.

הערה: באנלוגיה למשפט 2 יש לשים לב שכל קב' סגורה היא חיתוך של כדורים סגורים.

זה לא נכון! - כי כל כדור שמכיל שתי נק' מכיל את הקטע המחבר אותן,

לכן כל חיתוך של כדורים המכילים את הנק' יכיל את הקטע המחבר, ואי-אפשר לקבל רק את 2 הנק' בלבד

למה: יהי $S\subset X$ קב' במ"מ. נק' $x\in S^c$ היא נק' שפה של S ⇔ היא נק' גבול של S.

הוכחה: ניקח $x\in S^c$. x נק' שפה של S ⇔ כל סביבה שלה מכילה נק' של S וגם נק' של S^c.

כיון ש-x בעצמה שייכת ל-S^c, אז- x נק' שפה של S ⇔ כל סביבה שלה מכילה נק' של S

וזה נכון ⇔ x נק' גבול של S.

הערה: זוהי דרך נוספת להראות את שקילות הטענות ב,ג במשפט 3.

ב' אומר ש-S מכילה את כל נק' השפה שלה, כלומר ש-S^c לא מכילה אף נק' שפה של S

לפי הלמה זה אומר ש-S^c אינה מכילה אף נק' גבול של S וזה שקול לג'.

הגדרה: תהי $S\subset X$ קב' במ"מ. $\boxed{\text{הסגור}}$ של S, מסומן $\bar{S}$ הוא הקב' הסגורה המינימלית שמכילה את S

ובפרט - $\bar{S}=\bigcap\limits_{\substack{S\subset F \\ \text{כך ש-}F\text{ סגורה}}} F$

הערה: עבור $S\subset X$ נגדיר את S' להיות אוסף כל נק' הגבול של S ואת ∂S להיות כל נק' השפה של S

משפט 7: תהי $S\subset X$ קב' במ"מ אזי הקב' הבאות שוות:

(א) $\bar{S}$, (ב) $S\cup S'$, (ג) $S\cup\partial S$

הוכחה: $S\cup S'\subseteq\bar{S}$: לצורך כך נניח ש-F קב' סגורה שמכילה את S.

טענה - $S'\subset F$

הוכחה - אם $x\in S'$ אז x נק' גבול של S. מכיוון ש $S\subset F$, x גם נק' גבול של F.

אבל F סגורה ולכן מכילה את כל נק' הגבול שלה ולכן $x\in F$ ולכן $x\in S'$ אז $S'\subset F$.

נתון $S\subset F$, נסיק ש- $S\cup S'\subset F$. זה נכון לכל F סגורה המכילה את S.

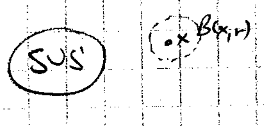
לכן $S\cup S'\subset\bigcap\limits_{\substack{S\subset F \\ F\text{ סגורה}}}F=\bar{S}$.

$\bar{S}\subseteq S\cup S'$: נניח $x\notin S\cup S'$. כלומר $x\notin S'$ וגם $x\notin S$. כלומר $x\notin S$ וגם לא נק' גבול של S.

לכן קיים ל-x סביבה $B(x,r)$ שלא חותכת את S.

אז $F=B(x,r)^c$ היא קב' סגורה שמכילה את S. ולכן ש- $\bar{S}\subset F$.

ולכן - $\bar{S}\cap B(x,r)=\phi$ (כפי שהראנו) ולכן אם $x\notin S\cup S'$ אז $x\notin\bar{S}$ ולכן $\bar{S}\subset S\cup S'$



ג' גם שקול לפי הלמה

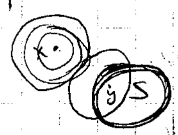
קבוצות קומפקטיות

הגדרה: תהי $Z\subset X$ קב' כלשהי. $\boxed{\text{כסוי פתוח}}$ של Z הוא משפחה $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ של קב' פתוחות כך ש- $Z\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha$.

הגדרה: $S\subset X$ נקראת $\boxed{\text{קבוצה קומפקטית}}$ אם לכל כסוי פתוח $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ של S קיים תת כסוי סופי
כלו' - קיים מס' סופי של קבוצות $O_{\alpha_1},O_{\alpha_2},\dots,O_{\alpha_n}$ כך ש- $S\subset\bigcup_{k=1}^{n}O_{\alpha_k}$

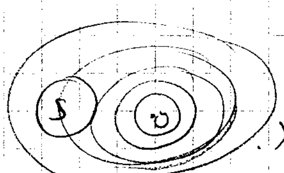
משפט 6: אם $S\subset X$ קומפקטית אז היא סגורה.

הוכחה: נראה ש-S^c פתוחה. לשם כך ניקח $x\in S^c$. לכל $y\in S$ - $0<r_y=d(x,y)$ (חיובי כי $x\notin S$).
לפי זה, הכדורים $B(x,\frac{r_y}{2})$, $B(y,\frac{r_y}{2})$ זרים זה לזה כי לקחנו עבור רדיוס חצי המרחק.



הכדורים $B(y,\frac{r_y}{2})$ לכל $y\in S$ מהווים כסוי פתוח ל-S.
כיון ש-S קומפקטית, קיים תת כסוי סופי - $B(y_1,\frac{r_{y_1}}{2}),\dots,B(y_n,\frac{r_{y_n}}{2})$
נגדיר $r=\min(r_{y_1},\dots,r_{y_n})$. לפי הבניה, הכדור $B(x,\frac{r}{2})$ זר לכל הכדורים $B(y_k,\frac{r_{y_k}}{2})$ לכל $1\le k\le n$.
לכן $B(x,\frac{r}{2})\cap S=\emptyset$ ובכך הראנו שלכל $x\notin S$, יש ל-x סביבה שלמה שלא חותכת את S.
לכן S סגורה.

הגדרה: אומרים ש-$S\subset X$ $\boxed{\text{חסומה}}$ אם היא מוכלת בכדור כלשהו $B(x,r)$ עבור $0<r<\infty$.
שקול - אפשר להגדיר את $\boxed{\text{הקוטר}}$ של S ע"י $k(S)=\sup_{x,y\in S}d(x,y)$ ואז S חסומה $\iff k(S)<\infty$.



משפט 7: אם $S\subset X$ קומפקטית אז היא חסומה.

הוכחה: ניקח $y\in X$ כלשהי. הכדורים $B(x,n)$ עבור $n\in\mathbb{N}$ מכסים את X.
ובפרט הם מכסים את S. וכיון ש-S קומפקטית לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $S\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}B(y,k)=B(y,n)$
לכן S חסומה.

משפט 8: אם $S\subset X$ קומפקטית ואם $F\subset S$ סגורה, אז F קומפקטית.

הוכחה: נניח ש-$\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כסוי פתוח של F. אז $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}\cup F^c$ כסוי ל-S (ואפילו למרחב X כולו)
כיון ש-S קומפקטית יש תת כסוי סופי. לכן - $S\subset O_{\alpha_1}\cup O_{\alpha_2}\cup\dots\cup O_{\alpha_n}\cup F^c$.
$F\subset S$ לכן קב' אלה מכסות גם את F. אבל מכיון ש-$F\cap F^c=\emptyset$ לכן בהכרח $F\subset\bigcup_{k=1}^{n}O_{\alpha_k}$
ומצאנו תת כסוי סופי ל-F. לכן F קומפקטית.

הגדרה: $\boxed{\text{תיבה סגורה}}$ ב-R^n היא מכפלה קרטזית של n קטעים סגורים ב-R

כלומר - $\{x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n \mid a_k\le x_k\le b_k,\ 1\le k\le n\}$

הצלע ה-k של תיבה זו הוא קטע $[a_k,b_k]$.

משפט 9: למת קנטור ב-R^n

תהי $\{T_m\}$ סדרה של תיבות סגורות ב-R^n כך ש- $T_1\supset T_2\supset T_3\supset\dots$ ונניח ש- $\lim_{m\to\infty}k(T_m)=0$

אז $\bigcap_{m=1}^{\infty}T_m$ הוא נק' אחת בלבד.

הוכחה: לפי ההגדרה, הצלע ה-k של T_m הוא קטע $[a_k^{(m)},b_k^{(m)}]$.

לפי הנתון, קטעים אלה סגורים ונמצאים זה בזה $[a_k^{(1)},b_k^{(1)}]\supset[a_k^{(2)},b_k^{(2)}]\supset\dots$

והאורך שלהם שואף לאפס. לפי למת קנטור ב-R^1, לכל k - $\bigcap_{m=1}^{\infty}[a_k^{(m)},b_k^{(m)}]$

הוא נקודה אחת, נסמנה X_k. הדבר נכון ל- $1\le k\le n$.

נקבל ש- $\bigcap_{m=1}^{\infty}T_m=(X_1,X_2,\dots X_n)$ שהיא נק' אחת ⇐ מש"ל

משפט 10: תהי $T=\prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$ תיבה סגורה ב-R^n, אז T קומפקטית.

הוכחה: בדרך השלילה - נניח שקיים ל-T כיסוי פתוח $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ שאין לו תת כיסוי סופי.

נחלק כל קטע $[a_k,b_k]$ ע"י הנק' האמצעית c_k לשני קטעים סגורים $[a_k,c_k]$ ו-$[c_k,b_k]$

נבנה את כל המכפלות הקרטזיות של תת הקטעים האלה, ובכך נחלק את T ל-2^n תת תיבות סגורות $\{T^{(m)}\}_{m=1}^{2^n}$, כל $T^{(m)}$ מכוסה ע"י הקב' הפתוחות $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

אם לכל $T^{(m)}$ יש תת כיסוי סופי, נוכל לקבל כי איחוד כל תת הכיסויים האלה יהווה תת כיסוי סופי ל-T עצמה.

לכן בהכרח יש לפחות $T^{(m)}$ אחת שאין לה תת כיסוי סופי. נקרא לה T_1.

את נחלק את T_1 ל-2^n תת תיבות סגורות, לפחות אחת מהן היא ללא תת כיסוי סופי - T_2.

אפשר להמשיך תהליך זה לקבל סדרת תיבות סגורות $T\supset T_1\supset T_2\supset\dots$ כך שלכל T_m אין כיסוי סופי

מתוך $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$. לפי הבנייה $\lim_{m\to\infty}k(T_m)=0$ לכן לפי למת קנטור (משפט 9) - $\bigcap_{m=1}^{\infty}T_m$ הוא נק' אחת בדיוק x.

כיוון ש-$x\in T$, קיים α מתאים כך ש-$x\in O_\alpha$. כיוון ש-O_α פתוחה, קיים $r>0$ כך ש $B(x,r)\subset O_\alpha$

כעת, $\lim_{m\to\infty}k(T_m)=0$ לכן ניתן לבחור m מספיק גדול כך ש- $k(T_m)<r$. כיוון ש-$x\in T_m$

אז לכל $y\in T_m$, $d(x,y)<r$, אז $T_m\subset B(x,r)$. כמו כן, $T_m\subset B(x,r)\subset O_\alpha$.

מצאנו ש-T_m מכוסה ע"י קבוצה אחת מהכיסוי האינסופי, בסתירה לכך של-T_m לא קיים תת-כיסוי סופי. הסתירה אומרת

משפט 11: (משפט היינה-בורל)

קבוצה $S\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית $\iff$ היא סגורה וחסומה.

הוכחה: ($\Rightarrow$) אם נתון ש-S קומפקטית, אז לפי משפט 6 היא סגורה ולפי משפט 7 חסומה.

(כל זה נכון בכל מרחב מטרי).

($\Leftarrow$) אם S חסומה אז קיימת תיבה סגורה $T\subset\mathbb{R}^n$ כך ש- $S\subset T$.

לפי משפט 10, T קומפקטית. כיוון ש-$S\subset T$ סגורה, גם היא קומפקטית לפי משפט 8.

דוגמא: בשיעור הראשון הגדרנו - $\ell^2=\{x=(x_n)_{n=1}^\infty \mid \|x\|^2=\sum_{n=1}^\infty x_n^2<\infty\}$

קל לראות ש-ℓ^2 מרחב נורמי ע"י הנורמה הנ"ל. נראה שלא מתקיים משפט 11:

נראה שקיימת $S\subset\ell^2$ סגורה וחסומה ולא קומפקטית.

נגדיר "בסיס סטנדרטי" ל-ℓ^2: $e_1=(1,0,0,\ldots)$, $e_n=(0,0,\ldots,0,\overset{n}{1},0,\ldots)$

נגדיר - $S=\{e_1,e_2,\ldots\}$. S חסומה כי לכל n - $\|e_n\|=1$ ובנוסף $\|e_n\|=d(e_n,0)$

לכן $S\subset B(0,2)$ לכן S חסומה. אך גם כן, S סגורה כי לכל $m\neq n$:

$d(e_n,e_m)=\|e_n-e_m\|=\|(0,\ldots,\overset{n}{1},\ldots,\overset{m}{-1},0,\ldots)\|=\sqrt{2}$, כיוון שכל e_n,e_m מתרחקים זה מזה הרבה - S "קב' דיסקרטית" שאין לה אף גבול, לכן "S מכילה את כל נק' הגבול שלה" ולכן S סגורה.

טענה - S לא קומפקטית

הוכחה - לכל n נגדיר $O_n=B(e_n,\frac{1}{2})$. $\{O_n\}$ מהווה כסוי פתוח ל-S כיוון שלכל $m\neq n$ $d(e_n,e_m)=\sqrt{2}$

הכדורים O_n צרים כל כך, שכל O_n מכיל את e_n ולא אף נק' אחרת של S

עכשיו ברור שלא קיים תת כסוי סופי כי כל אוסף סופי של O_n מכסה רק מס' סופי של e_n ולא את כל S

לסיכום - S סגורה וחסומה ולא קומפקטית. לכן משפט היינה-בורל לא נכון ב-ℓ^2!

ואפשר להוכיח שהוא לא נכון בכל מרחב נורמי אינסופי ממדי.

משפט 21: יהי (X,d) מרחב מטרי. יהי $S\subset X$ קומפקטית,

אז אם $F\subset S$ תת קבוצה אינסופית, קיימת ל-F נק' גבול ב-S.

הוכחה: הדרך הפוך על הפוך - נניח שאם $S\subset X$ קומפקטית ולתת קבוצה $F\subset S$ אין נק' גבול ב-S אז F סופית.

ובכן, ניקח $x\in S$ כלשהי. לפי הנתון, x לא נק' גבול של F לכן אם $x\in F$ יש $r_x>0$ כך ש- $F\cap B(x,r_x)=\{x\}$ ואם $x\notin F$ יש $r_x>0$ כך ש-$F\cap B(x,r_x)=\emptyset$

כלל הכדורים $[B(x,r_x)]_{x\in S}$ מהווים "כיסוי" פתוח ל-S. אבל S קומפקטית ולכן קיים תת-כיסוי סופי: $B(x_1,r_{x_1}),\ldots,B(x_n,r_{x_n})$.

לסיכום - $F\subset S\subset\bigcup_{k=1}^{n}(x_k,r_{x_k})$. לפי הבניה כל $B(x_k,r_{x_k})$ מכיל לכל היותר נקודה אחת של F. נמצא ש-$F\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,r_{x_k})$ מכיל לכל היותר n נק' של F.

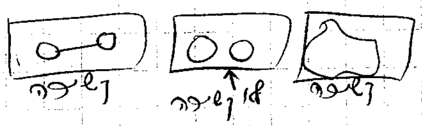
ולכן F סופית.

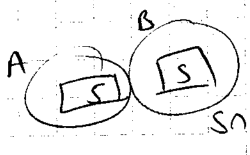
הערה: הצד ההפוך של משפט זה נכון גם כן:

אם $S\subset X$ תת קב' בעלת התכונה שלכל תת קב' אינסופית $F\subset S$ יש נק' גבול, אז S קומפקטית.

קשירות

אינטואיטיבית - $S\subset X$ קשירה אם היא כולה "גוש" אחד.





הגדרה: יהי X מרחב מטרי כלשהו. אומרים שתת-קב' $S\subset X$ $\boxed{\text{לא קשירה}}$ אם קיימות קב' פתוחות A,B כך ש- $A\cap B=\emptyset$ (זרות), $S\subset A\cup B$, ו- $S\cap A, S\cap B\neq\emptyset$

$S\subset X$ $\boxed{\text{קשירה}}$ אם לא קיים פירוק כנ"ל.

כלומר- לא קיימות קב' A,B פתוחות זרות כך שכל אחת חותכת את S ו- $S\subset A\cup B$.

שקול: S קשירה אם לכל A,B פתוחות זרות, אם $S\subset A\cup B$ אז $S\subset A$ או $S\subset B$.

דוגמאות:

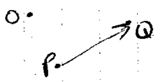
1. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ לא קשירה.

הוכחה: נסמן $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $A=\mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$, $B=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$

A,B פתוחות זרות, $S\subset A\cup B$ (ולמעשה $S=A\cup B$) ו- $S\cap A, S\cap B\neq\emptyset$ לכן S לא קשירה.

נראה שב-$\mathbb{R}$ הקב' הקשירות היחידות הן הקטעים והנק' הבודדות.

2. נראה שקטע ישר ב-$\mathbb{R}^n$ הוא קב' קשירה.



הקדמה: תחילה נלמד איך להציג קטע ישר ב-$\mathbb{R}^n$ שהולך מנק' P לנק' Q

נחשוב את הנק' עם "וקטור המקום" מ-0 עד הנק'. הוקטור מ-P ל-Q הוא $Q-P$.

כמובן $Q=P+(Q-P)$. הנק' האמצעית בין P ל-Q היא $P+\frac{1}{2}(Q-P)$.

הקטע מ-P ל-Q כולו הוא קב' הנק' $X_t=P+t(Q-P)$ עבור $0\le t\le 1$

הערה- הקב' $X_t=P+t(Q-P)$ עבור $-\infty<t<\infty$ הוא הישר המחבר את P ו-Q.

תרגיל - נניח $P=(4,2,3)$, $Q=(5,1,0)\in\mathbb{R}^3$. תאר את הקטע מ-P ל-Q.

תשובה - הקטע הוא הנקודות $t\in[0,1]$ כך ש- $(x,y,z)=P+t(Q-P)$.

כלומר, $(x,y,z)=(4,2,3)+t(1,-1,-3)$ עבור $0\le t\le 1$

או $x=4+t$, $y=2-t$, $z=3-3t$ עבור $0\le t\le 1$

אלה "משוואות פרמטריות" של ישר ב-$\mathbb{R}^3$. עבור $t\in[0,1]$ הן מתארות את הקטע PQ.

דוגמאות:

2. קטע ישר ב-$\mathbb{R}^n$ הוא קב' קשירה

<u>הוכחה</u>: נניח שהקטע $PQ\in\mathbb{R}^n$ קב' לא קשירה. נניח שיש קב' פתוחות זרות $A,B\in\mathbb{R}^n$ כך ש $PQ\subset A\cup B$ ו-A,B שמפצלות את PQ, ונגיע לסתירה. בה"כ נניח ש $Q=x_1\in B$.

נגדיר - $u\equiv\sup\{t\in(0,1]\mid x_t\in A\}\equiv\sup K$

K לא ריקה כי PQ חותך את A והיא חסומה מלעיל ע"י 1, לכן u מוגדר היטב (קיום סופרמום ל-K).

<u>טענה 1</u> - $x_u\notin A$

<u>הוכחה</u> - אם $u=1$ אז $x_u=x_1=Q\in B$ לכן $x_u\notin A$.

אם $u<1$ ו- $x_u\in A$, הנתון ש-A פתוחה גורר שיש סביבה שלמה של x_u המוכלת ב-A. בפרט יש $u<t$ כך ש $x_t\in A$ בסתירה להגדרת u. הסתירה מוכיחה ש- $x_u\notin A$.

<u>טענה 2</u> - $x_u\notin B$

<u>הוכחה</u> - אם $x_u\in B$, הרי B פתוחה ולכן קיים δ כך שלכל $u-\delta<t<u+\delta$, $x_t\in B$. בפרט, $u-\delta$ חסם מלעיל עבור הקבוצה K. בסתירה לכך ש-u חסם מלעיל מינימלי ל-K. הסתירה מוכיחה $x_u\notin B$.

לסיכום - $x_u\notin A, x_u\notin B$ בסתירה לנתון ש $PQ\subset A\cup B$. מכאן ש-PQ קשירה.

<u>משפט 13</u>: נניח שהקב' $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ קשירות ב-X, ונניח $\bigcap_{\alpha\in A}S_\alpha\neq\emptyset$. אז- $S=\bigcup_{\alpha\in A}S_\alpha$ קשירה.

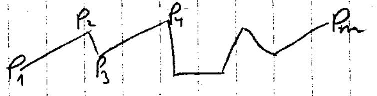
<u>הוכחה</u>: נניח ש-B ו-C פתוחות וזרות ו- $S\subset B\cup C$. ניקח α מסוים, אז $S_\alpha\subset B\cup C$ אבל S_α קשירה לכן $S_\alpha\subset B$ או $S_\alpha\subset C$. בה"כ $S_\alpha\subset B$.

עתה ניקח $\beta\neq\alpha$. גם S_β קשירה. כנ"ל $S_\beta\subset B$ או $S_\beta\subset C$ אבל לא ייתכן ש $S_\beta\subset C$ כי קיים נק' $x\in S_\alpha\cap S_\beta$. אם כן - $x\in S_\alpha\subset B$ ו-$x\in S_\beta\subset C$, בסתירה לכך ש-B,C זרות.

דבר זה נכון לכל S_β ולכן כולם בתוך B. לכן - $S=\bigcup_{\alpha\in A}S_\alpha\subset B$ וזה מוכיח S קשירה.

<u>הערה</u>: קו פוליגונלי:

הגדרה: יהיו $P_1,\dots,P_m \in \mathbb{R}^n$ נק׳ כלשהן, $\boxed{\text{הקו הפוליגונלי}}$ המתאים אותן הוא:



$\overline{P_1P_2}\cup\overline{P_2P_3}\cup\dots\cup\overline{P_{n-1}P_n}$

הערה: נובע ממשפט 13 שקו פוליגונלי ב-$\mathbb{R}^n$ הוא קב׳ קשירה

הוכחה: עם הסימון הנ״ל הרי ידוע ש- $\overline{P_1P_2}$ ו- $\overline{P_2P_3}$ קשירות
ויש להן נק׳ משותפת P_2 ולכן עפ״י משפט 13 - $\overline{P_1P_2}\cup\overline{P_2P_3}$ קשירה.
שוב נשים ש- $\overline{P_3P_4}$ קשירה והיא חותכת את הקב׳ הקודמת ב-P_3,
לכן לפי משפט 13 - $\overline{P_1P_2}\cup\overline{P_2P_3}\cup\overline{P_3P_4}$ קשירה. אפשר להמשיך באינדוקציה עד $\overline{P_{m-1}P_m}$.

הגדרה: כל $\boxed{\text{מסילה}}$ (נ״ל עקומה רציפה) ב-$\mathbb{R}^n$ היא קב׳ קשירה

הגדרה: אומרים ש-$S\subset\mathbb{R}^n$ $\boxed{\text{קשירה מסילתית}}$ אם לכל $x,y\in S$ קיימת מסילה γ_{xy} שמחברת בין x ל-y
ושמוכלת כולה ב-S ($\gamma_{xy}\subset S$).

משפט 14: אם $S\subset\mathbb{R}^n$ קשירה מסילתית אז היא קשירה.

הוכחה: ניקח $x\in S$ קבוע. לפי הנתון, עבור כל $y\in S$ קיימת מסילה $\gamma_{xy}\subset S$ שמחברת בין x ל-y.
כל γ_{xy} קשירה ו- $\bigcup_{y\in S}\gamma_{xy}=S$, כיוון ש- $x\in\bigcap_{y\in S}\gamma_{xy}\neq\emptyset$, נובע ממשפט 13 ש-S קשירה.

משפט 15: תהי $S\subset\mathbb{R}^n$ קב׳ פתוחה. אז S קשירה $\iff$ היא קשירה מסילתית.

הוכחה: $\Leftarrow$ לפי משפט 14 - מיידי.

$\Leftarrow$ נניח $S\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה ונוכיח S קשירה מסילתית.

נבחר $x\in S$ קבוע ונגדיר $A=\{y\in S \mid \text{אפשר לחבר } x,y \text{ ע״י קו פוליגונלי שכולו ב-}S\}$, $B=S\setminus A$ (כלומר B זה כל הנק׳ שלא ניתן לחבר ל-x)

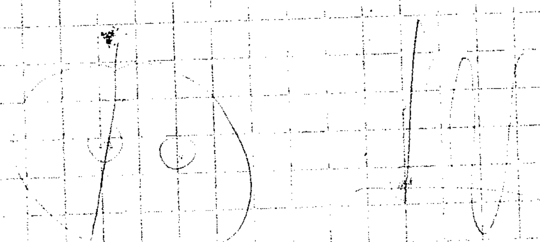
ונראה ש-A,B פתוחות

ברור ש- $A\cup B=S$, $A\cap B=\emptyset$.

A פתוחה: אם $y\in A$ אז קיים קו פוליגונלי $\gamma_{xy}\subset S$ בין x ל-y. אבל $y\in S$ ו-S פתוחה
לכן קיים כדור פתוח $B(y,r)\subset S$. אם $z\in B(y,r)$, אז $\overline{yz}\subset B(y,r)\subset S$. נובע שהקו הפוליגונלי $\gamma_{xy}\cup\overline{yz}$
מחבר את x ל-z בתוך S. כלומר $z\in A$ לכל $z\in B(y,r)$ והוכחנו A פתוחה.

B פתוחה: ניקח $y\in B$, כלומר לא קיים קו פוליגונלי מ-x ל-y ב-S. אבל $y\in S$ ו-S פתוחה לכן קיימת סביבה $B(y,r)\subset S$

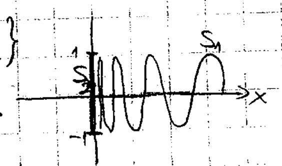
משפט 15:



דוגמא:

$$S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\le 1,\ y=\sin\tfrac{1}{x}\}$$

$$S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0,\ -1\le y\le 1\}$$



נגדיר $S=S_1\cup S_2$. קל לראות (נוכיח לתרגיל) שאי אפשר להגיע מ-S_1 ל-S_2 במסלה שמוכלת ב-S.

לכן S לא קשירה מסילתית.

__טענה__ - S קשירה.

__הוכחה__ - נניח $A,B\subset\mathbb{R}^2$ זר פתוחות וזרות כך ש- $S\subset A\cup B$. לכן בפרט $S_2\subset A\cup B$.

S_2 קשירה (כי היא קו) לכן בהכרח כולה שייכת ל-A או ל-B. בה"כ $S_2\subset A$.

כמו כן S_1 מסילתית אז היא קשירה לכן $S_1\subset A$ או $S_1\subset B$. ידוע ש- $(0,0)\in S_2\subset A$ אבל A פתוחה

בהכרח N מכילה נקודות של S2

לכן יש סביבה פתוחה של $(0,0)$ (נקרא N) כך ש- $N\subset A$. בהכרח N מכילה נקודות של S

סדרות

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. סדרה $\{x_n\}$ ב-X מתכנסת לגבול $x\in X$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $d(x_n,x)<\varepsilon$, ומסמנים $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ או $x_n\to x$.

שקול: $x_n\to x \iff \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$.

משפט 1: (א) הגבול של סדרה הוא יחיד.

(ב) סדרה קבועה $x,x,x,\dots$ שואפת ל-x.

(ג) אם $x_n\to x$ וכן $y_n\to y$ ב-X אז $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$

הוכחה: (א)+(ב) בדיוק כמו באינפי 1.

(ג) לפי אי-שוויון המשולש המורחב $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ ולכן $d(x,z)-d(x,y)\le d(y,z)$

כעת אם $x_n\to x$, $y_n\to y$ אז:

$$0\le|d(x_n,y_n)-d(x,y)|=|d(x_n,y_n)-d(x_n,y)+d(x_n,y)-d(x,y)|\le d(y_n,y)+d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לפי משפט הסנדוויץ' - $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$.

משפט 2: יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ונניח $x_n\to x$, $y_n\to y$ ב-X ו-$c\in\mathbb{R}$.

אזי: (א) $x_n\pm y_n\to x\pm y$, (ב) $cx_n\to cx$, (ג) $\|x_n\|\to\|x\|$

(ד) $x^{(m)}=(x_1^{(m)},\dots,x_n^{(m)})\to x=(x_1,\dots,x_n)$ ב-$\mathbb{R}^n$ $\iff$ $x_k^{(m)}\to x_k$ לכל $1\le k\le n$.

כלומר - התכנסות $\iff$ התכנסות רכיבים

(ה) אם $x^{(m)}\to x$, $y^{(m)}\to y$ ב-$\mathbb{R}^n$ אז $x^{(m)}\cdot y^{(m)}\to x\cdot y$ (מכפלה פנימית)

הוכחה:

(א) תחילה נוכיח $x_n+y_n\to x+y$. $d(x_n+y_n,x+y)=\|x_n+y_n-(x+y)\|=\|(x_n-x)+(y_n-y)\|\le\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0$

לכן $x_n+y_n\to x+y$ והחיסור באותו אופן.

(ב) באופן דומה: $d(cx_n,cx)=\|cx_n-cx\|=|c|\cdot\|x_n-x\|\to 0$

(ג) $0\le\big|\,\|x_n\|-\|x\|\,\big|\le\|x_n-x\|\to 0$ ולכן $\|x_n\|\to\|x\|$ לפי משפט הסנדוויץ'.

(ד) לכל m,k: $0\le|x_k^{(m)}-x_k|\le\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j^{(m)}-x_j|^2\right)^{1/2}=\|x^{(m)}-x\|$

אם נניח $x^{(m)}\to x$ אז לפי הגדרה $\|x^{(m)}-x\|\to 0$, לפי סנדוויץ' - לכל k $|x_k^{(m)}-x_k|\to 0$ כלומר $\lim\limits_{m\to\infty}x_k^{(m)}=x_k$

אם נניח שלכל k - $\lim\limits_{m\to\infty}x_k^{(m)}=x_k$ אז לפי אריתמטיקה של גבולות - $\lim\limits_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x\|=\lim\sqrt{\sum(x_k^{(m)}-x_k)^2}=\sqrt{\sum 0}=0$

(ה) לפי ד' אם $x^{(m)}\to x$ ו-$y^{(m)}\to y$ אז לכל k - $x_k^{(m)}\to x_k$, $y_k^{(m)}\to y_k$.

$$x^{(m)}\cdot y^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}x_k^{(m)}y_k^{(m)}\to\sum x_k y_k=x\cdot y$$

דוגמאות:

1. ב-$\mathbb{R}^2$ נחשב $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right) = ?$

תשובה: לפי שאיפה רכיב-רכיב הגבול הוא $(1,e^2)$.

2. ב-$\mathbb{R}^2$ נחשב - $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}, \sin n\right)$

תשובה: לא קיים גבול כי ברכיב אחד יש גבול ולרכיב השני אין גבול.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}$ סדרה ב-X.

אם $\{n_k\}$ סדרה עולה ממש של אינדקסים, אז $\{x_{n_k}\}$ נקרא $\boxed{\text{תת-סדרה}}$ של $\{x_n\}$.

הערה: לסדרה מתבדרת יש תת סדרה מתכנסת אפי' שהסדרה כולה מתבדרת.

גבול של תת-סדרה של $\{x_n\}$ נקרא $\boxed{\text{גבול חלקי}}$ של $\{x_n\}$.

משפט 3: אם $x_n \to x$ אז לכל תת סדרה - $x_{n_k} \to x$.

משפט 4: יהי X מ"מ, $Z \subset X$ תת קב' קומפקטית ותהי $\{x_n\} \subset Z$ סדרה.

אז קיימת ל-$\{x_n\}$ תת-סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת לגבול בתוך Z.

הוכחה: אם יש איבר שמופיע אינסוף פעמים בסדרה $\{x_n\}$ אז נוכל לבחור תת סדרה קבועה שמובן מתכנסת לאותו איבר של Z, וקיימנו את תנאי המשפט במקרה זה.

ואם לא, הקבוצה - יש אינסוף איברים שונים בסדרה $\{x_n\}$. לפי משפט 12 מהפרק הקודם, הקומפקטיות של Z מבטיחה שיש להן נק' גבול $x \in Z$.

טענה: קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת ל-x

הוכחה: כיוון ש-x נק' גבול של $\{x_n\}$, כל סביבה של x מכילה אינסוף נק' $\{x_n\}$.

נבחר אחת מהן שבתוך $B(x,1)$ ונקרא לו x_{n_1}. כמו כן $B(x,\frac{1}{2})$ מכילה אינסוף נק' וניתן לבחור אחת מהן - x_{n_2} כך ש-$n_2>n_1$. נמשיך לבחור $x_{n_3} \in B(x,\frac{1}{3})$ כך ש-$n_3>n_2$.

כך נקבל תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ של $\{x_n\}$ כך שלכל k - $x_{n_k} \in B(x,\frac{1}{k})$ ולכן $d(x,x_{n_k})<\frac{1}{k}$.

לפי ההגדרה - $x_{n_k} \to x \in Z$ מש"ל

משפט 5: משפט בולצאנו ויירשטראס ב-$\mathbb{R}^n$

תהי $\{x_m\}$ סדרה חסומה ב-$\mathbb{R}^n$, אז יש לה תת-סדרה מתכנסת.

הוכחה: נתון ש-$\{x_m\}$ חסומה, כלומר קיים $M>0$ כך שלכל $m\in\mathbb{N}$ - $\|x_m\|\le M$.
במילים אחרות - $\{x_m\}\subseteq\overline{B(0,M)}$. לפי משפט היינה בורל - $\overline{B(0,M)}$ קומפקטית.
מכאן נובע לפי משפט 4 שקיימת ל-$\{x_m\}$ תת-סדרה שמתכנסת לגבול ב-$\overline{B(0,M)}$.

הערה: משפט בולצאנו ויירשטראס לא נכון במרחבים נורמיים כלליים.
למשל, ב-ℓ^2 וקטורי ה"בסיס" - $e_n=(0,\dots,0,\overset{n}{1},0,\dots)$ מהווים סדרה חסומה $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$
שאין לה תת סדרה מתכנסת.

הערה: ההפך של משפט 4 נכון - אם X מרחב מטרי ואם לכל קבוצה $S\subset X$ שמקיימת התכונה
שלכל סדרה ב-S יש גבול חלקי בתוך S, אז S קומפקטית.

סדרות קושי

<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. סדרה $\{x_n\}$ ב-X נקראת $\boxed{\text{סדרת קושי}}$ אם היא מקיימת $\boxed{\text{תנאי קושי}}$ - לכל $\varepsilon>0$ יש $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m>n_0$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

<u>משפט 6</u>: אם $\{x_n\}$ מתכנסת, אז היא סדרת קושי.

<u>הוכחה</u>: נניח $x_n \to x\in X$. כעת, יהי $\varepsilon>0$ נתון. כיוון ש $x_n\to x$, יש n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$. כעת, לכל $n,m>n_0$ - $d(x_m,x_n) \le d(x_m,x)+d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, וקיימנו את תנאי קושי! <u>מש"ל</u>

<u>הערה</u>: ההיפך של משפט 6 <u>לא נכון!</u>

למשל, אם $X=\mathbb{Q}$ עם המטריקה שהיא מושרית מ-$\mathbb{R}$.

אז יש הרבה סדרות קושי ב-$\mathbb{R}$ שלא מתכנסות ב-$\mathbb{Q}$.

כמו $1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$ זאת סדרת קושי כי היא מתכנסת ב-$\mathbb{R}$ ולכן משפט 6 מבטיח שהיא סדרת קושי. אבל כמובן אין לה גבול ב-$\mathbb{Q}$.

דוגמא נוספת: $X=(0,1]$ עם המטריקה של $\mathbb{R}$, אז $\{\frac{1}{n}\}$ סדרה ב-X שלא מתכנסת ב-X.

<u>הגדרה מקובלת</u>: מרחב מטרי (X,d) $\boxed{\text{שלם}}$, אם כל סדרת קושי מתכנסת לגבול ב-X.

<u>הערה</u>: הכוונה במרחב שלם הוא שאין בו "חורים".

אין שום "חור" - יש סדרה שמתכווצת לתוך עצמה, אבל לא יש לה גבול.

משפט 7: א. כל סדרת קושי חסומה.

ב. אם לסדרת קושי $\{x_n\}$ קיימת תת-סדרה מתכנסת $x_{n_k}\to x$, אז כל הסדרה שואפת ל-x, כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ קיים ושווה ל-x.

הוכחה: א. נקח $\varepsilon=1$. כיוון ש-$\{x_n\}$ סדרת קושי, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ - $d(x_n,x_{n_0})<1$.

לכל n נגדיר $M=\max\{d(x_1,x_{n_0}), d(x_2,x_{n_0}),\dots,d(x_{n_0-1},x_{n_0}),1\}$

לפי הבנייה, כל הסדרה $\{x_n\}$ נמצאת בתוך $\overline{B(x_{n_0},M)}$ ולכן הסדרה חסומה.

ב. צריך להוכיח ש-$x_n\to x$. לשם כך יהי $\varepsilon>0$ נתון. כיוון שהסדרה $\{x_n\}$ סדרת קושי, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n>n_0$ אז $d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$. נקבע $n>n_0$.

נבחר של $k>n_0$ אז האינדקס $n_k\geq k$ ולכן לכל $k>n_0$ - $d(x_n,x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}$

נשאיף $k\to\infty$ אז $x_{n_k}\to x$ ונקבל $d(x_n,x)=\lim\limits_{k\to\infty} d(x_n,x_{n_k})\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. ולכן $x_n\to x$ כנדרש.

מסקנה 1: $\mathbb{R}^n$ שלם. (כלומר - כל סדרת קושי ב-$\mathbb{R}^n$ מתכנסת לגבול ב-$\mathbb{R}^n$).

הוכחה: נניח ש-$\{x_m\}$ סדרת קושי ב-$\mathbb{R}^n$. לפי משפט 7 א' - $\{x_m\}$ חסומה.

לפי בולצאנו ויירשטראס - יש תת-סדרה $\{x_{m_k}\}$ שמתכנסת: $x_{m_k}\to x\in\mathbb{R}^n$.

לפי משפט 7 ב' - $x_n\to x$ כנדרש.

מסקנה 2: אם (X,d) מרחב מטרי קומפקטי, אז X שלם.

הוכחה: נניח (X,d) קומפקטי ו-$\{x_n\}$ סדרת קושי במרחב זה. לפי משפט 4, קיימת תת-סדרה מתכנסת $x_{n_k}\to x\in X$, ולפי משפט 7 ב' כל הסדרה $\{x_n\}$ שואפת ל-x, והוכחנו שכל סדרת קושי ב-X מתכנסת לגבול ב-X. לכן X שלם.

מסקנה 3: אם (X,d) מרחב שלם ואם $S\subset X$ תת קב' סגורה, אז (S,d) שלם.

הוכחה: נקח סדרת קושי $\{x_n\}$ ב-S. נשים לב שהיא סדרת קושי גם ב-X. כיוון ש-X שלם, יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת לגבול $x\in X$. אבל כל $x_{n_k}\in S$, אז נקבל ש-x נק' גבול של S

כיוון ש-S סגורה, $x\in S$ והוכחנו שכל סדרת קושי ב-S מתכנסת לגבול ב-S. לכן (S,d) שלם.

פונקציות

אנחנו נדבר בפונ' רק ב מרחבים מטריים $(X,d_x),(Y,d_y)$,

נתון פונ' מהצורה $f:E\to Y$ כאשר $E\subset X$ קב' כלשהי.

נזכיר רק את המושג של צמצום: אם $f:E\to Y$ פונ', ואם $F\subset E$,

אז הצמצום של f לקב' F הוא הפונ' $f|_F:F\to Y$ ש- $f|_F(x)=f(x)$ לכל $x\in F$.

הגדרה: נניח $f:E\to Y$ פונ' כלו ונניח ש-p נק' גבול של E.

נאמר ש- $\lim_{x\to p} f(x)=q\in Y$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in E$

ואם $0<d_x(x,p)<\delta$ אז $d_y(f(x),q)<\varepsilon$.

משפט 1: נניח $f:E\to Y$ פונ' כלשהי ו-p נק' גבול של E. התנאים הבאים שקולים:

א. $\lim_{x\to p} f(x)=q\in Y$

ב. לכל סדרה $\{x_n\}$ ב-E כך ש-$p\neq x_n\to p$, $f(x_n)\to q$ ב-Y.

ג. לכל תת קבוצה $H\subset E$ כך ש-p נק' גבול של H - $\lim_{x\to p} f|_H(x)=q$.

הוכחה:

א⇐ב: נתון ש $\lim_{x\to p}f(x)=q$. ניקח סדרה $p\neq x_n\to p$ ב-E. נוכיח $f(x_n)\to q$.

לשם כך יהי $\varepsilon>0$ נתון. כיוון ש $\lim_{x\to p}f(x)=q$, קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in E$

ו- $0<d_x(x,p)<\delta$ אז $d_y(f(x),q)<\varepsilon$. כעת כיוון ש $p\neq x_n\to p$, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$

אז $0<d(x_n,p)<\delta$. לפי ההנחה, לכל $n>N$ - $d_y(f(x_n),q)<\varepsilon$ ולכן $f(x_n)\to q$ כנדרש.

ב⇐א: נוכיח בשלילה, נניח שהגבול הוא לא q - כלומר $\lim_{x\to p} f(x)\neq q$. אז קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$

קיים $x\in E$ כך ש- $d(x,p)<\delta$ ובכל זאת - $d(f(x),q)\geq\varepsilon$. בפרט עבור $\delta=\frac{1}{n}$ קיים $x_n\in E$

כך ש- $d(x_n,p)<\frac{1}{n}$ ובכל זאת $d(f(x_n),q)\geq\varepsilon$. לפי זה, $x_n\to p$ אבל $f(x_n)\not\to q$ וסתירה את ב'.

ג⇐א: E תת קב' של עצמה - לכן לפי ג $\lim_{x\to p} f|_E(x)=q$ אבל $f|_E=f$ והראינו את א'.

א⇐ג: נתון ש- $\lim_{x\to p}f(x)=q$. נרצה להוכיח - $\lim_{x\to p}f|_K(x)=q$. לשם כך יהי $\varepsilon>0$ נתון.

כיוון ש- $\lim_{x\to p}f(x)=q$, קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in E$ ו- $0<d(x,p)<\delta$, אז $d(f(x),q)<\varepsilon$.

בפרט, אם $x\in K$ ו- $0<d(x,p)<\delta$ אז גם $x\in E$ ולפי הנ"ל - $d(f(x),q)<\varepsilon$.

ובכך הראינו $\lim_{x\to p}f|_K(x)=q$. מש"ל

הערה: התנאי ב' שימושי לצורך קיום גבולות, כמו שנראה בהמשך

דוגמאות!

1. נגדיר – $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ ע"י: $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ונרצה לחשב $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

דרך הפתרון: נשאיף $(x,y)\to(0,0)$ לאורך קווים ישרים $y=kx$. אם הגבול קיים, הוא חייב להיות אותו דבר לכל קו.

ואכן – $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x(kx)}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

הגבול שונה לכל קו (לכל k שונה), לכן בסה"כ אין גבול.

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

גם פה נשאיף $(x,y)\to(0,0)$ דרך $y=kx$ ונקבל – $\lim_{x\to0}\frac{x^2(kx)}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$

ויש אותו גבול לכל קו $y=kx$. זה לא מספיק להוכחה/הפרכה! ננחש ונבחין כי x^2 (החזקה המינימלית)

אבל בכל זאת אין גבול כי נשאיף $(x,y)\to(0,0)$ לאורך פרבולות $y=kx^2$ ונקבל – $\lim_{x\to0}\frac{x^2(kx^2)}{x^4+kx^4}=\frac{k}{1+k^2}$

כלומר יש גבול שונה לכל פרבולה לכן בסה"כ הגבול אינו קיים!

הערה: לשם פשטות נחזור את הדיון לפונק' מ-(X,d) אל $\mathbb{R}$.

משפט 2: אריתמטיקה של גבולות

יהי (X,d) מרחב מטרי, $E\subset X$ ו- $f,g:E\to\mathbb{R}$. תהא p נק' גבול של E,

ונניח שקיימים גבולות $\lim_{x\to p}f(x)=l\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to p}g(x)=m\in\mathbb{R}$ ו- $c\in\mathbb{R}$ קבוע. אז:

(א) $\lim_{x\to p}f(x)\pm g(x)=l\pm m$, (ב) $\lim_{x\to p}cf(x)=cl$

(ג) $\lim_{x\to p}f(x)g(x)=lm$, (ד) אם $m\neq0$ אז: $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}$.

הוכחה: בדיוק כמו בחדו"א 1 בעזרת אפיון הגבול ע"פ סדרות (משפט 1 סעיף ד').

[illegible]

משפט 3: כלל הסנדוויץ'

נניח ש-p נק' הצ' של E ובסביבת p ב-E ־ $f(x)\le g(x)\le h(x)$.

עוד נניח ש-$\lim f(x)=\lim h(x)=\ell\in\mathbb{R}$, אז $\lim g(x)=\ell$.

מסקנה 1: $\lim f(x)=0 \iff \lim|f(x)|=0$

מסקנה 2: אם $\lim f(x)=0$ ו-$g(x)$ חסומה בסביבת p אז $\lim f(x)g(x)=0$

דוגמה: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}}_{\text{חסום}}=0$ לפי מסקנה 2.

[$x^2+y^2\ge 2|x|\cdot|y|$ כי $x^2+y^2-2|x|\cdot|y|=(|x|-|y|)^2\ge 0$ ולכן זה חסום].

משפט 4: נניח ש-$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ פונ' בין מרחבים מטריים כלשהם.

עבור נק' $p\in X$ נניח ש-$\lim_{x\to p}f(x)=q\in Y$ וש-$\lim_{y\to q}g(y)=g(q)=r\in Z$

אז קיים $\lim_{x\to p}(g\circ f)(x)$ ושווה ל-r.

הוכחה: ניקח סדרה כלשהי $p\ne x_n\to p$ ב-X. לפי הנתון $f(x_n)\to q$.

נובע מהנתון ש-$g(f(x_n))\to r$ כלומר $(g\circ f)(x_n)\to r$.

הדבר נכון לכל סדרה $p\ne x_n\to p$ ב-X. עפ"י משפט 1 הנ"ל $\lim_{x\to p}(g\circ f)(x)=r$.

הערה: משפט 4 מאפשר הצבה בגבולות!

כלומר, אם מבקשים $\lim_{x\to p}g(f(x))$, נציב $y=f(x)$ ונאמר שכאשר $x\to p$, $y\to q$ ולכן $\lim_{x\to p}g(f(x))=\lim_{y\to q}g(y)=r$.

דוגמה חשובה: נמצא את $\lim_{(x,y)\to(2,1)}(x^2y^2-4xy)\frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)}$.

פתרון: נציב $t=xy-2$ אז $3t=3xy-6$, $t^2-4=x^2y^2-4xy$ וכאשר $(x,y)\to(2,1)$ אז $t\to 0$.

לכן הגבול הוא כעת -

$$\lim_{t\to 0}(t^2-4)\frac{\arcsin t}{\arctan(3t)}=\lim_{t\to 0}(t^2-4)\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin(t)}{\arctan(3t)}=(-4)\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3\cdot\frac{1}{1+9t^2}}=-\frac{4}{3}$$

"גבולות חוזרים"

לפעמים בתרגיל מהסוג $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ניתן לפתור ע"י גבולות חוזרים, כלומר, לחשב:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

<u>דוגמה:</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} x^2 e^{xy}$

$$\lim x^2 e^{xy} = \lim \lim x^2 e^{xy} = \lim x^2 e^{4x} = 4e^8$$

<u>שיטה זו לא תמיד עובדת:</u>

<u>דוגמה 1:</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \underbrace{x}_{0}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{1-y}\right)}_{\text{חסום}}$

הגבול שלם קיים ושווה 0 (חסום כפול 0 שווה 0)

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 1} x\sin\left(\frac{1}{1-y}\right) =$ לא קיים - לפי שיטת הגבולות החוזרים

<u>דוגמה 2:</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

כבר הוכחנו שהגבול השלם לא קיים.

הגבולות חוזרים: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

כמו כן, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$

הפונק' $f: X \to \mathbb{R}^n$

פונקציה זו היא קבוצת n פונקציות מ-X לתוך $\mathbb{R}$ $f(p)=(f_1(p), f_2(p), \dots f_n(p))$

כאשר כל $f_k: X \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.

משפט 5: אם $f: E \xrightarrow{\subset X} \mathbb{R}^n$ פונקציה אשר נתונה ע"י $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)$

ואם p נקודת גבול של E אז:

$\lim_{x\to p} f(x)$ קיים $\iff$ לכל k $(1\le k\le n)$, $q_k = \lim_{x\to p} f_k(x)$ קיים

ואם p, $\lim_{x\to p} f(x) = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$

הוכחה: נניח ש- $p \neq x_m \to p$ מתוך X אז למדנו בפרק על הסדרות

שהסדרה $(f_1(x_m), f_2(x_m), \dots, f_n(x_m))$ שואפת לגבול

$(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

זה קורה $\iff$ לכל $1 \le k \le n$, $\lim_{m\to\infty} f_k(x_n) = q_k$

נסמן $q=(q_1, \dots, q_n)$, נקבל ש- $\lim f(x) = q \in \mathbb{R}^n \iff$

לכל $1 \le k \le n$ מתקיים ש- $\lim_{x\to p} f_k(x) = q_k \in \mathbb{R}$

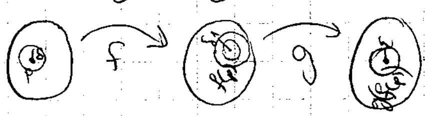
רציפות

הגדרה: יהיו X,Y מרחבים מטריים ו $E\subset X$ תת קב' כלשהי.
נאמר שהפונק' $f:X\to Y$ $\boxed{\text{רציפה}}$ בנק' $p\in E$,
אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $x\in E$ ו- $d_X(p,x)<\delta$ אז $d_Y(f(p),f(x))<\varepsilon$.

הערה: אם p נק' מבודדת ב E, אז התנאי מתקיים אוטומטית, ולכן לומר ש-f רציפה בכל נק' מבודדת ב E. אם p נק' גבול ב E אז באותו הגדרה שלמעלה $\lim_{x\to p} f(x)$ קיים ושווה $f(p)$ (כמו באינפי 1).

משפט 1: יהיו X,Y,Z מרחבים מטריים ו- $E\subset X$ תת קב' כלשהי.
נניח ש $f:E\to Y$ ו- $g:f(E)\to Z$ פונק' כלשהי.
אם f רציפה ב $p\in E$ ו- g רציפה ב- $f(p)\in f(E)$ אז הפונק' המורכבת $g\circ f$ רציפה ב-p.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ נתון. כיוון ש-g רציפה בנק' $f(p)$, קיים $\delta_1>0$ כך שאם $y\in f(E)$ ו- $d_Y(y,f(p))<\delta_1$ מתקיים, $d_Z(g(y),g(f(p)))<\varepsilon$. אבל f רציפה ב- p
ולכן קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in E$ ו- $d_X(x,p)<\delta$ אז $d_Y(f(x),f(p))<\delta$
יוצא שאם $x\in E$ ו- $d_X(x,p)<\delta$ אז $d_Z(g(f(x)),g(f(p)))<\varepsilon$.
לכן, $g\circ f$ רציפה ב- p



משפט 2: עבור $1\le k\le n$ נגדיר $f_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י הנוסחה $f_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_k$
אז עבור $1\le k\le n$, f_k רציפה בכל $\mathbb{R}^n$.
$f_1(x,y)=x \quad f_2(x,y)=y \quad f_3(x,y,z)=z$

הוכחה: ניקח $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$. נשים לב שעבור $1\le k\le n$
תמיד יתקיים $0\le|x_k-y_k|\le\|x-y\|=d(x,y)$
$$\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$
לפי משפט הסנדוויץ', אם $y\to x$, אז לכל k $y_k\to x_k$
כלומר $\lim_{y\to x} f_k(y)=f_k(x)$ ולכן f_k רציפה בכל נקודה.

הערה: $f:E\to Y$ רציפה בקב׳ $S\subset X$ אם היא רציפה בכל נק׳ של S.

דוגמה: נגדיר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע״י $f(x,y,z)=z^3e^{\sin z}$

אז f רציפה בכל $\mathbb{R}^3$, כי היא הרכבה של פונק׳ רציפות:

$f_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע״י $f_3(x,y,z)=z$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע״י $g(z)=z^3e^{\sin z}$.

לפי משפט 2 - f_3 רציפה בכל $\mathbb{R}^3$. לפי אינפי 1 g רציפה בכל $\mathbb{R}$.

נובע ממשפט 1 ש- $f=g\circ f_3$ רציפה בכל $\mathbb{R}^3$.

דוגמה: הפונק׳ $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2}$ רציפה בכל $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\neq 0\}$.

נגדיר $f_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע״י $f_1(x,y,z)=x$ ונגדיר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע״י $g(x)=\frac{1}{x^2}$

f_1 רציפה בכל מקום לכן לפי משפט 2 g רציפה בכל $x\neq 0$.

לכן $f=g\circ f_1$ רציפה בכל הנק׳ הנ״ל.

משפט 3: אריתמטיקה של רציפות

יהי X מרחב מטרי ו- $E\subset X$ תת-קב׳ כלשהי. נניח $f,g:E\to\mathbb{R}$ רציפות ב-$p\in E$ ו-$c\in\mathbb{R}$ קבוע.

אז $f\pm g$, cf, fg רציפות ב-p ו- $\frac{f}{g}$ רציפה ב-p אם $g(p)\neq 0$.

ההוכחה כמו באינפי!

הערה: עפ״י המשפט הנ״ל ניתן לבנות אוסף גדול של פונק׳ רציפות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

דוגמה: הפונק׳ $f(x,y,z)=\frac{e^{x^2y}-zx\cos y^2}{e^{z^2-\sin y}}$ רציפה בכל $\mathbb{R}^3$.

$f_1(x,y,z)=x^2$ ו- $f_2(x,y,z)=y$ רציפות עפ״י משפט 1 ו-2 ביחד

לפי אריתמטיקה - x^2y רציפה בכל $\mathbb{R}^3$. עפ״י משפט 1, e^{x^2y} רציפה בכל $\mathbb{R}^3$.

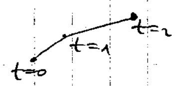
באופן דומה מוכיחים ש- $zx\cos y^2$, $e^{z^2-\sin y}$ רציפות בכל $\mathbb{R}^3$ לכן, הפונק׳ f

שלנו רציפה עפ״י משפט 3, כיוון שהמכנה תמיד שונה מ-0.

פרמטריזציות:

פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}^2$ היא פונק' מהסוג $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$

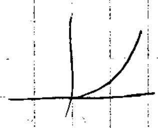
בדר"כ- $f(t)=(x(t),y(t))$ אפשר לחשוב על t כזמן. בזמן t נמצאים בנקודה $(x,y)=(x(t),y(t))$



אם הפונק' f רציפה אז היא מתארת מסילה רציפה.

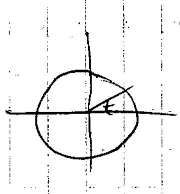
המשוואות $x=x(t)$, $y=y(t)$ כאשר $a\le t\le b$ נקראות משוואות פרמטריות של העקומה.

דוגמאות מפורשות:



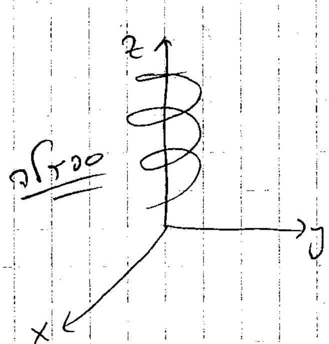
1. $f(t)=(t,t^2)$ עבור $0\le t\le 2$. אז $x(t)=t$, $y(t)=t^2$.
זה מתאר את הפרבולה $y=x^2$ בין $(0,0)$ ל-$(2,4)$.

2. $f(t)=(\sin t,\sin^2 t)$ עבור $0\le t\le \frac{\pi}{2}$. זה גם מתאר פרבולה $y=x^2$, בין $(0,0)$ ל-$(1,1)$.
ההבדל בפרמטריזציה הוא המהירות של הקו.



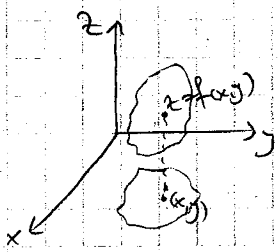
3. $f(t)=(\cos t,\sin t)$ עבור $0\le t\le 2\pi$
מתאר את מעגל היחידה $x^2+y^2=1$
נגד כיוון השעון החל מ-$(1,0)$.

4. $f(t)=(\cos t,-\sin t)$ עבור $0\le t\le 2\pi$ מתאר את מעגל היחידה עם כיוון השעון.



5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ ע"י $f(t)=(\cos t,\sin t,t)$

תיאור גרפי של פונק'



אם $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונק' של שני משתנים בלתי תלויים אזי נתאר
ע"י גרף $z=f(x,y)$ ב-$\mathbb{R}^3$.

כמה דוגמאות:

1. מישור במרחב $\mathbb{R}^3$.

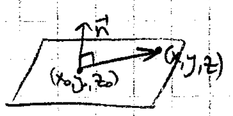
כדי לקבל את משוואת המישור נשתמש בדברים שלמדנו בשיעור הראשון:

אם $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ שני וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$,

הגדרנו מכפלה סקלרית $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{k=1}^{3}x_k y_k=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\theta$

אז $\vec{x}\cdot\vec{y}=0 \iff x=0$ או $y=0$ או $\cos\theta=0$. (כלומר $\vec{x}\perp\vec{y}$).

קל לראות שמישור במרחב נקבע באופן יחיד ע"י וקטור $\vec{n}$ הניצב לו ונק' אחת (x_0,y_0,z_0) במישור.



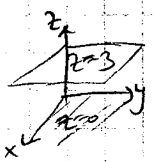
נק' (x,y,z) שייכת למישור $\iff$ הוקטור מ-(x_0,y_0,z_0) ל-(x,y,z) מאונך ל-$\vec{n}$

נרשום $\vec{n}=(a,b,c)$ ונציין הוקטור המחבר את הנק' הנ"ל $\vec{v}=(x_0-x,y_0-y,z_0-z)$.

הדרישה היא $\longleftarrow$ $\vec{n}\cdot\vec{v}=a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)=0$

ולכן נקבל שמשוואת המישור היא - $ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0\equiv d$.

כזו - המישור מוגדר ע"י משוואה ליניארית כש שמקדמי (x,y,z) הם (a,b,c) ← רכיבי $\vec{n}$.

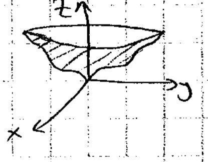


אם $c\neq 0$ המישור הוא גרף של הפונק' $z=f(x,y)=\frac{1}{c}[d-ax-by]$.

דוגמאות פשוטות במרחב - $z=0$ הוא המישור xy ולכן $z=3$ הוא מישור המקביל ל-xy בגובה 3

בדומה - $x=-3$ הוא מישור המקביל ל-yz במרחק -3 ב-x.

2. משטח של סיבוב -



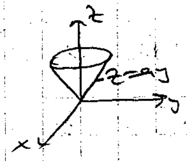
נתחיל עם גרף $z=f(y)$ ברביע הראשון, נסובב אותו סביב ציר z.

בסיבוב זה, z נשאר קבוע ו-y עובר על כל הנק' בגובה z שמרחקן מציר z הוא y.

כלומר y "הופך" ל-$\sqrt{x^2+y^2}$ ומשוואת משטח הסיבוב היא פשוט - $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$

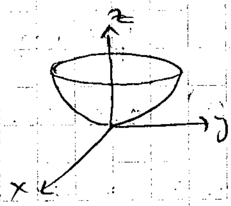
המשך דוגמאות:

3. נסובב ישר $z=ay$ סביב ציר z:



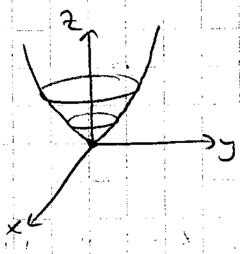
נקבל חרוט שמשוואתו $z=a\sqrt{x^2+y^2}$

או נעלה את המשוואה בריבוע - $z^2=a^2x^2+a^2y^2$.



4. נסובב פרבולה $z=ay^2$ סביב ציר z:

נקבל פרבולואיד שמשוואתו $z=a\sqrt{x^2+y^2}^2$ כלומר $z=a(x^2+y^2)$



5. נתבונן בפונקציה - $z=f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$ עבור $a,b>0$.

ננסה לקבל מושג על אופי הגרף בעזרת חתכים של המשטח.

עבור $c<0$ אין נק' בגרף. עבור $c=0$ מקבלים רק $(0,0,0)$.

אבל עבור $c>0$ מקבלים $c=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ כלומר $\frac{x^2}{ca^2}+\frac{y^2}{cb^2}=1$

כלל זה אומר שהחיתוך של המישור $z=c$ עם משטח הגרף הוא אליפסה.

נשים שהחיתוך הגרף עם המישור $y=0$ הוא פרבולה $z=\frac{x^2}{a^2}$. כמו כן אם $x=0$, $z=\frac{y^2}{b^2}$ פרבולה.

הגרף נקרא פרבולואיד אליפטי. ההבדל מפרבולואיד רגיל (דוגמא 4) הוא שחתך עם $z=c$ הוא אליפסה, ולא מעגל.

6. כבר למדנו איך לקבל משוואה לקטע ישר או ישר שלם ב-$\mathbb{R}^n$.

למשל ב-$\mathbb{R}^3$, ישר העובר בין $P=(p_1,p_2,p_3)$ לבין $Q=(q_1,q_2,q_3)$ נתון ע"י $P+t(Q-P)$ עבור $-\infty<t<\infty$.

ביתר מפורש - $x(t)=p_1+t(q_1-p_1)$, $y(t)=p_2+t(q_2-p_2)$, $z(t)=p_3+t(q_3-p_3)$.

אלה המשוואות הפרמטריות של הישר.

אם לכל $1\le k\le 3$ - $q_k-p_k\neq 0$ אז אפשר לחלץ את t ולקבל: $\frac{x-p_1}{q_1-p_1}=\frac{y-p_2}{q_2-p_2}=\frac{z-p_3}{q_3-p_3}$

אלה נקראות משוואות סימטריות של הישר והן מציגות את הישר כחיתוך של שני מישורים.

תזכורת

אם $f: X\to Y$ פונק' כלשהי:

אם $A\subseteq X$ תת קב', אז $\boxed{\text{התמונה}}$ של A היא - $f(A)=\{f(x)\in Y \mid x\in A\}\subseteq Y$.

אם $B\subseteq Y$ תת קב', אז $\boxed{\text{המקור}}$ של B הוא - $f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}\subseteq X$.

f^{-1} נקרא המקור או התמונה ההפוכה (לא כי היא הפיכה).

עבור קב' $S_\alpha\subseteq Y$: $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(S_\alpha)$, $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A} f^{-1}(S_\alpha)$, $f^{-1}(S^c)=(f^{-1}(S))^c$.

לעומת זאת עבור f נכון רק ש- $f(\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A} f(S_\alpha)$.

אם $S\subseteq X$ אז $S\subseteq f^{-1}(f(S))$ & שוויון כאשר f חח"ע

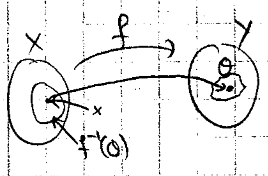
אם $S\subseteq Y$ אז $f(f^{-1}(S))\subseteq S$ עם שוויון כאשר f על.

משפט 4: יהיו X,Y מרחבים מטריים ו- $f:X\to Y$ פונק' כלשהי.

f רציפה (בכל X) $\iff$ לכל קב' פתוחה $O\subseteq Y$ מתקיים $f^{-1}(O)$ פתוחה.

הוכחה:

$\Rightarrow$ תהי $O\subseteq Y$ קב' פתוחה. רוצים להראות $f^{-1}(O)$ פתוחה ב-X.



לשם כך ניקח $x\in f^{-1}(O)$ כלשהו, ברצוננו להראות שיש סביבה N של x שכולה שייכת ל- $f^{-1}(O)$, כלו' - $f(N)\subseteq O$.

אבל $f(x)\in O$ ו-O פתוחה. לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(f(x),\varepsilon)\subset O$.

כיוון ש f רציפה ב-X, קיים $\delta>0$ כך שאם $d_X(x,y)<\delta$ אז - $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$.

במלים - כל y שברדיוס δ של x, עובר ל- $f(y)$ שברדיוס ε של y.

במילים - $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)\subset O$ והראינו שסביבה שלמה של X עוברת לתוך O. לכן $f^{-1}(O)$ פתוחה.

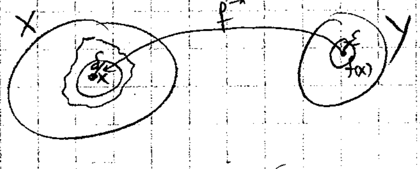
$\Leftarrow$ ניקח $x\in X$ כלשהו. רוצים להראות ש-f רציפה. לשם כך יהי $\varepsilon>0$ נתון.

כעת, הכדור $B(f(x),\varepsilon)$ פתוח ב-Y. לפי הנתון, $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ פתוח ב-X,

ומכיל את x. לכן $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ מכיל סביבה כדורית של x, נאמר $B(x,\delta)$.

כך ש- $B(x,\delta)\subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$, כלומר לכל $z\in X$ כך ש- $d(x,z)<\delta$,

מתקיים - $d(f(x),f(y))<\varepsilon$. זה בדיוק אומר ש-f רציפה ב-x.



הדבר נכון לכל $x\in X$ ובכך הוכחנו את 4.

מסקנה: $f:X\to Y$ רציפה $\iff$ לכל $K\subseteq Y$ סגורה, $f^{-1}(K)$ סגורה ב-X.

הוכחה: $\Longrightarrow$ $K\subseteq Y$ סגורה, אז K^c פתוחה. לפי משפט 4 - $f^{-1}(K^c)$ פתוחה ב-X.

אבל $f^{-1}(K^c)=[f^{-1}(K)]^c$ פתוחה, לכן $f^{-1}(K)$ סגורה כדרוש.

$\Longleftarrow$ ניקח $O\subseteq Y$ פתוחה. נרצה להראות $f^{-1}(O)$ פתוחה ואז לפי 4 f רציפה.

כיוון ש-O פתוחה, O^c סגורה. לפי הנתון - $f^{-1}(O^c)$ סגורה.

אבל $f^{-1}(O^c)=[f^{-1}(O)]^c$ סגורה לכן $f^{-1}(O)$ פתוחה לכל O פתוחה, והוכחנו f רציפה.

דוגמאות:

1. נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=x^2$. f רציפה.

$\mathbb{R}$ פתוחה אבל $f(\mathbb{R})=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ לא פתוחה!

כלומר - לא נכון שפונק' רציפה מעבירה קב' פתוחות לקב' פתוחות.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=0$. f רציפה.

$\mathbb{R}$ פתוחה אבל $f(\mathbb{R})=\{0\}$ לא פתוחה!

שוב: התמונה של קב' פתוחה היא נק' בודדת שאינה פתוחה.

צריך לזכור שבמשפט 4 יש f^{-1} ולא f, כי f לא שומר פתוחה לפתוחה.

3. נגדיר: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sqrt{x}$. f רציפה.

מתקיים $f^{-1}(\mathbb{R})=[0,\infty)$ שבפשטות סגורה ב-$\mathbb{R}$ ואינה פתוחה.

אין כאן סתירה למשפט 4 כי המשפט מדבר על רציפות של פונק' $f:X\to Y$ על כל המרחב X.

כאשר f מוגדרת על תת קב' $E\subseteq X$, צריך להתייחס ל-E כמרחב מטרי בפני עצמו ולא כתת קבוצה של X.

בדוגמא זו, הפונק' f מוגדרת מהמרחב המטרי $[0,\infty)$ ל-$\mathbb{R}$.

לכן - $f^{-1}(\mathbb{R})=[0,\infty)$ פתוחה! כי היא כל המרחב של הפונק' $[0,\infty)$ ולכן פתוחה.

הערה: משפט 5 נכון רק עבור f מוגדרת בכל X.

אם f מוגדרת על תת קב' $E\subseteq X$ לתוך Y, אז:

f רציפה ב-E $\iff$ לכל $O\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(O)$ פתוחה ב-E כאשר E מרחב מטרי בפני עצמו.

לכן כך נגדיר פתוחה יחסית, ואז המשפט אכן נכון $\iff$ $f^{-1}(O)$ פתוחה יחסית ל-E.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי ונניח $S\subset E\subset X$ תת קב'.
אומרים ש- S $\boxed{\text{פתוחה יחסית}}$ ל-E, אם״ם S פתוחה במרחב המטרי (E,d).

דוגמה: במרחב $E=[0,\infty)$, לכל $a>0$ הקטע $[0,a)$ פתוח יחסית ל-E,
כי הכדור – $[0,a)=B(0,a)=\{x\in E \mid d(x,0)<a\}$.

משפט 1: יהי (X,d) מרחב מטרי ונניח $S\subset E\subset X$.
S פתוחה יחסית ל-E $\iff$ קיימת קב' פתוחה $A\subset X$ כך ש $S=A\cap E$.

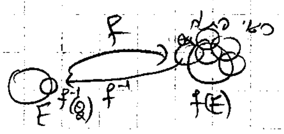
הוכחה: כבר למדנו ש $S\subseteq E$ פתוחה (כקבוצה תת קב' של (E,d)) $\iff$
S איחוד של כדורים פתוחים. כלומר לכל $x\in S$ קיים $\delta_x>0$ כך ש $B(x,\delta_x)\subset S$,
ומתקיים $S=\bigcup_{x\in S} B(x,\delta_x)$.
אבל כדורים של המרחב (E,d) – $B(x,\delta_x)=\{y\in E \mid d(x,y)<\delta_x\}=E\cap B_1(x,\delta_x)$
כאשר – $B_1(x,\delta_x)=\{y\in X \mid d(x,y)<\delta_x\}$. כעת:
S פתוחה ב-(E,d) $\iff S=\bigcup_{x\in S}B(x,\delta_x) \iff S=\bigcup_{x\in S}B_1(x,\delta_x)\cap E \iff S=E\cap\underbrace{\bigcup_{x\in S}B_1(x,\delta_x)}_{\text{פתוחה ב-X!}}$

דוגמה: אם $E=[0,1]$, אז הקטע $[0,\frac{1}{2})$ לא פתוח ב-$\mathbb{R}$, אבל פתוח יחסית ל-E,
כי – $[0,\frac{1}{2})=E\cap(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

מסקנה 1: $S\subset E\subset X$ סגורה יחסית ל-E (זה סגורה כאשר E נחשב למרחב מטרי בפני עצמו)
$\iff$ קיימת $K\subseteq X$ סגורה כך ש- $S=E\cap K$

מסקנה 2: נניח $E\subset X$ פתוחה. אז $S\subseteq E$ פתוחה יחסית ל-E $\iff$ S פתוחה ב-X
הוכחה: $\Leftarrow$ S פתוחה ב-X. אז כיוון ש- $S\subseteq E$, הרי $S=S\cap E$, ומצאנו ש-S היא חיתוך
של E עם קב' פתוחה ב-X. לכן S פתוחה יחסית ל-E.
$\Rightarrow$ S פתוחה יחסית ל-E. אז קיימת $G\subseteq X$ פתוחה כך ש- $S=G\cap E$.
אבל נתון ש-E פתוחה ב-X, לכן S חיתוך של 2 קב' פתוחות ב-X לכן פתוחה ב-X.

מסקנה 3: יהי $E\subseteq X$ תת קבוצה של מטרי ותהי $f:E\to Y$ פונק' נתונה. אזי
f רציפה ב-E $\iff$ לכל $O\subseteq Y$ פתוחה קיימת $G\subseteq X$ פתוחה כך ש- $f^{-1}(O)=E\cap G$ ($f^{-1}(O)$ פתוחה יחסית ל-E)



משפט 6: יהי Y מ"מ, $f:X\to Y$ פונ' רציפה (על X).

אז לכל $E\subseteq X$ קומפקטית, $f(E)$ קומפקטית ב-Y.

הוכחה: נרצה להוכיח $f(E)$ קומפקטית. לצורך כך ניקח כיסוי פתוח $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ של $f(E)$.

כלו' - לכל $O_\alpha\subseteq Y$ פתוחה ו- $f(E)\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha$.

כיוון ש-f רציפה, משפט 4 אומר שלכל α - $G_\alpha=f^{-1}(O_\alpha)$ פתוחה ב-X.

אזי $E\subseteq f^{-1}(f(E))\subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in A}f^{-1}(O_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$

כלומר - $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ מהווים כיסוי פתוח ל-E. אבל כיוון ש-E קומפקטית,

לכן יש תת כיסוי סופי $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}G_{\alpha_k}$. לפי זה - $f(E)\subseteq f\left(\bigcup_{k=1}^{n}G_{\alpha_k}\right)=\bigcup_{k=1}^{n}f(G_{\alpha_k})$

ואז - $f(E)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}f(f^{-1}(O_{\alpha_k}))\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}O_{\alpha_k}$

כך מצאנו תת כיסוי סופי ל-$f(E)$, והוכחנו ש-$f(E)$ קומפקטית.

מסקנה 1: משפט 6 נכון גם אם f מוגדרת ורציפה רק בתת קב' $S\subseteq X$.

כלו' אם $f:S\to Y$ רציפה, ואם $E\subseteq S$ קומפקטית (כתת קב' של X), אז $f(E)$ קומפקטית ב-Y.

מסקנה 2: אם $E\subseteq X$ קומפקטית ואם $f:E\to\mathbb{R}$ רציפה אז f חסומה.

כלו' - קיים $m>0$ כך שלכל $x\in E$ - $|f(x)|\le m$.

הוכחה: כיוון ש-E קומפקטית ו-f רציפה, משפט 6 אומר ש-$f(E)$ קומפקטית ב-$\mathbb{R}$.

אבל כבר הוכחנו שכל קב' קומפקטית במרחב מטרי חסומה. לכן $f(E)$ תת קב' חסומה של $\mathbb{R}$.

לכן קיים $m>0$ כך ש- $f(E)\subseteq B(0,m)$ כלו' לכל $x\in E$: $f(x)\in B(0,m)$ או $|f(x)|\le m$ כנדרש.

מסקנה 3: המשפט השני של ויירשטרס.

אם $E\subseteq X$ קומפקטית ואם $f:E\to\mathbb{R}$ רציפה אז f מקבלת מקסימום ומינימום ב-E.

הוכחה: לפי מסקנה 2, $f(E)$ חסומה ב-$\mathbb{R}$. לכן מוגדר היטב - $\sup_{y\in f(E)}y=\sup_{x\in E}f(x)=m<\infty$.

נוכיח שקיים $x\in E$ כך ש- $f(x)=m$ ונקבל כי זה יהיה המקסימום. הוכחת המינימום דומה.

לכל $n\in\mathbb{N}$ - $m-\frac{1}{n}<m$, לכן עפ"י אפיון ה-sup, קיים $x_n\in E$ כך ש- $m-\frac{1}{n}<f(x_n)\le m$.

כך נבנית סדרה $\{x_n\}$ ב-E. אבל E קומפקטית, אז לפי משפט בולצאנו ויירשטראס, קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}$

שמתכנסת ל- $x\in E$. כלו' - $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x$. אבל f רציפה ב-E לכן - $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x)$.

כעת לכל k - $m-\frac{1}{n}\le f(x_{n_k})\le m$. (נשאיף $k\to\infty$ ולפי סנדוויץ' - $m=\lim f(x_{n_k})=f(x)$ אז x מקסימום.

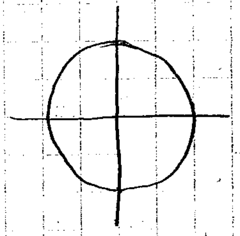
הערה: אם $f:X\to Y$ רציפה ו-$E\subseteq Y$ קומפקטית אז לאו דווקא $f^{-1}(E)$ קומפקטית ב-X.

דוגמא: ניקח $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונק' קבועה. הרי $f(\mathbb{R})$ הוא יח' בודדת $\{x_0\}$ שהוא קומפקט

אבל $\mathbb{R}=f^{-1}\{x_0\}$ לא קומפקט.

דוגמא: ניקח $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sin x$. אז $[-1,1]$ קומפקט אבל $f^{-1}([-1,1])=\mathbb{R}$ לא קומפקט

הערה: באינפי 1 הראנו שאם $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע ב-$\mathbb{R}$ ואם f רציפה ב-I ומעתיקה את I על קטע $J\subseteq\mathbb{R}$ באופן חח"ע ועל, אז ההפכית $g:J\to I$ גם רציפה.



דוגמא: נגדיר $f:(0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ ע"י $f(x)=(\cos x,\sin x)$

f מעתיקה את $(0,2\pi]$ על מעגל היחידה

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ באופן חח"ע.

f רציפה כי כל רכיב רציף. נראה שההפכית g ממעגל היחידה לקטע $(0,2\pi]$ לא רציפה

ובכן, נגדיר סדרה $P_n=(\cos\frac{1}{n},\sin\frac{1}{n})$ כך ש- $P_n\to(\cos 0,\sin 0)=(1,0)$

$g(P_n)=\frac{1}{n}$, $P_n\to(1,0)$, $g(P_n)\to 0$ אבל $g(1,0)=2\pi$

כ"א $P_n\to(1,0)$ אבל $g(P_n)\not\to g(1,0)=2\pi$ כי $g(P_n)\to 0$ לכן g לא רציפה בנקודה $(1,0)$

משפט 7: נניח ש-$E\subseteq X$ קומפקטית ו-$f:E\to Y$ חח"ע ורציפה. אז ההפכית $g:f(E)\to E$ רציפה.

הוכחה: מספיק להוכיח שאם $K\subseteq E$ סגורה אז $g^{-1}(K)$ סגורה.

אבל $g^{-1}(K)=f(K)$. כעת: $K\subseteq E$ תת קב' סגורה של קב' קומפקטית E לכן K קומפקטית

כיוון ש-f רציפה, גם $f(K)$ קומפקטית ב-Y.

בפרט, $f(K)$ סגורה (כי כל קב' קומפקטית היא סגורה).

לסיכום - לכל $K\subseteq E$ סגורה, $f(K)=g^{-1}(K)$ סגורה ולכן g רציפה ב-$f(E)$.

הערה: קומפקטיות לא תלוי באיזה קב'. זאת תכונה אוניברסלית

כלומר - קומפקטית $\Leftrightarrow$ קומפקטית ממש.

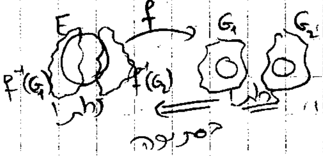
רציפות במ"ש

<u>הגדרה</u>: $f:X\to Y$ רציפה במידה שווה ב-X, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $p_1,p_2\in X$ ו- $d(p_1,p_2)<\delta$ אז- $d(f(p_1),f(p_2))<\varepsilon$.

<u>משפט 8</u>: אם $E\subseteq X$ קומפקטית ואם $f:E\to Y$ רציפה, אז f רציפה במ"ש ב-E.

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon>0$ נתון. לכל $x\in E$, f רציפה ב-x לכן קיים $\delta_x>0$ כך שלכל y ש- $d(x,y)<\delta_x$ אז- $d(f(x),f(y))<\frac{\varepsilon}{2}$. כעת, הכדורים $B(x,\frac{\delta_x}{2})$ מהווים כיסוי פתוח ל-E.
כיוון ש-E קומפקטית, קיים תת כיסוי סופי, כלומר קיימות נק' $x_1,\dots,x_n\in E$,
כך ש- $E\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\frac{\delta_{x_k}}{2})$. נגדיר- $\delta=\min(\frac{\delta_{x_1}}{2},\dots,\frac{\delta_{x_n}}{2})$.
נוכיח- לכל $y,z\in E$ המקיימים $d(y,z)<\delta$ אז- $d(f(y),f(z))<\varepsilon$:
כיוון ש $y\in E$, קיים $1\le k\le n$ כך ש- $y\in B(x_k,\frac{\delta_{x_k}}{2})$. כלומר $d(y,x_k)<\frac{\delta_{x_k}}{2}$.
כמו כן- $d(y,z)<\delta\le\frac{\delta_{x_k}}{2}$. לפי א' שוויון המשולש- $d(x_k,z)\le d(x_k,y)+d(y,z)<\frac{\delta_{x_k}}{2}+\frac{\delta_{x_k}}{2}=\delta_{x_k}$
ולכן- $d(f(y),f(z))\le d(f(y),f(x_k))+d(f(x_k),f(z))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
לכן f רציפה במ"ש ב-E.

<u>משפט 9</u>: נניח $f:X\to Y$ רציפה, ו- $E\subseteq X$ קשירה. אז $f(E)$ קשירה ב-Y.



<u>הוכחה</u>: בדרך השלילה, אם $f(E)$ לא קשירה, אז יש 2 פתוחות זרות
$G_1,G_2\subseteq Y$ כך ש- $f(E)\subseteq G_1\cup G_2$ ו- G_1,G_2 שתיהן חותכות את $f(E)$.
כיוון ש-f רציפה, $f^{-1}(G_i)$ פתוחה לכל $i=1,2$. כיוון ש $f(E)\subseteq G_1\cup G_2$,
נקבל- $E\subseteq f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)$. כיוון ש- $G_1\cap G_2=\emptyset$, גם- $f^{-1}(G_1)\cap f^{-1}(G_2)=\emptyset$
וכיוון ש- G_1,G_2 חותכות את $f(E)$, אז- $f^{-1}(G_1),f^{-1}(G_2)$ חותכות את E.
כך הוכחנו ש-E לא קשירה, בניגוד לנתון! הסתירה מוכיחה את המשפט.

<u>מסקנה 1</u>: נזכיר $E\subseteq S\subseteq X$. E קשירה יחסית ל-S $\iff$ היא קשירה ב-X.
לכן, אם $S\subseteq X$ ו- $f:S\to Y$ רציפה אז לכל $E\subseteq S$ קשירה (כתת קב' של X)
$f(E)$ קשירה ב-Y.

תזכורת: "מסילה" ב-$\mathbb{R}^n$ היא התמונה של פונק' רציפה מקטע ב-$\mathbb{R}$ לתוך $\mathbb{R}^n$.

מסקנה 2: כל מסילה ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה קשירה.

הוכחה: נניח ש-γ היא מסילה ב-$\mathbb{R}^n$. לפי ההגדרה יש קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ ופונק' רציפה $f:I\to\mathbb{R}^n$ כך ש-$\gamma=f(I)$ אבל כבר הוכחנו שקטע הוא קב' קשירה.
לכן עפ"י המשפט $f(I)=\gamma$ קשיר ב-$\mathbb{R}^n$.

הערה: כבר השתמשנו במסקנה 2 כשדיברנו על קב' קשירות מסילתית.

מסקנה 3: (משפט ערך הביניים)
יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה.
עוד נניח ש-$E\subseteq X$ קב' קשירה ונניח ש-$f(E)$ מכילה שתי נק' $a<b\in\mathbb{R}$
אזי לכל $c\in(a,b)$ קיים $x\in a$ כך ש-$f(x)=c$.

הוכחה: כיוון ש-f רציפה ו-E קשירה, $f(E)$ קשירה ב-$\mathbb{R}$
בדרך השלילה נניח $c\notin f(E)$ אז נגדיר:

$$O_1=\{y\in\mathbb{R} \mid y>c\},\ O_2=\{y\in\mathbb{R} \mid y<c\}$$

ברור ש-$\emptyset=O_1\cap O_2$, $f(E)\subset O_1\cup O_2$ (כי $c\notin f(E)$)
יתר על כן, O_1 מכילה את $a\in f(E)$ ו-O_2 מכילה את $b\in f(E)$
ז"א $f(E)\cap O_1\neq\emptyset$, $f(E)\cap O_2\neq\emptyset$
קבלנו סתרנו את הקשירות של $f(E)$. הסתירה מוכיחה את המסקנה

נגזרות

נתבונן עם פונק' $f: E\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

הגדרה: תהי $f: E\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונק' מוגדרת בסביבת $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
נגדיר את $\boxed{\text{הנגזרת החלקית}}$ של f לפי x בנק' (x_0,y_0) ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

עוד סימונים מקובלים - $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)=\partial_x f(x_0,y_0)$.

כמו כן מגדירים את הנגזרת לפי y ע"י - $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

כדי לחשב את $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ נגדיר פונק' עזר - $g(x)=f(x,y_0)$
אזי מהגדרה - $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x_0)$

כמו כן אם נגדיר $h(y)=f(x_0,y)$ אז - $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=h'(y_0)$

דוגמאות חישוב:

1. נגדיר $f(x,y)=\sin(x^2y+y^3)$ ונחשב $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$.
$f_x(1,2)$: נציב $y=2$ ונגדיר $g(x)=\sin(2x^2+8)$. אזי - $g'(x)=\cos(2x^2+8)\cdot 4x$
לכן - $f_x(1,2)=g'(1)=4\cdot\cos(10)$
$f_y(1,2)$: נציב $x=1$ ונגדיר $h(y)=\sin(y+y^3)$. אזי - $h'(y)=(1+3y^2)\cos(y+y^3)$
לכן - $f_y(1,2)=h'(2)=13\cdot\cos(10)$.

2. נגדיר $f(x,y)=\sin(x^2y+y^3)$. נחשב את f_x, f_y בנק' כללית (x,y).
f_x: נתייחס ל-y כקבוע ונגזור לפי x: $f_x(x,y)=2xy\cos(x^2y+y^3)$
f_y: " ל-x " " y: $f_y(x,y)=(x^2+3y^2)\cos(x^2y+y^3)$
כעת אם נציב את נק' $(1,2)$, נקבל את התוצאות של דוגמא 1.

3. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

עבור $(x,y)\neq(0,0)$:
f_x: $f_x=\frac{(x^2+y^2)(3x^2)-x^3(2x)}{(x^2+y^2)^2}$
f_y: $f_y=\frac{(x^2+y^2)(0)-x^3(2y)}{(x^2+y^2)^2}$

כעת נחשב $f_x(0,0)$ ע"פ הגדרה: $f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0^3}{\Delta y^2}=0$

$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=1$

המשך דוגמאות:

4. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, נחשב נגזרות חלקיות ב- $(0,0)$.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

ובגלל הסימטריות של הפונק' גם $f_y(0,0)=0$.

נזכיר שכבר הוכחנו ש- $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ אינו קיים.

אז הפונק' לא רציפה, אעפ"י שיש לפונק' נגזרות חלקיות ב- $(0,0)$ והן אפילו שוות!

זה מראה שקיום הנגזרות הוא תנאי חלש.

לכן נגזרות חלקיות הן לא הכללה מספקת לנגזרת קלאסית $f'(x)$ לפונק' על $\mathbb{R}$.

משפט 1: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת x_0. אזי:

f גזירה ב-x_0 $\iff$ קיימים מס' $A\in\mathbb{R}$ ופונק' $\varepsilon(\Delta x)$, כך ש- $\lim \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x}=0$;

ומתקיים שלכל Δx קטן - $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+\varepsilon(\Delta x)$

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח שקיימים A ו-$\varepsilon(\Delta x)$ כנ"ל. נרצה להוכיח ש-$f'(x_0)$ קיים.

מכך ש- $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+\varepsilon(\Delta x)$. אזי:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} A+\frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x}=\underline{\underline{A}}$$

$\Rightarrow$ נתון $f'(x_0)$ קיים. נקרא לה- $f'(x_0)=A$. נגדיר - $\varepsilon(\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x$

אזי - $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-A=\underline{\underline{0}}$ כי $f'(x_0)=A$. מש"ל

הערה: משפט 1 נותן מוטיבציה להגדרה הבאה

הגדרה: נניח $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0). נאמר ש-f $\boxed{\text{דיפרנציאבילית}}$ ב-(x_0,y_0) אם קיימים מס' A,B ופונק' $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ כך שלכל $\Delta x,\Delta y$ קטנים מתקיים:

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ כאשר - $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$

משפט 2: נניח ש-$f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0) ושהיא דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0).

אזי: (א) f רציפה ב-(x_0,y_0).

(ב) f_x, f_y קיימות ב-(x_0,y_0) ושוות ל-A,B בהתאמה (מההגדרה).

הוכחה:

(א) כידוע - f רציפה ב-(x_0,y_0) $\iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \iff \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta x)=f(x_0,y_0)$

כאשר הגדרנו $\Delta y=y-y_0,\ \Delta x=x-x_0$. אבל:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=f(x_0,y_0)+0+0+0$$

לכן f רציפה ב-(x_0,y_0)

(ב) נרצה לחשב f_x, לכן ניקח $\Delta y=0,\ \Delta x=\Delta x$, ואז:

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+B\cdot 0+\varepsilon(\Delta x,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} A+\frac{\varepsilon(\Delta x,0)}{\pm\sqrt{\Delta x^2+0^2}}\to 0$$

והראינו f_x קיים ב-(x_0,y_0) ושווה A. כמו כן ניתן להוכיח $f_y(x_0,y_0)$ קיים ושווה B.

שאלה: איך בודקים אם פונק' נתונה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0)?

תשובה: תחילה בודקים שקיימות $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$, אחרת, כי אם לא f לא דיפרנציאבילית [illegible]

אם כן נגדיר $A=f_x(x_0,y_0)$, $B=f_y(x_0,y_0)$ (ונגדיר - $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta y, y_0+\Delta x)-A\Delta x-B\Delta y$

ונבדוק אם מתקיים - $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\ }}=0$ אם כן זה דיפ׳ נכון!

במקום זה - נוכל להשתמש במשפט 3 -

אם f_x,f_y קיימות ורציפות בסביבת (x_0,y_0) אז f דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0).

הכנה למשפט 3:

1. **משפט לגרנז':**

אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) אז קיים $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

שקול- אם f רציפה בקטע $[x_0,x_0+\Delta x]$ וגזירה ב-$(x_0,x_0+\Delta x)$ אז קיים $c\in(x_0,x_0+\Delta x)$

כך ש- $f'(c)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

c בין x_0 ל- $x_0+\Delta x$ $\Leftrightarrow$ קיים $t\in(0,1)$ כך ש- $c=x_0+t(x_0+\Delta x-x_0)=x_0+t\Delta x$.

לכן לגרנז' אומר שקיים $t\in(0,1)$ כך ש- $f'(x_0+t\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

לכן $f(x,y)$ שגזירה לפי x ב-(x_0,y_0) מקיים - $f_x(x_0+t\Delta x,y_0)=\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ עבור $t\in(0,1)$

מתאים. כמו כן - $f_y(x_0,y_0+t_1\Delta y)=\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ עבור $t_1\in(0,1)$ מתאים.

2. נזכיר ש- $f(x,y)$ רציפה ב- (x_0,y_0) $\Leftrightarrow$ $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta x)=f(x_0,y_0)+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$

כאשר - $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\ }}=0$.

משפט 3: נניח $f(x,y)$ מוגדרת ובעלת נגזרות חלקיות בסביבת (x_0,y_0),

ונניח f_x, f_y רציפות ב-(x_0,y_0), אז f דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0).

הוכחה: $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$

לפי לגרנז' - $=f_x(x_0+t_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+t_2\Delta y)\Delta y$

נתון f_x,f_y רציפות ב-(x_0,y_0) לכן לפי הכנה 2 - נקבל שהשורה האחרונה שווה ל:

$[f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1(t_1\Delta x,\Delta y)]\Delta x+[f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2(0,t_2\Delta y)]\Delta y$ כאשר - $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_i=0$ עבור $i=1,2$.

כלומר - $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ כאשר $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$.

נותר להוכיח $\lim\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$ אבל זה שווה ל- $\lim\underset{\downarrow\atop 0}{\varepsilon_1}\underbrace{\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\text{חסום}}+\underset{\downarrow\atop 0}{\varepsilon_2}\underbrace{\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\text{חסום}}=0$

דוגמא: $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$: נראה ש-f_x,f_y קיימות בסביבת $(0,0)$ אבל לא רציפות שם ובכל זאת f דיפ'.

ובכן- עבור $(x,y)\neq(0,0)$ - $f_x=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{(x^2+y^2)(-x)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

ועפ"י סימטריה- f_y תהיה זהה, רק שבמקום x יהיה y.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\underset{\downarrow 0}{\Delta x}\underbrace{\sin\frac{1}{|\Delta x|}}_{\text{חסום}}=0$$

עפ"י סימטריה, גם $f_y(0,0)=0$. כעת נראה ש-f_x לא רציפה ב-$(0,0)$.

ובכן- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\underset{\downarrow 0}{2x}\underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{חסום}}-\frac{x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

לביטוי השני אין גבול, כי- אם נשאיף $(x,y)\to(0,0)$:

לאורך ציר ה-x $(y=0)$ אז נקבל ש- $\lim_{x\to0}\frac{x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{x}{|x|}}_{\pm1}\underbrace{\cos\frac{1}{|x|}}_{\text{משתנה!}}$ אין גבול

כלומר- f_x,f_y קיימות בסביבת $(0,0)$ אבל f_x לא רציפה ב-$(0,0)$ ועפ"י סימטריה גם f_y לא רציפה שם.

נראה עתה שאעפ"כ f דיפ' ב-$(0,0)$:

אם כבר חישבנו - $A=f_x(0,0)=0$, $B=f_y(0,0)=0$.

צריך להראות - $$0=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

אכן- $\lim\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\underset{\downarrow 0}{\sqrt{\ }}\underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{\ }}}_{\text{חסום}}$ והראינו שהגבול הנ"ל אפס!

לכן f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ למרות שהנגזרות החלקיות לא רציפות שם!

הסבר המשמעות של נגזרת חלקית

1. הסבר "פיזיקלי" -

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{שינוי ב-}f}{\text{שינוי ב-}x}\leftarrow \text{כלומר}$$

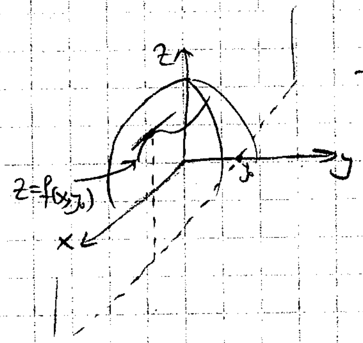
כלומר $f_x(x_0,y_0)$ הוא קצב השינוי של f ביחס ל-x, כאשר יוצאים מ-(x_0,y_0) בכיוון $+x$.

לדוגמא: נניח ש $f(x,y)$ = הטמפ' בנק' (x,y) ונניח $f_x(1,2)=3$, $f_y(1,2)=-5$.

אז אם יוצאים מ-$(1,2)$ בכיוון החיובי של x למרחק יחידה קטנה, אז הטמפ' תעלה ב-3 יח' בקירוב
ואם נלך בכיוון החיובי של y יח' קטנה, הטמפ' תרד ב-5 יח'.

2. הסבר גרפי -

שיפוע המשיק של העקומה $z=f(x,y_0)$
במישור $y=y_0$ הוא $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$.



מצא וקטור מקביל למשיק זה $\vec{V}_1=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$.

כמו כן - ישנה עקומה שהיא החיתוך של המשטח $z=f(x,y)$ עם המישור $x=x_0$.

ושיפוע של אותה עקומה שווה $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ ווקטור המקביל למשיק לעקומה זו - $\vec{V}_2=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

משיקים אלו אפשר לבנות "מישור משיק" לגרף $z=f(x,y)$.

והנה - נניח $f(x,y)$ דיפ' ב-(x_0,y_0) אזי - $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon$

נסמן $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, $z=f(x,y)$, $z_0=f(x_0,y_0)$ אזי $z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon$

עבור (x,y) קרוב ל-(x_0,y_0) – כלו' $(\Delta x,\Delta y)$ קטן, הפונק' שלנו מקורבת ע"י $z\approx z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0)$

ולכן הגרף $z=f(x,y)$ מקורבת ע"י המישור - $A(x-x_0)+B(y-y_0)-(z-z_0)=0$.

מישור זה נקרא $\boxed{\text{המישור המשיק}}$ לגרף $z=f(x,y)$ בנק' (x_0,y_0,z_0) .

הצדקנו את זה שמישור משיק מקרב את הגרף היטב בסביבת (x_0,y_0,z_0) .

עוד הצדקה - הנורמל למישור הזה הוא - $\vec{n}=(A,B,-1)=(f_x(0,0),f_y(0,0),-1)$,

ה-וקטורים שבנינו קודם $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ מקיימים - $\vec{n}\cdot\vec{V}_1=\vec{n}\cdot\vec{V}_2=0$, כלו' $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ מאונכים ל-$\vec{n}$.

לכן שניהם מקבילים למישור המשיק שבנינו.

__דוגמאות חישוב:__

נגדיר $f(x,y)=x^2y^3$ הראו ש- f דיפרנציאבילית ב- $(x,y)=(1,2)$

ומצאו את המישור המשיק לגרף $z=f(x,y)$ בנק' $(1,2,8)$.

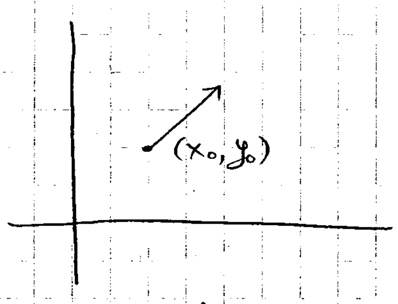
__תשובה:__ $f_x=2xy^3$, $f_y=3x^2y^2$ והן רציפות בכל מקום ולכן f דיפ' בכל מקום.

בנק' $(x_0,y_0)=(1,2)$ נקבל - $f_x=16=A$, $f_y=12=B$

המישור המשיק הוא

__שאלה:__ מה מיוחד בכיוונים של x ו-y שבהם מחשבים נגזרות חלקיות?

__תשובה:__ כלום לא!



ועתה נניח נתונה $f(x,y)$ ונקודה בתחום (x_0,y_0) ו- $\vec{u}$ וקטור כלשהו ב- $\mathbb{R}^2$.

אם $\vec{u}=(a,b)$ ואם נזוז t יחידות בכיוון $\vec{u}$ החל מ- (x_0,y_0) , אז נגיע אל:

$$(x_0,y_0)+t(a,b)=(x_0+at,y_0+bt)=\underline{(x_0,y_0)+t\vec{u}}$$

ואז מגיעים לנקודה הבאה!

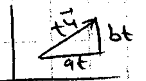
נגזרת כיוונית

<u>הגדרה:</u> תהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0) ויהי $\vec{u}$ וקטור יחידה, כלומר $\|\vec{u}\|=1$.
אז $\boxed{\text{הנגזרת הכיוונית}}$ של f בכיוון $\vec{u}$ ב-(x_0,y_0) מוגדרת ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=f_u(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t} \quad \text{כאשר } \vec{u}=(a,b).$$

(אם $\vec{u}=\vec{e_1}$ הכיוון החיובי של x אז $f_u=f_x$ ואם $\vec{u}=\vec{e_2}$ הכיוון החיובי של y אז $f_u=f_y$)

<u>הערה:</u> $\frac{\partial f}{\partial u}$ הוא קצב השינוי של f לפי מרחק בכיוון של $\vec{u}$.



כמו כן, מישור בכיוון $\vec{u}$ ו-z חותך את הגרף $z=f(x,y)$ באיזו עקומה. השיפוע של העקומה בנק' $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ הוא $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)$

<u>משפט 4:</u> תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0) ודיפרנציאבילית שם.
אז לכל וקטור יחידה $\vec{u}=(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)$ קיים ונתון ע"י $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

<u>הוכחה:</u> לפי הגדרה, $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}$. כיוון ש-$f$ דיפ', זה שווה:

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(at)+B(bt)+\varepsilon(at,bt)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(Aa+Bb+\frac{\varepsilon(at,bt)}{t}\right)$$

נראה להראות $\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(at,bt)}{t}=0$. אכן $\vec{u}=(a,b)$ וקטור יחידה, כלומר $\|u\|^2=a^2+b^2=1$
לכן $|t|=\sqrt{(at)^2+(bt)^2}$ ונקבל -
$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(at,bt)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(at,bt)}{|t|}\cdot\frac{|t|}{t}=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\varepsilon(at,bt)}{\sqrt{(at)^2+(bt)^2}}}_{0}\underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\text{חסום}}$$

כדרוש, כלומר מצאנו ש-$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)$ קיים ושווה $Aa+Bb=af_x(x_0,y_0)+bf_y(x_0,y_0)$.

<u>דוגמא:</u> נגדיר -
$$f(x,y)=\begin{cases} y & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

טענה - f רציפה ב-$(0,0)$ כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ לפי הנוסחה.
לציר x ולציר y $f(x,y)\equiv 0$, לכן - $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.
עתה עבור $\vec{u}=(a,b)$ וקטור יחידה נחשב $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$.

אם $\vec{u}$ לא מקביל לאחד הצירים:
$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+at,0+bt)-f(0,0)}{t}=\lim\frac{bt-0}{t}=b$$
וזה לא שווה ל- $af_x(0,0)+bf_y(0,0)=0$.

נובע ממשפט 4 ש-f לא דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ (כי אם כן היה מתקיים $f_u=af_x+bf_y$)

סיכום משפטים 3,2 ו-4: נגזרות חלקיות רציפות $\Leftarrow$ דיפרנציאבילית $\Leftarrow$ רציפות ונגזרות קיימות בכל כיוון

גרדיאנט

<u>הגדרה:</u> נניח ש- $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0) ובעלת נגזרות חלקיות ב-(x_0,y_0) אז הוקטור $\left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\right)$, נקרא הגרדיאנט של f, ומסומן $\nabla f(x_0,y_0)$.

<u>מסקנה 1:</u> (משפט 4)

אם f דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0) ואם $\vec{u}=(a,b)$ וקטור יחידה אז $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u}$

<u>הוכחה:</u> לפי הגדרת המכפלה הסקלרית $\nabla \vec{f}\cdot\vec{u}=f_x(x_0,y_0)a+f_y(x_0,y_0)b$ ולפי משפט 4 זה בדיוק $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)$

<u>הערה:</u> מכאן מהשוויון הראשון - $\frac{\partial f}{\partial u}=\cos\theta\|\nabla\vec{f}\|=\cos\theta\|\vec{u}\|\|\vec{\nabla} f\|=\vec{\nabla} f\cdot\vec{u}$

זה מקסימלי כאשר $\cos\theta=1$, $\theta=0$.

לכן $\frac{\partial f}{\partial u}$ מקסימלי כאשר u פונה לכיוון $\vec{\nabla} f$ (כדי שהנגזרת הכיוונית תהיה גדולה) ו- $(\vec{\nabla} f)$ פונה לכיוון של קצב עליה מקסימלי של f.

<u>מסקנה 2:</u> (משפט 4)

$\vec{\nabla} f(p)$ הוא וקטור שפונה לכיוון של קצב גידול מקסימלי של f (ב- p),

ואורכו $\|\vec{\nabla} f(p)\|$ שווה לאותו קצב מקסימלי.

<u>הוכחה:</u> לוקטור יחידה $\vec{u}$ מתקיים - $\frac{\partial f}{\partial u}(p)=\vec{\nabla} f(p)\cdot\vec{u}$ אז - $\frac{\partial f}{\partial u}(p)=\|\vec{\nabla} f(p)\|\cos\theta$

כאשר θ היא הזווית בין $\vec{\nabla} f, \vec{u}$. זה מקסימלי כאשר $\theta=0$ (כלומר $\vec{u}$ בכיוון $\vec{\nabla} f$)

ואז $\frac{\partial f}{\partial u}(p)=\|\vec{\nabla} f(p)\|$ כדרוש.

<u>דוגמא חשובה:</u> הגובה של הר מעל (x,y) נתון ע"י - $f(x,y)=100-x^2-y^3$. אדם עומד בהר מעל הנק' $(3,2)$.

בכיוון איזה וקטור הוא צריך ללכת כדי שיהיה לו קצב ירידה מקסימלי?

<u>תשובה:</u> $f(x,y)=100-x^2-y^3$. אז - $f_x=-2x$, $f_y=-3y^2$ לכן - $\vec{\nabla} f(3,2)=(-6,-12)$

$\vec{\nabla} f$ פונה לכיוון של קצב עליה מקסימלי. הכיוון של קצב ירידה מקסימלי הוא $-\vec{\nabla} f=(6,12)$.

אז התשובה תהיה וקטור ב- $\mathbb{R}^3$ מהצורה $(6,12,c)$ שמשיק להר בנק' $(3,2,83)$.

כזכור - וקטור הנורמל למשטח $z=f(x,y)$ נתון ע"י - $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ אז במקרה שלנו $\vec{n}=(-6,-12,-1)$

הדרישה היא - $\vec{n}\cdot\vec{v}=(-6,-12,-1)(6,12,c)=0$ כלומר $0=-36-144-c$ אז - $\underline{c=-180}$

התשובה הסופית היא שצריך ללכת את הפני' בכיוון $(6,12,-180)$

הכללה לפונק' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

הגדרה: תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ תת-קבוצה ו- $f:E\to\mathbb{R}$ ותהי נקודה פנימית $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. עבור $1\le k\le n$ נגדיר נגזרת חלקית: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\lim \frac{f(x_1,\dots,x_k+\Delta x_k,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{\Delta x_k}$

הגדרה: f תקרא דיפרנציאבילית בנקודה x אם קיימים מספרים $A_1,A_2,\dots,A_n$ ופונק' $\varepsilon(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)$ כך ש-

$$f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_n+\Delta x_n)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{k=1}^{n}A_k\Delta x_k+\varepsilon(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$$

ו- $$\lim_{(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta x_1^2+\dots+\Delta x_n^2}}=0$$

ניסוח אחר - יפה: נגדיר וקטור $h=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ ווקטור $x=(x_1,\dots,x_n)$

נאמר ש-f דיפרנציאבילית ב-x אם קיימת טרנספורמציה $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ופונק' $\varepsilon(h)$ כך ש- $\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$

ומתקיים לכל h קטן: $f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$

הגדרה: תהיינה f כנ"ל, אם $a=(a_1,\dots,a_n)$ וקטור יחידה ב-$\mathbb{R}^n$ אז נגדיר נגזרת כיוונית:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_1+a_1t,x_2+a_2t,\dots,x_n+a_nt)-f(x_1,\dots,x_n)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$$

עוד נגדיר את הגרדיאנט של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י הוקטור $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=(f_{x_1},\dots,f_{x_n})$

משפט 2: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת $x\in\mathbb{R}^n$ ודיפרנציאבילית ב-x, כלומר $f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$, כאשר: $h=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$, $L(h)=(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}A_k\Delta x_k$

אז - א. f רציפה ב-x.

ב. לכל $1\le k\le n$ קיים - $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ ושווה A_k.

ג. לכל וקטור יחידה $\vec u\in\mathbb{R}^n$ קיימת הנגזרת הכיוונית - $\frac{\partial f}{\partial u}(x)=\vec\nabla f(x)\cdot\vec u$

הוכחה:

א. רציפות ב-x שקולה לכך ש- $\lim_{h\to0}f(x+h)=f(x)$. ובאמת - $\lim_{h\to0}f(x+h)=\lim_{h\to0}[f(x)+L(h)+\varepsilon(h)]=f(x)$

כי L לינארית ורציפה ולכן $\lim_{h\to0}L(h)=L(0)=0$ וכן גם - $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h)}{h}h=0$ לכן f רציפה.

ב. עבור $1\le k\le n$ - $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\lim_{\Delta x_k\to0}\frac{f(x_1,\dots,x_k+\Delta x_k,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{\Delta x_k}=\lim_{\Delta x_k\to0}\frac{f(x+\Delta x_ke_k)-f(x)}{\Delta x_k}$

כאשר $\vec e_k$ וקטור בסיס בכיוון x_k. בשורה האחרונה שווה $\lim_{\Delta x_k\to0}\frac{L(\Delta x_ke_k)+\varepsilon(\Delta x_ke_k)}{\Delta x_k}=\lim_{\Delta x_k\to0}\left[\frac{\Delta x_kL(e_k)+\varepsilon(\Delta x_ke_k)}{\Delta x_k}\right]$

אז - $L(e_k)+\lim_{\Delta x_k\to0}\left[\frac{\varepsilon(\Delta x_ke_k)}{\|\Delta x_ke_k\|}\cdot\frac{\|\Delta x_ke_k\|}{\Delta x_k}\right]=L(\vec e_k)$, כלומר $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ קיים ושווה $L(e_k)=A_k$ כדרוש.

ג. אם $a=(a_1,\dots,a_n)$ אז $\frac{\partial f}{\partial u}(x)=\lim_{t\to0}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{L(tu)+\varepsilon(tu)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{tL(u)+\varepsilon(tu)}{t}=L(u)$

וכן קיבלנו ש- $L(u)=(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(f_{x_1}(x),\dots,f_{x_n}(x))\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\vec\nabla f(x)\cdot\vec u$ כדרוש.

משפט 6: נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת ובעלת נגזרות חלקיות $f_{x_1},\dots,f_{x_n}$ בסביבת $x\in\mathbb{R}^n$.
אם $f_{x_1},\dots,f_{x_n}$ רציפות ב-x, אז f דיפרנציאבילית שם.

הוכחה: ההוכחה דומה לזו של משפט 3, שהוא המקרה הפרטי של $\mathbb{R}^2$ במקום $\mathbb{R}^n$.

דיפרנציאל

הגדרה: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת $x\in\mathbb{R}^n$ ודיפרנציאבילית ב-x, כלומר $f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$.
הטרנספורמציה הלינארית $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נקראת $\boxed{\text{הדיפרנציאל}}$ של f ב-x.
מסומן - $df|_x=L$.

הערה: כבר ראינו שאם f דיפרנציאבילית ב-x אז $df|_x(h)=L(h)=\vec{\nabla}f(x)\cdot\vec{h}$.
במילים - $df|_x$ הוא טרנ' לינארית מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$ שמקרבת היטב $f(x+h)-f(x)$ עבור h קטן,
כמו התפקיד של הנגזרת הקלאסית $f'(x)$ בפרק 1.

משפט 7: (אריתמטיקה של דיפרנציאלים)
נניח ש- $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרות בסביבת $x\in\mathbb{R}^n$ ודיפרנציאביליות ב-x.
נניח ש- $a,b\in\mathbb{R}$ מספרים, אזי -

(א) $d(af+bg)|_x=a\,df|_x+b\,dg|_x$ (ובפרט - $af+bg$ דיפ' ב-x)

(ב) $d(fg)|_x=f(x)\cdot dg|_x+g(x)\cdot df|_x$ (ובפרט - fg דיפ' ב-x)

(ג) אם $g(x)\neq 0$ - $d\left(\frac{f}{g}\right)\Big|_x=\frac{g(x)\cdot df|_x-f(x)\cdot dg|_x}{g^2(x)}$ (ובפרט - f/g דיפ' ב-x)

הוכחה:

(ב) צריך להוכיח ש- $(fg)(x+h)=(fg)(x)+L(h)+\varepsilon(h)$, כאשר $\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$
ו- $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ טרנספורמציה לינארית שבעצם שווה ל- $f(x)\,dg|_x+g(x)\cdot df|_x$.

$$(fg)(x+h)-(fg)(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)=$$
$$=f(x+h)\left[dg|_x(h)+\varepsilon_g(h)\right]+g(x)\left[df|_x(h)+\varepsilon_f(h)\right]$$

כיוון ש-f דיפרנציאבילית ב-x היא רציפה ב-x ולכן - $f(x+h)=f(x)+\varepsilon_1(h)$
כאשר $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$. לסיכום, $(fg)(x+h)-(fg)(x)=f(x)\,dg|_x(h)+g(x)\,df|_x(h)+\varepsilon(h)$,
כאשר $\varepsilon(h)=\varepsilon_1(h)dg|_x(h)+\varepsilon_1(h)\varepsilon_g(h)+f(x)\varepsilon_g(h)+g(x)\varepsilon_f(h)$, נותר להוכיח ש- $\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$ -
האיבר הראשון ב- $\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}$ הוא

המשך הוכחה:

האיבר הראשון ב- $\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}$ הוא $\frac{\varepsilon_1(h)\, dg|_x(h)}{\|h\|}$ וזה שווה ל- $\underbrace{\varepsilon_1(h)}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \cdot \underbrace{dg|_x\left(\frac{h}{\|h\|}\right)}_{\text{חסום}}$

הסבר - $\frac{h}{\|h\|}$ וקטור יחידה נגדיר u ואז $dg|_x\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = dg|_x(u) = \vec{\nabla} g(x)\cdot\vec{u} \le \|\vec{\nabla} g(x)\|$ וזה חסום

האיבר השני ב- $\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}$ הוא $\frac{\varepsilon_1(h)\,\varepsilon_g(h)}{\|h\|}$ $\xrightarrow{h\to 0} 0$, האיבר הרביעי הוא $\underbrace{g(x)}_{\text{קבוע}} \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon_f(h)}{\|h\|}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0}$

האיבר השלישי: $f(x)\varepsilon_g(h)$ ← באופן דומה.

מסקנה: (מסעיף ב')

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ כאשר f ו-g דיפרנציאביליות.

הכללה לפונק' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ ← ההכללה המקסימלית - פונק' וקטורית

זה בעצם k פונק' מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$ - $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_k(x))$ כאשר $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ לכל $1\le j\le k$

<u>הגדרה:</u> תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ המוגדרת בסביבת $x\in\mathbb{R}^n$.

f $\boxed{\text{דיפרנציאבילית}}$ ב-x אם לכל וקטור $h\in\mathbb{R}^n$ מתקיים - $f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$

כאשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ לינארית, ו- $\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$

<u>הערה:</u> לפעמים נוח לחשוב על פונק' כזו כפונק' וקטורית כי התמונה של f היא וקטור ב-$\mathbb{R}^k$.

<u>משפט 8:</u> תהי $f=(f_1,\dots,f_k)$ מוגדרת בסביבת $x\in\mathbb{R}^n$ (לתוך $\mathbb{R}^k$).

אז f דיפ' ב-x $\Longleftrightarrow$ $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ל-$1\le j\le k$ דיפ' ב-x.

ואם כן - $df|_x=(df_1|_x,\dots,df_k|_x)$

כלו' עבור $h\in\mathbb{R}^n$ - $df|_x(h)=(df_1|_x(h),\dots,df_k|_x(h))$.

<u>הוכחה:</u>

$\Leftarrow$ נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ דיפ' ב-x. נעזר בהטלה $p_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת $p_j(x_1,\dots,x_n)=x_j$.

כיוון שנתון ש-f דיפ' ב-x, אז - $f(x+h)=f(x)+L(h)+\varepsilon(h)$ עבור $L,\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ כלשהן.

ולכן $1\le j\le n$:

$$f_j(x+h)-f_j(x)=p_j(f(x+h)-f(x))=p_j(L(h)+\varepsilon(h))=\underbrace{p_j(L(h))}_{\substack{\| \\ (p_j\circ L)(h)}}+p_j(\varepsilon(h))$$

וזה אכן לינארי כנדרש

עלינו להראות f_j דיפ' ב-x, נותר להראות - $\lim_{h\to0}p_j(\varepsilon(h))/\|h\|=0$

אבל - (כי p_j לינארית, כי p_j רציפה)

$$\lim_{h\to0}\frac{p_j(\varepsilon(h))}{\|h\|}=\lim_{h\to0}p_j\left(\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}\right)=p_j(0)=0$$ וסיימנו!

$\Rightarrow$ נניח של f_j דיפ' ב-x. כלו' לכל $1\le j\le n$: $f_j(x+h)-f_j(x)=df_j|_x(h)-\varepsilon_j(h)$

ואז - $f(x+h)-f(x)=(f_1(x+h)-f_1(x),\dots,f_k(x+h)-f_k(h))=\underbrace{(df_1|_x(h),\dots,df_k|_x(h))}_{\text{לינארי!}}+\underbrace{(\varepsilon_1(h),\dots\varepsilon_k(h))}_{\varepsilon(h)}$

נותר להראות $\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$ - אבל $\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\varepsilon_1(h)}{\|h\|}+\dots+\frac{\varepsilon_k(h)}{\|h\|}\right)=0$

כי כל רכיב שואף לאפס לפי דיפ' של f_j.

וכלל גם הראנו - $df|_x=(df_1|_x,\dots,df_k|_x)$.

<u>הערה חשובה</u>: לפי משפט 8 אם $h=(h_1,\dots,h_n)$ נכתוב וקטור עמודה

$$df|_x(h)=\begin{pmatrix} df_1|_x(h) \\ \vdots \\ df_k|_x(h) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \nabla f_1\cdot h \\ \vdots \\ \nabla f_k\cdot h \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}h_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}h_1+\dots\dots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}h_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}h_1+\dots\dots+\frac{\partial f_k}{\partial x_n}h_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

<u>הגדרה</u>: המטריצה $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ $(1\le j\le n,\ 1\le i\le k)$ שמייצגת את $df|_x$ נקראת $\boxed{\text{מטריצת היעקוביאן}}$ של f ב-x. עוד סימון מקובל למטריצה זו הוא- $\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_k)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right)$

אם $k=n$ (והמטריצה ריבועית), הדטרמיננטה שלה נקראת "היעקוביאן של f" מסומן $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$.

כלל השרשרת לגזירת פונקציות מורכבות

נתחיל עם מקרה פשוט $f(x,y,z)=\sin(xy^2z^3)$ זאת פונקציה מורכבת $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע"י $g(x,y,z)=xy^2z^3$ ו- $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $h(t)=\sin t$, אז $f=h\circ g$

אפשר לחשב את הנגזרות החלקיות של f "בחינם":

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(xy^2z^3)\cdot(y^2z^3),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\cos(xy^2z^3)(2xyz^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\cos(xy^2z^3)(3xy^2z^2)$$

הכלל הוא: $\frac{\partial f}{\partial x}=h'(g(x,y,z))\frac{\partial g}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=h'(g(x,y,z))\frac{\partial g}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=h'(g(x,y,z))\frac{\partial g}{\partial z}$$

לא היינו צריכים להניח ש-g דיפ': מספיק שיש לה נגזרות חלקיות.

מקרה שני עניין הפונק' מהסוג $g(t)=f(x(t),y(t))$ -

כאן, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ו- $x,y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g מתאימה מ-$\mathbb{R}$ לתוך $\mathbb{R}$.

שאלה - איך מחשבים את $g'(t)$?

לצורך זה נניח ש-x ו-y מוגדרות בסביבת t_0 וגזירות ב-t_0.

עוד נניח ש- $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ ו-f דיפ' ב-(x_0,y_0).

נזכור ש-

$$g'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+t_0)-g(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta t}$$

כעת, כיוון ש-f דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0):

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$$

ז"א - $\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$, כעת -

$$g'(t_0)=\lim\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim\left[A\frac{\Delta x}{\Delta t}+B\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\Delta t}\right]=$$

$$=Ax'(t_0)+By'(t_0)+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\Delta t}$$

אבל -

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\Delta t}=\lim\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\underbrace{\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\to 0}(\pm)\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}}_{=\pm\sqrt{(x')^2+(y')^2}}=0$$

<u>מסקנה:</u> $g'(t_0)$ קיימת ושווה ל-

$$Ax'(t_0)+By'(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,y'(t_0)$$

כלומר -
$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

<u>מקרה שימושי</u>, אם $x=x(t,u)$, $y=y(t,u)$ גזירות ו- $f(x,y)$ דיפ'.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

סימון וקטורי נוסח $\vec{v}=(x(t,u),y(t,u))$, $f=f(x,y)$, $g=f(\vec{v}(t,u))$

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\vec{\nabla}f(\vec{v}(t,u))\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}(t,u)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

ובקלות אפשר להכליל נוסחה זו לפונק' של הרבה משתנים.

<u>משפט:</u> נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ מוגדרת בסביבת נק' $p\in\mathbb{R}^n$ ודיפ' ב-p
נסמן $f(p)=q\in\mathbb{R}^m$ ונניח $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ מוגדרת בסביבת $q\in\mathbb{R}^m$
ודיפ' ב-q.
אז הפונק' המורכבת $g\circ f$ דיפ' ב-p ומתקיים:
$$d(g\circ f)=dg|_q\circ df|_p$$
(מבחינת מטריצות בשפה מכפילים את היעקוביאנים של f ו-g)

<u>הוכחה:</u> עבור וקטור $h\in\mathbb{R}^n$ קטן,

$$(g\circ f)(p+h)-(g\circ f)(p)=g[f(p+h)]-g[f(p)]=g[\underbrace{f(p+h)}_{q+k}]-g(q)=$$

$$=dg|_q[f(p+h)-f(p)]+\varepsilon_g(f(p+h)-f(p))=dg|_q[df|_q+\varepsilon_f(h)]+\varepsilon_g(f(p+h)-f(p))=$$

$$=[dg|_q\circ df|_q](h)+\underbrace{dg|_q(\varepsilon_f(h)+\varepsilon_g(\Delta f)}_{\varepsilon}$$

נותר להוכיח ש- $\lim\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|}=0$ אבל -

$$\lim_{h\to 0}\frac{dg|_q(\varepsilon_f(h))}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}dg|_q\left(\frac{\varepsilon_f(h)}{\|h\|}\right)=dg|_q(0)=0$$

כי dg לינארי   כי $dg|_q$ רציפה   כי $dg|_q$ לינארית

כיוון ש-f רציפה ב-p $\lim\Delta f=\lim f(p+h)-f(p)=0$ ולכן -
$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_g(\Delta f)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta f)}{\|\Delta f\|}\cdot\frac{\|\Delta f\|}{\|h\|}=\lim_{\Delta f\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta f)}{\|\Delta f\|}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\Delta f\|}{\|h\|}=\lim\frac{\|f(p+h)-f(p)\|}{\|h\|}=\lim\frac{\|df|_p(h)+\varepsilon_f(h)\|}{\|h\|}=\frac{df_p(h)}{\|h\|}=df_p\left(\frac{h}{\|h\|}\right)$$
וזה <u>חסום</u>!

וקטור יחידה
היחידה
ב-$\mathbb{R}^n$
רציף ולכן
חסומה שם!

דוגמאות חישוב

1. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י $f(u,v)=(u^2-v^2, uv, u^2+2v)$

עוד נגדיר $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י $g(x,y,z)=(x^2y, yz^3, xyz)$

נבנה את יעקוביאן ל- f,g ול- $g\circ f$ (נשים לב שהרכבה זו מוגדרת, ו- $f\circ g$ לא).

$$df\sim\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u & -2v\\ v & u\\ 2u & 2\end{pmatrix}\ ;\ dg\sim\begin{pmatrix}2xy & x^2 & 0\\ 0 & z^3 & 3yz^2\\ yz & xz & xz\end{pmatrix}$$

$$d(g\circ f)\sim\begin{pmatrix}2xy & x^2 & 0\\ 0 & z^3 & 3yz^2\\ yz & xz & xt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2u & -2v\\ v & u\\ 2u & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4xyu+x^2v & -4xyv+ux^2\\ vz^3+6uyz^2 & z^3u+6yz^2\\ 2uyz+xzv+2uxy & -2vyz+uxz+2xy\end{pmatrix}$$

כדי לקבל את הנגזרת של $g\circ f$ במונחי u,v לבד נציב:

$z=u^2+2v\ ,\ y=uv\ ,\ x=u^2-v^2$.

אם ניקח איבר כלשהו במטריצה של $h=g\circ f$, למשל מהשורה השניה והעמודה הראשונה, הרי זה $\frac{\partial h_2}{\partial x_1}$, או במילים אחרות $\frac{\partial g_2}{\partial u}$ (g_2 הוא הרכיב השני ו-u המשתנה הראשון).

לפי הגדרת כפל מטריצות ולפי כלל השרשרת- $\frac{\partial g_2}{\partial u}=\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial g_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0(2u)+z^3v+3yz^2(2u)$

וקל לבדוק שזה נכון לכל איבר במטריצה הנ"ל.

__הערה__: אפשר לבנות את מטריצת היעקוביאן עבור $g\circ f$ ומשם לקבל את כל הנגזרות החלקיות שהם בעצם כלל השרשרת ה"פשוט".

הרעיון של משפט 9 הוא שהרכבה של פונק' דיפ' גם דיפ' ומתקיים נוסחא עבור $d(g\circ f)=dg\circ df$

2. נניח ש- $x=x(t), y=y(t)$ לכל $a\le t\le b$ מתאר מסלול במישור.

נניח ש-$f(x,y)$ היא הטמפ' בנק' (x,y). את הפונק' המורכבת $h(t)=f(x(t),y(t))$ מתארת את הטמפ' למי שעובר את המסלול בזמן t. $h'(t)$ זהו קצב שינוי הטמפ' בזמן לאורך המסלול.

אם f דיפ', לפי כלל השרשרת- $h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\vec\nabla f\cdot\vec v(t)$ כאשר $\vec v(t)=(x'(t),y'(t))$ מהירות

וקטור- $\vec v(t)$ משיק למסלול בזמן t ואורכו שווה למהירות שבה המסלול מתעבר בזמן t.

$\frac{\vec v}{\|\vec v\|}=$ וקטור יחידה המשיק למסלול. אז- $h'(t)=\underbrace{\left(\vec\nabla f\cdot\frac{\vec v}{\|\vec v\|}\right)}_{\text{נגזרת כיוונית של } f \text{ בכיוון משיק למסלול}}\cdot\underbrace{\|\vec v\|}_{\text{המהירות הסקלרית של הנסיעה}}$

המשך דוגמאות:

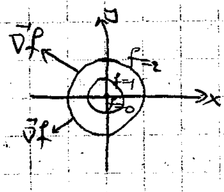
3. $\boxed{\text{קו גובה}}$ של פונק' $f(x,y)$ הוא קו (עקום) במישור שבו $f(x,y)$ קבועה.

אם u הוא קו גובה של f אז הנגזרת של f בכיוון המשיק ל-u תמיד אפס.

אז - $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial u}=0$ ונמצא ש-$\vec{\nabla}f$ מאונך לקוי הגובה.

כמו כן, לפונק' $f(x,y,z)$ שקבועה לאורך משטח מהווים "משטח גובה" ואז $\vec{\nabla}f$ מאונך להם.

עבור - $f(x,y)=x^2+y^2$:



4. משטח במרחב $\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י - $3y+x^2z^2+e^{xy}+\sin(\pi z)=7$

מצא את המישור המשיק למשטח בנק' $(0,2,1)$.

פתרון - $f(x,y,z)=3y+x^2z^2+e^{xy}+\sin(\pi z)$ המשטח הנתון הוא משטח גובה - $f(x,y,z)=7$.

לכן וקטור נורמל למשטח נתון ע"י $\vec{\nabla}f=(2xz^2+ye^{xy},\ 3+xe^{xy},\ 2x^2+\pi\cos(\pi z))$

בנק' הנתונה - $\vec{\nabla}f(0,2,1)=(2,3,-\pi)$

המישור המשיק הוא מישור מאונך לוקטור $\vec{\nabla}f=(2,3,-\pi)$ שעובר דרך הנק' $(0,2,1)$,

והוא - $2(x-0)+3(y-2)-\pi(z-1)=0$

נגזרות חלקיות מסדר גבוה

לפונק' $f(x,y)$ יש שתי נגזרות חלקיות - $f_x=\frac{\partial f}{\partial x},\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$.

אם הן גזירות אז יש לנו 4 נגזרות מסדר 2 - $f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\ f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

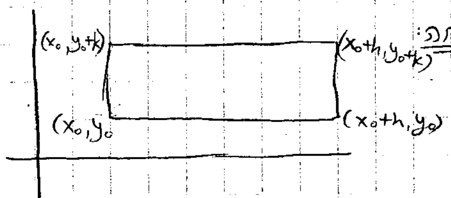
כמו כן יש 2^n נגזרות חלקיות מסדר n.

אנו נראה שאם $f_{xy}=f_{yx}$ וכמו כן $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$ כלומר שאין חשיבות לסדר הגזירה.

בהוכחת המשפט נשתמש בהגבלה משפט לגרנז' $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f_x(x+t\Delta x,y)$ עבור $0\le t\le 1$.

<u>משפט 1</u>: נניח $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0) ובעלת נגזרות חלקיות f_x,f_y,f_{yx} בסביבה זו.
אם גם f_{xy}, f_{yx} קיימות בסביבה זו ורציפות בנק' (x_0,y_0) אז $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

<u>הוכחה</u>:



נגדיר פונק' עזר - $\omega(h,k)=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}$

כעת נקבע h ו-k ונגדיר - $\varphi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}$ לפי זה - $\varphi'(x)=\frac{f_x(x,y_0+k)-f_x(x,y_0)}{k}$

לפי זה - $\omega=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$ לפי לגרנז' זה שווה ל- $\varphi'(x_0+t_1h)$ $(0\le t_1\le 1)$

$$\varphi'(x_0+t_1h)=\frac{f_x(x_0+t_1h,y_0+k)-f_x(x_0+t_1h,y_0)}{k}$$

לפי לגרנז' זה שווה ל- $f_{xy}(x_0+t_1h,y_0+t_2k)$ $(0\le t_1,t_2\le 1)$

אבל $\omega(h,k)$ סימטרי ב- x ו-y לכן הוא גם שווה ל- $f_{yx}(x_0+t_3h,y_0+t_4k)$ $(0\le t_3,t_4\le 1)$

לסיכום, לכל (h,k) קטנים יש שוויון - $\omega(h,k)=f_{xy}(x_0+t_1h,y_0+t_2k)=f_{yx}(x_0+t_3h,y_0+t_4k)$

לבסוף נשתמש ברציפות של f_{xy}, f_{yx} ע"מ לומר -

$$f_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}f_{xy}(x_0+t_1h,y_0+t_2k)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}f_{yx}(x_0+t_3h,y_0+t_4k)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

<u>הגדרה</u>: יהי $D\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נגדיר - $C(D)$ = אוסף כל הפונק' הרציפות ב-D.
עבור n טבעי נגדיר - $C^n(D)$ = אוסף כל הפונק'

הגדרה: יהי $D\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נגדיר - $C(D)$ = אוסף הפונק' הרציפות ב-D.
ועבור n טבעי $C^n(D)$ = אוסף כל הפונק' שרציפות יחד עם נגזרותיהן החלקיות
עד סדר n ב-D.

מסקנה ממשפט 1: נניח ש- $D\subset\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ו- $f\in C^n(D)$
אז כל נגזרות החלקיות של f עד סדר n ב-D בלתי תלוי"ה
בסדר הגזירות.

דוגמה: (במקום הכללה) נניח ש- $f(x,y,z,w)$ שייכת ל- $C^4(\mathbb{R}^4)$
ונוכיח ש- $f_{xyzw}=f_{wxzy}$ בכל נק' של $\mathbb{R}^4$

פתרון: לפי משפט 1 - $f_{xyzw}=(f_{xy})_{zw}=(f_{xy})_{wz}=f_{xywz}$,
כמו כן - $f_{xyw}=(f_x)_{yw}=(f_x)_{wy}=f_{xwy}$ וכו' -

הערה: לפונק' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ב-D^n קיימות $(n+1)$ נגזרות חלקיות שונות.

פיתוח טיילור לפונק' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

<u>תזכורת:</u> למדנו באינפי 2 שאם $f(x)$ מוגדרת וגזירה $(n+1)$ פעמים בסביבת x_0,
אז לכל x באותה סביבה מתקיים: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
עבור איזה c בין x ל-x_0.

נסמן $x-x_0=h$ כלומר $x=x_0+h$ ואז - $f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$ כאשר $\theta\in(0,1)$

כעת נניח ש-$f(x,y)$ שייכת למחלקה C^{n+1} בסביבה S של (x_0,y_0),
ונגדיר פונק' עזר של משתנה אחד $g(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$ כאשר נתייחס ל-h,k כקבועים.

משתמשים $g(0)=(x_0,y_0)$ ועפ"י כלל השרשרת - $g'(t)=f_x(x_0+th,y_0+tk)h+f_y(x_0+th,y_0+tk)\cdot k$

$$g''(t)=f_{xx}(x_0+th,y_0+tk)\cdot h^2+f_{xy}(x_0+th,y_0+tk)\cdot hk+f_{yx}(x_0+th,y_0+tk)\cdot hk+f_{yy}(x_0+th,y_0+tk)k^2$$

אז - $g''(0)=\left[f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2\right](x_0,y_0)$

כמו כן - $g'''(t)=\left(f_{xxx}h^3+f_{xxy}h^2k+f_{xyx}h^2k+f_{xyy}hk^2+f_{yyx}hk^2+f_{yyy}k^3\right)(x_0+th,y_0+tk)$

אז - $g'''(0)=\left(f_{xxx}h^3+3f_{xxy}h^2k+3f_{xyy}hk^2+f_{yyy}k^3\right)(x_0,y_0)$

ובאופן כללי נקבל שהמקדמים הם בינום - $g^{(m)}(x_0+th,y_0+tk)=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\partial^m f}{\partial x^l\partial y^{m-l}}(x_0+th,y_0+tk)\cdot h^l k^{m-l}$

נרשום פיתוח טיילור ל-g סביב $t=0$:
$g(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(0)}{m!}t^m+\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1}$
(כאשר θ בין 0 ל-t).

ובפרט - $g(1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(0)}{m!}+\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$ כאשר $0<\theta<1$. <u>נקבל:</u>

$$f(x_0+h,y_0+k)=g(1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\partial^m f}{\partial^l x\,\partial y^{m-l}}(x_0,y_0)\cdot h^l k^{m-l}+\frac{\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}\frac{\partial^{(n+1)}f}{\partial x^l\partial y^{n+1-l}}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^l k^{n+1-l}}{(n+1)!}$$

עבור איזה $0<\theta<1$.

דרך קיצור - סימון; מגדירים - $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\partial^m f}{\partial x^l\partial y^{m-l}}h^l k^{m-l}$

[לדוגמא - $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f$]

ובסך הכל נוסחת טיילור היא:

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\quad \text{עבור } 0<\theta<1}$$

__דוגמת חישוב:__ נמצא את $f(x,y)=x^2\ln y$ בנק' $(2.2,0.8)$ ע"י פתוח מסדר 2 סביב $(2,1)$.

__תשובה:__ לפי טיילור –

$$f(x_0+h,y_0+k)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+\frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)h^2+$$
$$+2f_{xy}(x_0,y_0)hk+f_{yy}(x_0,y_0)k^2\Big]$$

השארית היא: $\frac{1}{6}\Big[f_{xxx}h^3+3f_{xxy}h^2k+3f_{xyy}hk^2+f_{yyy}k^3\Big](x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

אצלנו – אם $f(x,y)=x^2\ln y$ אז – $f_x=2x\ln y$, $f_y=x^2y^{-1}$, $f_{xx}=2\ln y$, $f_{xy}=2xy^{-1}$, $f_{yy}=-x^2y^{-2}$

וכן – $f_{xxx}=0$, $f_{xxy}=\frac{2}{y}$, $f_{xyy}=-2xy^{-2}$, $f_{yyy}=2x^2y^{-3}$.

בנק' $(x_0,y_0)=(2,1)$: $f=f_x=f_{xx}=0$; $f_y=4$, $f_{xy}=4$, $f_{yy}=-4$;

לכן הפיתוח הוא – $f(2+h,1+k)\approx 0+0h+4k+\frac{1}{2}(0h^2+8hk-4k^2)=4k+4hk-2k^2$

ואז – $f(2.2,0.8)=f(2+0.2,1-0.2)\approx 4(-0.2)+4(-0.04)-2(0.04)$ ולכן – $\underline{\underline{f\approx -1.04}}$

השארית היא: $\frac{1}{6}\Big(0h^3+3\cdot\frac{2}{y}h^2k+3\big(\frac{-2x}{y^2}\big)hk^2+\frac{2x^2}{y^3}k^3\Big)$

כאשר הנגזרות מחושבות בנק' $(x,y)=(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$ שהיא (x,y) בין $(2,1)$ לבין $(2.2,0.8)$

אצלנו $k=-0.2$, $h=0.2$ לכן השארית היא – $\frac{1}{6}\Big[\frac{6}{y}(-0.008)-\frac{6x}{y^2}(0.008)+\frac{2x^2}{y^3}(-0.008)\Big]$

כלומר – $-\frac{0.008}{6}\Big[\frac{6}{y}+\frac{6x}{y^2}+\frac{2x^2}{y^3}\Big]$. מכאן השארית שלילית – $R_2<0$.

הביטוי בסוגריים מקסימלי כאשר x מקסימלי ו-y מינימלי.

לכן אצלנו נקח $x=2.2, y=0.8$ כדי למצוא את החסם מלמעלה:

$$|R_2|\le\frac{0.008}{6}\Big[\frac{6}{0.8}+\frac{6\cdot 0.2}{(0.8)^2}+\frac{2(2.2)^2}{(0.8)^3}\Big]=\underline{\underline{0.0558}}$$

הכללה ל-$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה C^{m+1} בסביבת הנק' $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, נגדיר $h=(h_1,\dots,h_n)$

$$f(x_0+h)=f(x_1^0+h_1,\dots,x_n^0+h_n)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x_0)+\frac{1}{(m+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}f(x^0+\theta h)$$

כאשר $0<\theta<1$.

לפי נוסחת המולטינום של ניוטון:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n}+\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1+\dots+i_n=m+1}\frac{(m+1)!}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^{(m+1)}f(x_0+\theta h)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n}$$

כאשר $0<\theta<1$.

מסקנות לנוסחת טיילור:

משפט 1: הכללה למשפט לגרנז'

אם נרשום את נוסחת טיילור לסדר 0 סביב $x^0\in\mathbb{R}^n$ עם שארית נקבל עבור $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, $h=(h_1,\dots,h_n)$:

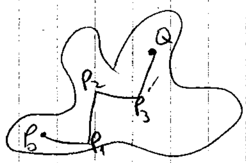
$$f(x_0+h)-f(x^0)=\sum_{k=1}^{n}h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0+\theta h)=\vec\nabla f(x_0+\theta h)\cdot\vec h$$

עבור $0<\theta<1$.

ואם נסמן $y^0=x^0+h$ נקבל - $\underline{f(y^0)-f(x_0)=\vec\nabla f(c)\cdot(y^0-x^0)}$ עבור איזה c בין x^0 ל-y^0.

(אי אפשר לחלק ב-y^0-x^0 כמו בלגרנז' הרגיל, כי יש פה מכפלה סקלרית בין וקטורים!)

משפט 2: נניח $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא פונק' מחלקה C^1 ונניח $D\subset\mathbb{R}^n$ פתוח וקשיר.
אם $\vec\nabla f(x)=0$ לכל $x\in D$ אז $f(x)$ קבועה.



הוכחה: ניקח 2 נק' P,Q ב-D ונראה ש-$f(P)=f(Q)$.

ובכן - כיוון ש-D פתוח וקשיר, יש קו פוליגונלי שמקשר בין P ו-Q בתוך D.

נאמר שהמסלול $P_0P_1\cdots P_n$ כאשר $P_0=P$ ו-$P_n=Q$.

לפי ההכללה של לגרנז', לכל $1\le k\le n$: $f(P_k)-f(P_{k-1})=\vec\nabla f(c_k)\cdot\overrightarrow{(P_k-P_{k-1})}$

כאשר c_k נקודה בין P_k, P_{k-1}. לפי הנתון - $\vec\nabla f\equiv0$ ב-D לכן נקבל עבור כל k ש-$f(P_k)=f(P_{k-1})$

כלומר שקיים - $f(P)=f(P_0)=\dots=f(P_n)=f(Q)$.

הדבר נכון לכל $P,Q\in D$ ולכן f קבועה.

נקודות קיצון

הגדרה: נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת x_0.

נאמר ש-x_0 נק' מקסימום מקומי של f אם קיימת סביבה S של x_0 כך שלכל $x\in S$: $f(x)\le f(x_0)$.

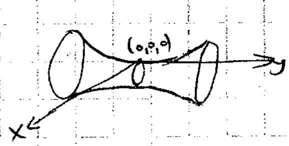
" " " מינימום " " " " " " " " " $f(x)\ge f(x_0)$.

משפט 2: נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ ומקבלת מקסימום או מינימום מקומי ב-x^0.
אזי עבור $1\le k\le n$, אם $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ קיימת ב-x^0 אז $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)=0$.

הוכחה: נגדיר פונק' של משתנה אחד $g(x_k)=f(x_1^0,\dots,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,\dots,x_n^0)$ לכל $1\le k\le n$.
אז g מקבלת מקס' או מינ' בנק' $x_k=x_k^0$. לפי משפט פרמה - $g'(x_k^0)=0$
ואז $0=g'(x_k^0)=f_{x_k}(x^0)$ כנדרש!

מסקנה: אם $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ קיימת לכל k ב-x_0, אז תנאי הכרחי למקס' או מינ' ב-x_0 הוא $\vec{\nabla} f(x_0)=0$.

הערה: כמו במשתנה 1 התנאי של משפט 2 הכרחי אבל לא מספיק.
למשל אם $f(x)=x^3$ אז $f(0)=0$ אבל למרות זאת לא מקס' ולא מינ'.



דוגמא קלאסית בשני משתנים היא הפרבולואיד ההיפרבולי - $z=y^2-x^2$
בנק' $(0,0)$ הפונק' מקבלת מינ' בכיוון y ומקס' בכיוון x.

הגדרה: x^0 $\boxed{\text{נקודה קריטית}}$ של f אם $\vec{\nabla} f(x^0)=0$.

הגדרה: נק' קריטית שהיא לא מקס' ולא מינ' נקראת $\boxed{\text{נקודת אוכף}}$ של f - (saddle point).

נרצה לפתח "מבחן הנגזרת השניה" להבחנה בין נק' מינ', מקס' ואוכף

נתחיל עם פונק' של שני משתנים $f(x,y)$ שמוגדרת ובמחלקה C^2 בסביבת (x_0,y_0),

ונניח ש-(x_0,y_0) נק' קריטית ל-f.

נפתח טיילור עם שארית מסדר 1 סביב (x_0,y_0):

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+\tfrac{1}{2}\left(f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2\right)(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

כיוון ש-(x_0,y_0) נק' קריטית - $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$,

לכן אם נסמן $A=f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$, $B=f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$, $C=f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

אז נקבל - $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$

אם לכל h,k קטנים הביטוי $\underline{Ah^2+2Bhk+Ck^2>0}$ אז (x_0,y_0) נק' מינ',

וכן אם הביטוי תמיד שלילי אז זו נק' מקס'. אם הביטוי מחליף סימן אפילו ל-(h,k) קטנים כרצוננו - זו נק' אוכף.

כעת נעיר שלכל $k\neq 0$: $Ah^2+2Bhk+Ck^2=k^2\left[A(\frac{h}{k})^2+2B(\frac{h}{k})+C\right]$

נציב $x=\frac{h}{k}$ ונקבל ביטוי $k^2(Ax^2+2Bx+C)$,

כעת, הפולינום $Ax^2+2Bx+C$ חיובי לכל $x\in\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ $(2B)^2-4AC<0$ ו-$A>0$ (כדי שהפולינום יהיה רק חיובי)

וכן - 〃 שלילי 〃 〃 $\Longleftrightarrow$ 〃 ו-$A<0$

אם $(2B)^2-4AC>0$ אז הפולינום משנה סימן ב-$\mathbb{R}$ - פעם חיובי ופעם שלילי.

נעיר ש-$x=\frac{h}{k}$ מקבל כל ערך ממשי בסביבה של $(h,k)=(0,0)$, ולכן במקרה זה נקבל אוכף.

במקרה שבו $(2B)^2-4AC=0$ אין מסקנה!

<u>משפט 3</u>: נניח $f(x,y)$ במחלקה C^2 בסביבת (x_0,y_0). עוד נניח $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

(א) אם בנק' (x_0,y_0): $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ ו-$f_{xx}>0$ אז זו נק' מינימום מקומי.

(ב) 〃 〃 〃 : $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ ו-$f_{xx}<0$ 〃 〃 מקסימום מקומי.

(ג) 〃 〃 〃 : $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ אז זו נק' אוכף.

(ד) 〃 〃 〃 : $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ אז הכל אפשרי.

<u>הוכחה</u>: כיוון ש-f במחלקה C^2, כל הנגזרות החלקיות עד סדר 2 רציפות ב-(x_0,y_0) ולכן אי-השוויונים תקפים

גם ב- סביבה של (x_0,y_0), נאמר - $S=\{(x_0+h,y_0+k)\mid h^2+k^2<r\}=B((x_0,y_0),r)$

לפי א' נפתח טיילור ונקבל שלכל $h^2+k^2<r$: $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\underbrace{\left[f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2\right]}_{>0}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

כיון שבכל נק' ב-S אז $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$, $f_{xx}>0$ $\longrightarrow$ לכן ונקבל (x_0,y_0) מינימום.

הגדרה: $\boxed{\text{מטריצת ההסיאן}}$ של פונק' $f(x,y)$:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

הערה: נשים לב ש- $(h\ k)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

זה בעצם - $(h\ k)\begin{pmatrix} f_{xx}h+f_{xy}k \\ f_{yx}h+f_{yy}k \end{pmatrix}=f_{xx}h^2+2hkf_{xy}+f_{yy}k^2$

שזה בדיוק שמופיע בטור של טיילור.

כעת נכליל את זה לפונק' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

עבור f כזאת, נגדיר את ההסיאן ע"י - $H(x)=H(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & \cdots & & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$

ניקח וקטור $k=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ ונקבל:

$$k^tHk=\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}k_ik_j=\left(k_1\frac{\partial}{\partial x_1}+k_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+k_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f$$

לפי זה, אם $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ שייכת למחלקה C^2 בסביבת $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$

אז נרשום $k=(k_1,\dots,k_n)$ ונרשום פיתוח טיילור עד סדר 1 עם שארית בצורה לגרנז' ע"י - $f(x^0+k)=f(x^0)+\vec{\nabla}f(x^0)\cdot k+\frac{1}{2}k^tHk(x^0+\theta k)$.

הגדרה: תהי $A_{n\times n}$ מ' סימטרית.

נאמר ש-A: (א) $\boxed{\text{חיובית}}$ אם לכל $k_{n\times1}\neq0$: $k^tAk>0$.

(ב) $\boxed{\text{אי שלילית}}$ אם לכל $k_{n\times1}\neq0$: $k^tAk\geq0$.

(ג) $\boxed{\text{שלילית}}$ אם לכל $k_{n\times1}\neq0$: $k^tAk<0$.

(ד) $\boxed{\text{אי חיובית}}$ אם לכל $k_{n\times1}\neq0$: $k^tAk\leq0$.

(ה) $\boxed{\text{מעורבת}}$ אם קיים k_1 כך ש $k_1^tAk_1>0$ ו-k_2 כך ש $k_2^tAk_2<0$.

משפט סילבסטר: תהי $A_{n\times n}$ מ' סימטרית אז- A חיובית $\Leftrightarrow$ כל המינורים $M_1,\dots,M_n$ חיוביים.

עבור $1\leq k\leq n$ $M_k=\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$

מסקנה: A שלילית $\Leftrightarrow$ $(-A)$ חיובית $\Leftrightarrow$ המינורים הראשיים M_k מקיימים $(-1)^kM_k>0$.

A אי שלילית אם לכל k $M_k\geq0$

A אי חיובית אם לכל k $(-1)^kM_k\geq0$.

בכל מקרה אחר A מעורבת.

משפט 4: מבחן הנגזרת השנייה ב-$\mathbb{R}^n$

נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת ומחלקה C^2 בסביבת $x^0\in\mathbb{R}^n$.

עוד נניח ש-x^0 נק' קריטית ל-f, כלומר $\vec{\nabla} f(x^0)=\vec{0}$. נסמן ב-$H(x)$ את ההסיאן של f ב-x.

אז: (א) אם $H(x^0)$ חיובית, אז x^0 נק' מינימום מקומי עבור f.

(ב) אם $H(x^0)$ שלילית, אז x^0 נק' מקסימום מקומי של f.

(ג) אם $H(x^0)$ מעורבת, אז x^0 נק' אוכף עבור f.

(ד) אם $H(x^0)$ לא חיובית או לא שלילית - הכל אפשרי.

הוכחה: לפי טיילור, לכל $k=(k_1,\dots,k_n)$ "קטן" - $f(x^0+k)=f(x^0)+\vec{\nabla} f(x^0)\cdot\vec{k}+\frac{1}{2}k^t H(x^0+\theta k)k$

כיוון ש $\vec{\nabla} f(x^0)=\vec{0}$ נקבל - $f(x^0+k)=f(x^0)+\frac{1}{2}k^t H(x^0+\theta k)k$.

(א) נתון $H(x^0)$ חיובי וכיוון ש- $f\in C^2$, $H(x^0)$ נשאר חיובי בסביבת $B(x^0,r)$.

לכן אם $\|k\|<r$, אז לכל $0<\theta<1$ - $\|\theta k\|<r$ ולכן גם $H(x^0+\theta k)$ חיובית.

אז אם $\|k\|<r$ אז - $f(x^0+k)=f(x^0)+\underbrace{\frac{1}{2}k^t H(x_0+\theta k)k}_{>0}>f(x^0)$

לכן x^0 נק' מינימום מקומית.

(ב) כמו א'.

(ג) נתון $H(x^0)$ מעורבת. לכן קיימים k_1,k_2 כך ש- $k_1^t H(x_0)k_1>0$, $k_2^t H(x_0)k_2<0$.

כיוון ש-H רציפה, אז אי-שוויונים אלו נכונים לא רק עבור $H(x^0)$, אלא שקיים $r>0$ כך שאם $v\in\mathbb{R}^n$

מקיים $\|v\|<r$ אז - $k_1^t H(x^0+v)k_1>0$, $k_2^t H(x^0+v)k_2<0$.

נחזור לפיתוח טיילור - $f(x^0+k)=f(x^0)+\frac{1}{2}k^t H(x_0+\theta k)k$.

נבחר c קטן כך ש $\|ck_i\|<r$ עבור $i=1,2$. אם כן, לכל $0<\theta<1$ - $\|c\theta k_i\|<r$.

נקבל ש- $f(x^0+ck_1)=f(x^0)+\frac{1}{2}(ck_1)^t H(x^0+\theta ck_1)(ck_1)=f(x^0)+\underbrace{\frac{1}{2}c^2k_1^t H(x^0+\theta ck_1)k_1}_{>0}>f(x^0)$

כמו כן $f(x^0+ck_2)<f(x^0)$.

ככל קטן כרצוננו ולכן קיימות נקודות קרובות כרצוננו x^0+ck_i כך ש:

$f(x^0+ck_1)>f(x^0)$, $f(x^0+ck_2)<f(x^0)$

לכן x^0 נק' אוכף של f.

(ד) צריך למצוא דוגמאות-שבכל אחת קורה משהו אחר.

הגדרה: יהי X מרחב מטרי, ו- $T: X \to X$ פונקציה. קוראים ל-T $\boxed{\text{כווץ}}$ אם לכל $x_1, x_2 \in X$, $d(Tx_1, Tx_2) \le k\, d(x_1, x_2)$ עבור $0<k<1$ בת"ל ב-x_1, x_2.

T מקיימת $\boxed{\text{תנאי ליפשיץ}}$ שמראה ש-T רציפה בכל X.

הגדרה: $x \in X$ נקראת $\boxed{\text{נקודת שבת}}$ עבור T אם $T(x)=x$.

הערה: ניתן להבין שכיווץ רציפה, ע"י הוכחה לפי הגדרה - אלו ε נתון ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{k}$ וזה יקיים את הדרוש להגדרה.

משפט 1: יהי X במרחב מטרי שלם ויהי $T: X \to X$ כווץ, אזי קיימת ל-T נקודת שבת אחת ויחידה ב-X.

הוכחה: הנתון אומר שקיים $0<k<1$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ - $d(Tx_1, Tx_2) \le k\, d(x_1, x_2)$

אם $x_1, x_2 \in X$ נקודות שבת אז $x_1 = x_2$

לפי הנתון, $d(Tx_1, Tx_2) = d(x_1, x_2)$ אבל זה אומר ש- $d(x_1,x_2) = d(Tx_1,Tx_2) \le k\,d(x_1,x_2)$

$0 = d(x_1,x_2)(1-k)$ אבל $1-k>0$ ולכן $d(x_1,x_2)=0$ אז $x_1=x_2$.

קיום: נסמן $T \circ T: X \to X$ ע"י T^2 ו- $\underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n} = T^n$

מהנתון נובע שאם $d(x, Tx) = r$ אז $d(Tx, T^2x) \le k\,d(x,Tx) = kr$

$d(T^2x, T^3x) \le k\,d(Tx, T^2x) \le k^2 r$, כמו כן $d(T^n x, T^{n+1}x) \le k^n r$

כעת, ניקח $x \in X$ כלשהו ונבנה את הסדרה $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$.

טענה: $\{T^n x\}$ סדרת קושי ב-X

הוכחת הטענה: אם $m<n$ נשתמש באי-שוויון המשולש לומר -

$$d(T^n x, T^m x) \le d(T^n x, T^{n-1}x) + d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) + \dots + d(T^{m+1}x, T^m x) \le$$

$$\le k^{n-1}r + k^{n-2}r + \dots + k^m r \qquad (\text{כאשר } r = d(x,Tx))$$

לפי סכימת טור הנדסי - $d(T^n x, T^m x) \le r k^m (1+k+k^2+\dots) = \frac{rk^m}{1-k}$

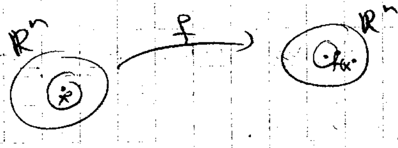
כעת, אם $\varepsilon>0$, נוכל למצוא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon > \frac{rk^{n_0}}{1-k}$

נקבל שלכל $n>m>n_0$: $d(T^n x, T^m x) \le \frac{rk^m}{1-k} < \frac{rk^{n_0}}{1-k} < \varepsilon$

לכן $\{T^n x\}$ סדרת קושי. מש"ל

כעת, X מרחב שלם ולכן קיים הגבול $y = \lim_{n\to\infty} T^n x$ כך ש- $y \in X$.

נוכיח ש-y נק' שבת. ואכן, T רציפה ולכן $T(y) = T(\lim_{n\to\infty} T^n x) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = y$



המטרה הבאה היא <u>משפט הפונקציה ההפוכה</u>

המשפט אומר שאם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שייכת ל-C^1 בסביבת $x_0\in\mathbb{R}^n$

ואם $df|_{x_0}$ הפיך, אז f מעתיקה סביבה S של x_0 על סביבה T של $f(x_0)$

באופן חח"ע וההעתקה $f^{-1}:T\to S$ היא $C^1(T)$.

<u>הערות:</u>

1. עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המשפט קל, כי במקרה הזה $df|_{x_0}(h)=f'(x_0)h$

אז $df|_{x_0}$ הפיך $\iff f'(x_0)\neq 0$. אבל אם כן, לפי רציפות של f', $f'(x)$ שונה מאפס בסביבת x_0,

לכן $f(x)$ מונוטונית ממש בסביבת x_0 והיא הפיכה.

2. יש מבט קצת אחר על המשפט - $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ היא $f(x_1,\dots,x_n)=f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$

אם נתון ש-$f(x_0)=y_0$ אז המשפט אומר שלכל y קרוב ל-y_0, יש x קרוב ל-x_0 כך ש-$f(x)=y$.

כלומר - $f_1(x_1,\dots,x_n)=y_1$, $\dots$, $f_n(x_1,\dots,x_n)=y_n$.

המשפט אומר שאם $y=(y_1,\dots,y_n)$ קרוב ל-$y^0=(y_1^0,\dots,y_n^0)$ אז יש פתרון יחיד למע' הנ"ל של

n משוואות ב-n נעלמים (לפחות יחיד בסביבת x^0).

3. בהערה (שראינו כבר) שאם $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ליניארית, אז $dL=L$.

כי - $L(x+h)=L(x)+L(h)+0$ ואז $\varepsilon(h)=0$ ו-$dL(h)=L(h)$ כנדרש.

4. סביבה של x_0 היא כל קבוצה פתוחה שמכילה את x_0.

5. <u>למה:</u> נניח $S\subset\mathbb{R}^n$ סביבה של x_0 ו-$f:S\to\mathbb{R}^n$ שייכת ל-$C^1(S)$, ועוד נניח $df|_{x_0}=0$.

אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $r>0$ כך שאם $x_1,x_2\in B(x_0,r)$ מתקיים - $\|f(x_1)-f(x_2)\|=\varepsilon\|x_1-x_2\|$.

<u>הוכחה:</u> נרשום $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ כאשר כל $f_k:S\to\mathbb{R}$ היא $C^1(S)$.

כיוון ש-$df|_{x_0}=0$, לכל k - $\vec{\nabla} f_k(x_0)=0$, כעת אם $\varepsilon>0$ נתון, אז לפי הרציפות של כל f_k,

קיים $r>0$ כך שאם $x\in B(x_0,r)$ אז - $\|\vec{\nabla} f_k(x)\|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. כעת אם $x_1,x_2\in B(x_0,r)$, (נשתמש בהכללה

של משפט לגרנז' לומר שלכל k - $f_k(x_1)-f_k(x_2)=\vec{\nabla} f_k(c_k)\cdot(\overrightarrow{x_1-x_2})$ כאשר c_k נקודה בין x_1 ל-x_2.

שגם היא ב-$B(x_0,r)$) לכן לכל k - $|f_k(x_1)-f_k(x_2)|=|\vec{\nabla} f_k(c_k)\cdot(\overrightarrow{x_1-x_2})|=\|\vec{\nabla} f(c_k)\|\cdot\|x_1-x_2\||\cos\theta|$

אז $|f_k(x_1)-f_k(x_2)|\le\|\vec{\nabla} f(c_k)\|\cdot\|x_1-x_2\|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\|x_1-x_2\|$ ולכן -

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|^2=\sum_{k=1}^{n}|f_k(x_1)-f_k(x_2)|^2<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{n}\|x_1-x_2\|^2=\varepsilon^2\|x_1-x_2\|^2$$

כלומר - $\|f(x_1)-f(x_2)\|<\varepsilon\|x_1-x_2\|$ כנדרש!

המשך הערות מקדימות למשפט 2:

6. התנאי של משפט 2 שקול לכך ש- $df|_{x_0}$ הפיך:

שקול: היעקוביאן $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\neq 0$.

כיוון ש- $f\in C^1$, יש סביבה של x_0 שבה - $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\neq 0$ ולכל x בסביבה זו, $df|_x$ הפיך.

7. תמיד ראינו דיפרנציאביליות כ- $f(x_0+h)=f(x_0)+df|_{x_0}h+\varepsilon(h)$

לפעמים נרשום x במקום x_0+h אז $h=x-x_0$ והדרישה היא - $f(x)=f(x_0)+df|_{x_0}(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)$

8. רעיון סוס - איך נמצא את $f^{-1}(y)$ במשפט 2?

נגדיר - $x_1=x_0+(df|_{x_0})^{-1}(y-f(x_0))$. כאן - $f(x_1)=f(x_0)+df|_{x_0}(df|_{x_0})^{-1}(y-f(x_0))+\varepsilon$

שהן - $f(x_1)=f(x_0)+y-f(x_0)+\varepsilon$. כמו כן $x_2=x_1+(df|_{x_0})^{-1}(y-f(x_1))$ וכו'.

הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת (בתנאים מתאימים) ל-x כך ש- $f(x)=y$ אז $x=f^{-1}(y)$ כאשר x הגבול.

הוכחה למשפט 2:

תחילה ננרמל את f - נגדיר $g(x)=(df|_{x_0})^{-1}(f(x_0+x)-y_0)$ והנרמול הוא $g(0)=0$.

עפ"י כלל השרשרת - $dg|_0=d[(df|_{x_0})^{-1}]\circ d[(f(x_0+x)-y_0)]|_{x=0}=(df|_{x_0})^{-1}\circ df|_{x_0}=I$

הפכנו g כמעט כמו f, רק שינינו את התנאי $f(x_0)=y_0$ ל- $g(0)=0$ ואת $df\neq 0$ ל- $dg=I$.

נוכיח את המשפט עבור g (בסביבה של 0 לתוך $\mathbb{R}^n$) ואז נחזור ל-f.

תחילה נגדיר עוד פונק' עזר - $h(x)=x-g(x)$ אזי $h(0)=0-g(0)=0$, $dh|_0=dx-dg|_0=I-I=0$

לפי הלמה קיים סדר r כך שאם $x_1,x_2\in\overline{B(0,r)}$ אזי - $\|h(x_1)-h(x_2)\|\le\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$.

אז לכל $x\in\overline{B(0,r)}$ מתקיים - $\|h(x)\|=\|h(x)-h(0)\|\le\frac{1}{2}\|x-0\|=\frac{1}{2}\|x\|$.

בנוסף (לפי הערה 6) - $dg|_x$ הפיך לכל x ב- $\overline{B(0,r)}$.

<u>טענה 1</u>: לכל $y\in\overline{B(0,r/2)}$ קיים $x\in\overline{B(0,r)}$ יחיד כך ש- $g(x)=y$.

<u>הוכחה</u>: נקבע $y\in\overline{B(0,r/2)}$ מסוים. נגדיר - $g_y(x)=x+y-g(x)$ $\left(x+dg|_{x_0}^{-1}(y-g(x))\right)$

הערה $g_y(x)=h(x)+y$.

המשך בדף הבא.

המשך הוכחת משפט 2:

המשך הוכחת טענה 1: נשים לב:

(א) g_y מעתיקה את $\overline{B(0,r)}$ לתוך עצמו.

הוכחה: ניקח $x\in\overline{B(0,r)}$, אזי $\|x\|\le r$, אזי מתקיים $\|g_y(x)\|=\|h(x)+y\|\le\|h(x)\|+\|y\|$

אזי $\|g_y(x)\| \le \frac{\|x\|}{2}+\|y\| \le \frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$ לכן $g_y(x)\in\overline{B(0,r)}$

(ב) $\overline{B(0,r)}$ מרחב מטרי שלם.

הוכחה: כידוע $\mathbb{R}^n$ שלם ו- $\overline{B(0,r)}$ תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}^n$ השלם שלם.

או - קומפקטי ולכן שלם.

(ג) g_y כיווץ על $\overline{B(0,r)}$.

הוכחה: ניקח $x_1,x_2\in\overline{B(0,r)}$.

אז $\|g_y(x_1)-g_y(x_2)\|=\|h(x_1)+y-[h(x_2)+y]\|=\|h(x_1)-h(x_2)\|\le\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$ וזה כיווץ.

עכשיו לפי משפט 1 לכל $y\in\overline{B(0,r/2)}$ קיים ל- $g_y(x)$ נק' שבת יחידה - $x\in\overline{B(0,r)}$.

כלומר $x=g_y(x)=x+y-g(x)$ אז $g(x)=y$! והוכחנו את הוכחת טענה 1.

כעת נגדיר $T=B(0,r/2)$ ו- $S=g^{-1}(B(0,r/2))$, כיוון ש- g רציפה, S סביבה פתוחה של 0.

הוכחנו ש- g מעתיקה את S על T באופן חח"ע, ומוגדרת פונ' ההפכה $g^{-1}: T\to S$

נותר להוכיח ש- $g^{-1}\in C^1(T)$. נראה שלבים:

טענה 2: $g^{-1}: T\to S$ רציפה.

הוכחה: ניקח $x_1,x_2\in S$ ונרשום $y_1=g(x_1), y_2=g(x_2)$. נזכיר $h(x)=x-g(x)$ כלומר $x=g(x)+h(x)$.

לכן: $\|x_1-x_2\|=\|g(x_1)+h(x_1)-g(x_2)-h(x_2)\|\le\|g(x_1)-g(x_2)\|+\|h(x_1)-h(x_2)\|\le\|g(x_1)-g(x_2)\|+\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$

לכן - $\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|\le\|g(x_1)-g(x_2)\|$ אז - $\|g^{-1}(y_1)-g^{-1}(y_2)\|\le 2\|y_1-y_2\|$,

לכן g מקיימת את תנאי ליפשיץ והיא רציפה.

המשך הוכחת משפט 2:

טענה 3: g^{-1} דיפרנציאבילית ב-T, ובנוסף, לכל $g(x_1)=y_1\in T$ אז- $(dg^{-1})|_{y_1}=(dg|_{x_1})^{-1}$.

הוכחה: נקבע - $g(x_1)=y_1\in T$ ועתה נק' אחרת $g(x)=y\in T$.

כדי להוכיח את טענה 3, צ"ל $g^{-1}(y)=g^{-1}(y_1)+(dg|_{x_1})^{-1}(y-y_1)+\varepsilon(y-y_1)$

כאשר- $\lim_{y\to y_1}\frac{\varepsilon(y-y_1)}{\|y-y_1\|}=0$

לפי הנתון, $y=g(x)$, $y_1=g(x_1)$ ולכן-

$$\varepsilon(y-y_1)=g^{-1}(y)-g^{-1}(y_1)-(dg|_{x_1})^{-1}(y-y_1)=(x-x_1)-(dg|_{x_1})^{-1}(g(x)-g(x_1))=$$

$$=(x-x_1)-(dg|_{x_1})^{-1}(dg|_{x_1}(x-x_1)+\varepsilon_g(x-x_1))=$$

$$=(\cancel{x}-\cancel{x_1})-(\cancel{x}-\cancel{x_1})-(dg|_{x_1})^{-1}(\varepsilon_g(x-x_1))$$

לכן $\lim_{y\to y_1}\frac{\varepsilon(y-y_1)}{\|y-y_1\|}=\lim_{y\to y_1}\frac{-(dg|_{x_1})^{-1}(\varepsilon_g(x-x_1))}{\|y-y_1\|}=\lim_{y\to y_1}-(dg|_{x_1})^{-1}\left(\frac{\varepsilon_g(x-x_1)}{\|x-x_1\|}\right)\frac{\|x-x_1\|}{\|y-y_1\|}$

לפי תנאי ליפשיץ, $\frac{\|x-x_1\|}{\|y-y_1\|}=\frac{\|g^{-1}(y)-g^{-1}(y_1)\|}{\|y-y_1\|}\le 2$

וגם, $\lim_{y\to y_1}(dg|_{x_1})^{-1}\left(\frac{\varepsilon_g(x-x_1)}{\|x-x_1\|}\right)=0$, בגלל הגדרת ε_g והרציפות של $(dg|_{x_1})^{-1}$

אם נחבר את הכל, התוצאה: $\lim_{y\to y_1}\frac{\varepsilon(y-y_1)}{\|y-y_1\|}=0$ לכן g דיפרנציאבילית ב-y_1

טענה 4: $g^{-1}\in C^1(T)$

הוכחה: מטענה 3 הוכחנו שאם $g(x)=y\in T$ אז g^{-1} דיפרנציאבילית ב-y

ו- $dg^{-1}|_y=(dg|_x)^{-1}$ וכאשר $dg|_x$ מוצגת ע"י היעקוביאן $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1..n}$

ובנוסף, $0\ne\Delta=\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$ לכל $x\in S$.

לכן, לכל $x\in S$ $(dg|_x)^{-1}$ מוצגת ע"י $\frac{1}{\Delta}((-1)^{i+j}M_{ij})$

כל M_{ij} וגם Δ בנויים ממכפלות וסכומים של נגזרות חלקיות $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$

לפי הנתון הן רציפות ב-S, לכן המטריצה $\frac{1}{\Delta}((-1)^{i+j}M_{ij})$ כוללת איברים רציפים ב-S.

נקרא למטריצה זו $J(x)$. למדנו שאם $y\in T$ אז $dg^{-1}|_y$ מוצגת ע"י $J(x)$

כך ש- $g(x)=y$, כלומר ע"י $J(g^{-1}(y))$.

לפי הנ"ל, $J(g^{-1}(y))$ הרכבה של מטריצה $J(x)$ רציפה עם פונק' רציפה $g^{-1}(y)$

לכן היא רציפה ב-T, וזה נותן הדרוש: $g^{-1}\in C^1(T)$ והוכחנו את טענה 4.

<u>המשך הוכחת משפט 2:</u>

נשאר רק למצוא א-g ל-f. נגדיר לכל $x\in S$: $g(x)=(df|_{x_0})^{-1}(f(x_0+x)-y_0)$

<u>שקול</u> - לכל $x\in S+x_0$, $g(x-x_0)=(df|_{x_0})^{-1}(f(x)-y_0)$, g הפיך ולכן-

$(x-x_0)=g^{-1}(df|_{x_0})^{-1}(f(x)-y_0)$ אם $f(x)=y$ מתקיים - $x=x_0+g^{-1}(df|_{x_0})^{-1}(y-y_0)$

ז"א, $f^{-1}(y)=x_0+g^{-1}\circ(df|_{x_0})^{-1}(y-y_0)$ ומצאנו הופכית ל-f

f^{-1} שייכת ל-C^1 סביבה של y, כי היא הרכבה של שתי פונק' ב-C^1

<u>מסקנה 1</u>: בתנאי המשפט, לכל $x\in S$; $f(x)=y\in T$: $(df^{-1})|_y=(df|_x)^{-1}$

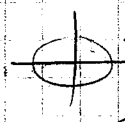
<u>הוכחה</u>: אם $x\in S$ ו-$y=f(x)$ אזי $f^{-1}(f(x))=x$.

נגזור את שני האגפים - $df^{-1}|_y\circ df|_x=dx=I$ ולכן - $df^{-1}|_y=(df|_x)^{-1}$.

<u>מסקנה 2</u>: אם בתנאי משפט 2 $f\in C^k(S)$ כש-$k\in\mathbb{N}$, אז $f^{-1}\in C^k(T)$.

פונקציות סתומות

עד כאן עסקנו ב"פונק' מפורשות" $y=f(x)$.

לפעמים נתונות משוואות כמו $x^2+y^2=1$: 

פה לא ניתן לבטא את y כפונק' של x, ואולי $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ (אבל זו לא פונק' כי לכל $x\in(-1,1)$ יש 2 ערכי y)

אם רוצים $\frac{dy}{dx}$ בנקודה לפי x וגם y (אבל שיש $\frac{dy}{dx}$ כי יש משיק לכל נק').

דוגמאות:

1. א- מצאו $\frac{dy}{dx}$ בנק' $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt3}{2})$ שבמעגל.

פתרון: הנקודה הנ"ל ב- $y=+\sqrt{1-x^2}$ אז- $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1/2}{\sqrt3/2}=\frac{-1}{\sqrt3}$

ב- מצאו $\frac{dy}{dx}$ בנק' $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt3}{2})$ שבמעגל..

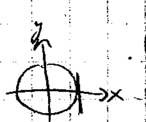
פתרון: הנקודה הנ"ל ב- $y=-\sqrt{1-x^2}$ אז- $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1/2}{\sqrt3/2}=1/\sqrt3$

ג- נחשב את תרגיל 1 ו-2 ביחד, ע"י זה שנתייחס אל y כפונק' סתומה (לא מפורשת) של x.

פתרון: נתון $x^2+y^2=1$, נגזור לפי x - $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ אז $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

ובכך פתרנו גם את תרגילים 1 ו-2 ביחד!

נשים לב שהשיטה נכשלת כאשר $y=0$ (אפשר לומר ששיפוע המשיק הוא ∞).



אבל לחשב משיק בנק' אלו ניתן להביט על x כפונק' סתומה של y,

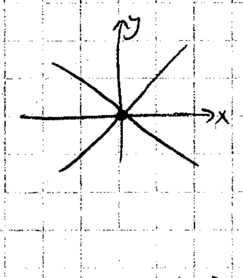
כלומר נגזור לפי y, אז- $2x\frac{dx}{dy}+2y=1 \Leftarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$ ואז ב-$y=0$ - $\frac{dx}{dy}=0$

לכן המשיק מקביל לציר ה-y!

2. תרגיל דומה - $x^2-y^2=0$.

נגזור לפי איקס - $2x-2y\frac{dy}{dx}=0 \Leftarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ כרגיל רק ל- $y=0$.

זה בעצם הפונק' $y^2=x^2$ כלומר $y=\pm x$.



בנקודה $(0,0)$ אין שום משיק וגם לא ניתן לחלץ את x כפונק' של y או y כפונק' של x.

3. נתון - $\cos(xy)-3(e^x+e^{-y})-x=-5$. אפשר לבדוק ש-$(x,y)=(0,0)$ מקיימת את זה.

נרצה לחשב את $\frac{dy}{dx}$ ב-$(0,0)$. לכן נגזור לפי x - $-\sin(xy)[y+x\frac{dy}{dx}]-3e^x+3e^{-y}\frac{dy}{dx}-1=0$

אז- $\frac{dy}{dx}=\frac{3e^x+1+y\sin(xy)}{-x\sin(xy)+3e^{-y}}$ בנק' כללית.

בפרט נקבל - $\frac{dy}{dx}(0,0)=4/3$ אבל זה לא נכון! נראה למה בהמשך.

באופן כללי - נתון $F(x,y)=0$. נניח y פונק' סתומה של x.

נגזור לפי x - $F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0$ ואז: $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ אלא אם $F_y=0$,

תהליך זה קל ונוח. אך לא לפי הפורמליזם של אינפי 3!

מכיוון שבכלל לא ברור שמשוואה $F(x,y)$ מגדירה את y כפונק' של x.

כדי להצדיק את התהליך, נסתמך על משפט 2 - משפט הפונק' ההפוכה.

ובכן - בהינתן משוואה $F(x,y)=0$ כאשר $F\in C^1$ וכך ש- $F(x_0,y_0)=0$ ו- $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

נראה שבסביבה של x_0 אפשר לחלץ את y כפונק' C^1 של x.

ובכן - נתבונן במע' - $\begin{cases} x=x \\ F(x,y)=0 \end{cases}$ שמתקיימת ב-(x_0,y_0).

נגדיר $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י - $G(x,y)=(x,F(x,y))$. כאשר - $G(x_0,y_0)=(x_0,0)$.

היעקוביאן של G יהיה - $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F_x & F_y \end{vmatrix}=F_y\neq 0$ בנק' (x_0,y_0).

לפי משפט 2 קיימת סביבה S של (x_0,y_0) וסביבה T של $(x_0,0)$ כך ש- $G:S\to T$

חח"ע, על, וההפכית $G^{-1}:T\to S$ שייכת ל- $C^1(T)$. *

לפי זה, $G^{-1}(x,z)=(h_1(x,z),h(x,z))$ אבל כאן פשוט $h_1(x,z)=x$

עפ"י משפט 2, $h(x,z)\in C^1(T)$, בסיכום - $G^{-1}(x,z)=(x,h(x,z))$

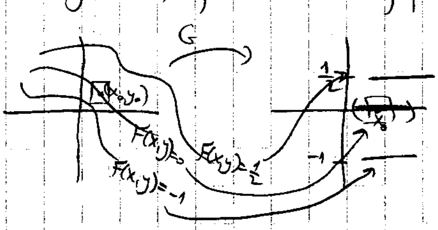
ואז - $(x,z)=G(x,h(x,z))=(x,F(x,h(x,z)))$

נציב $z=0$ ונקבל $(x,0)=(x,F(x,h(x,z)))$ ומכאן - $F(x,h(x,z))=0$

הראנו שבסביבה קטנה של x הפונק' $y=h(x,0)$ שהיא C^1 פותרת את $F(x,y)=0$.

(מסתכלים על קווי רמה).

מעניין אותנו רק הרמה $F(x,y)=0$.



משפט הפונק' ההפוכה מבטיח שהסביבה של (x,y) עוברת באופן חח"ע ועל לסביבה של $(x,0)$.

המקור של הסביבה של $(x_0,0)$ הוא הקו $(x,h(x,0))$ וזו פונק' C^1 בסביבת x.

$h(x,0)$ זה בעצם קו הרמה אפס.

כעת מותר להמשיך לומר שאם יש פונק' כזו $F=0, F_y\neq 0$ מתקיים $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

הכללה לפונק' מרובות משתנים

דוגמא: $F_1(x,y,z,w)=x^2+y^2-z^2-w^2=0,\ F_2(x,y,z,w)=x^3-xy+zw^2-1=0$

נניח שמשוואות אלה מגדירות את z,w כפונק' סתומות של x,y. נחשב $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$;

ובכן, נגזור לפי x:

$$\begin{cases} 2x-2z\frac{\partial z}{\partial x}-3w^2\frac{\partial w}{\partial x}=0 & \text{(I)} \\ 3x^2-y+\frac{\partial z}{\partial x}w^2+2zw\frac{\partial w}{\partial x}=0 & \text{(II)} \end{cases}$$

לפי כלל קרמר:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -2x & -3w \\ y-3x^2 & 2zw \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2z & -3w^2 \\ w^2 & 2zw \end{vmatrix}}$$

בתנאי שהמכנה שונה מאפס.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -2z & -2x \\ w^2 & y-3x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2z & -3w^2 \\ w^2 & 2zw \end{vmatrix}}$$

באופן דומה מחשבים $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$.

נשים ♡ שהמכנה הוא היעקוביאן - $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}$.

משפט 3: (משפט הפונקציה הסתומה הכללי)

נניח $F=(F_1,\dots,F_s):\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ מוגדרת ומחלקה C^1

בסביבת $(x^0,y^0)=(x_1^0,\dots,x_k^0,y_1^0,\dots,y_s^0)$ זאת נקודה של $k+s$ משתנים

ונניח $F(x^0,y^0)=0$ כלו' $F_1(x^0,y^0)=0,\dots,F_s(x^0,y^0)=0$.

יש כאן s משוואות ב-$k+s$ נעלמים שמתקיימות בנק' (x^0,y^0).

אם נניח שהיעקוביאן $\frac{\partial(F_1,\dots,F_s)}{\partial(y_1,\dots,y_s)}\neq 0$ לא מתאפס בנק' (x^0,y^0).

אז קיימת סביבה $I\subseteq\mathbb{R}^k$ של x^0 וסביבה $J\subseteq\mathbb{R}^s$ של y^0,

כך שלכל $x\in I$ קיים $y=\varphi(x)$ יחיד ב-J שמקיים $F(x,y)=F(x,\varphi(x))=0$ ו-$\varphi\in C^1(I)$.

הוכחה:

נוסיף עוד k משוואות ב-$k+s$ נעלמים:

$$\begin{cases} x_1=x_1 \\ x_2=x_2 \\ \vdots \\ x_k=x_k \\ F_1(x,y)=0 \\ \vdots \\ F_s(x,y)=0 \end{cases}$$

נשים לב שהיעקוביאן של המערכת הנ"ל:

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline * & \frac{\partial(F_1,\dots,F_s)}{\partial(y_1,\dots,y_s)} \end{array}\right)$$

שהדטרמיננטה שלה היא $1\cdot\det\frac{\partial(F_1,\dots,F_s)}{\partial(y_1,\dots,y_s)}\neq 0$

בנק' (x^0,y^0) הסימון פונקציונלי: נגדיר $G:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s$ ע"י $G(x,y)=(x,F(x,y))$

עפ"י משפט הפונק' ההפוכה, G מעתיקה סביבה $(x^0,y^0)\in I\times J\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s$ באופן חח"ע על סביבה T

של $(x^0,0)$ – כי לפי הנתון $F(x^0,y^0)=0$, וקיימת פונק' הפוכה $G^{-1}:T\to I\times J$ ב-$C^1(T)$

נרשום אותה $G^{-1}(x,z)=(h_1(x,z),h(x,z))$ כאשר $z=(z_1,\dots,z_s)$, $x=(x_1,\dots,x_k)$.

כאן מהגדרת G ברור ש-$h_1(x,z)=x$ וקיבלנו $G^{-1}(x,z)=(x,h(x,z))$, $h\in C^1(T)$.

נגדיר $\varphi(x)=h(x,0)$, אזי לכל $x\in I$ – $G(x,h(x,z))=(x,z)$

אם נציב $z=0$, נקבל $G(x,\varphi(x))=G(x,h(x,0))=(x,0)$ לפי ההגדרה המקורית של G-

$G(x,y)=(x,F(x,y))$, מקבלים - $(x,0)=G(x,\varphi(x))=(x,F(x,\varphi(x)))$

לכן, $F(x,\varphi(x))=0$ והפונק' $y=\varphi(x)=h(x,0)$ ששייכת ל-$C^1(I)$ פותרת את המערכת (מש"ל)

מסקנה ממשפט ג:

בתנאים של משפט 3 כיוון שהוכחנו ש-$y_1,\dots,y_s$ הן פונקציות סתומות של $(x_1,\dots,x_k)$

אז אפשר לגזור את המערכת: $\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_s)=0 \\ \vdots \\ F_s(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_s)=0 \end{cases}$ לפי x_j כלשהו,

אז נקבל - $\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}+\sum \frac{\partial F_1}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_j}+\sum \frac{\partial F_s}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=0 \end{cases}$ כלו׳ -

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_s}{\partial y_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

והרי המטריצה J (יעקוביאן), לפי הנתון היא לא סינגולרית בנק׳ (x_0,y_0) ושם -

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \end{pmatrix} = -J^{-1}(x,y)\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

עבור $1\le j\le k$.

הערות:

1. אם נתונה משוואה $F(x,y,z)=0$ ואז עלינו לחלץ את z כפונ׳ מפורשת של (x,y),

נגזור את z כפונ׳ סתומה של (x,y) [הנחה מראש שיש פתרון ($z=\varphi(x,y)$ כש $\varphi\in C^1$)] ונקבל:

$$\begin{cases} F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0 & \text{לפי } x \\ F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0 & \text{לפי } y \end{cases}$$

בכל נק׳ בה $F_z\neq0$ נוכל לפתור - $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

ונשכח של הפונ׳ המוגדרת $z=\varphi(x,y)$ יש נורמל - $\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$

כמו כן שווה $\left(\frac{-F_x}{F_z},\frac{-F_y}{F_z},-1\right)=-\frac{1}{F_z}(F_x,F_y,F_z)$, כלומר הנורמל הוא $-\frac{1}{F_z}\vec\nabla F$.

ז״א, $\vec\nabla F$ הוא וקטור מאונך למשטח $F(x,y,z)=0$. הוכחנו זאת רק כאשר $F_z\neq0$

אבל אם $F_z=0$ ו-F_x או F_y שונה מאפס, אפשר לחלץ את x או y ולהגיע לאותה התוצאה.

(זה נובע מכך ש-z לא יותר "קדוש" מ-x,y. היינו יכולים לעשות את החילוץ גם עבור y).

בדיבור: הסביבה של נק׳ (x_0,y_0,z_0) שבה $F_z\neq0$, וקטור נורמל למשטח $F(x,y,z)=0$ הוא $\vec\nabla F$.

אם נניח ש-$F_x(x_0,y_0,z_0)\neq0$ אפשר לחלץ $x=\varphi(y,z)$ באופן מקומי ושוב נמצא ש-$\vec\nabla F$ מאונך למשטח.

כמו כן עבור $F_y\neq0$.

המסקנה היא שבכל (x,y,z) של $F(x,y,z)=0$ אפשר להגיע לתיאור $F(x,y,z)=0$ באופן מקומי קצת שונה, ש-$\vec\nabla F$ נורמל לו. אנו דרך נכון אחר $F(x,y,z)=c$, ובכך הסקנו ש-$\vec\nabla F$ מאונך למשטחי רמה של F.

המשך פתרון

2. אם נתונות שתי משוואות - $F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0$

נצפה שהמשוואות יגדירו חיתוך של שני משטחים, שהוא עקומה במרחב.

כאשר $F_1,F_2\in C^1$, נצפה שהעקומה תהיה ב-C^1, לא מספיק $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ בלי נגזרות רציפות.

ובכן - נניח (x_0,y_0,z_0) פתרון למע' המשוואות ונניח שבנק' זו היעקוביאן לא מתאפס - $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\neq 0$.

אז משפט 2 מבטיח שבסביבת הנק' נוכל לקבל $y=y(x),\ z=z(x)$ המוגדרות ב-C^1.

אם כך הפונק' $x=x,\ y=y(x),\ z=z(x)$ ב-C^1 הם פתרון מקומי למע' $F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=0$.

כדרוש, יש כאן עקומה במרחב במחלקה C^1.

אותו תהליך נקבל גם אם - $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\neq 0$ או - $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}\neq 0$ בנק' (x_0,y_0,z_0),

סה"כ הדרישה היא של מט' $\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{pmatrix}$ יש 2 עמודות בת"ל בנק' (x_0,y_0,z_0). כלו' שדרגת המט' שווה 2.

3. נתונה משוואה - $f'(x)=\frac{x^3-\sin x}{f^2(x)+e^{f(x)}}$ עם תנאי התחלה $f(0)=1$. נחלץ מפורשות $f(x)$.

פתרון מקוצר: נרשום $y=f(x)$, אז $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ ונקבל - $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-\sin x}{y^2+e^y}$

לכן - $\underline{\frac{y^3}{3}+e^y=\frac{x^4}{4}+\cos x+c} \Leftarrow \int(y^2+e^y)dy=\int(x^3-\sin x)dx \Leftarrow (y^2+e^y)dy=(x^3-\sin x)dx$

נציב $x=0,\ y=1$ אז - $\underline{c=e-\frac{2}{3}} \Leftarrow \frac{1}{3}+e=1+c$.

קיבלנו את הפתרון בצורה סתומה, ולא מפורשות כ- $y=f(x)$.

אלא קיבלנו - $0=F(x,y)=\frac{y^3}{3}+e^y-\frac{x^4}{4}-\cos x-e+\frac{2}{3}$

נפעיל את משפט הפונק' הסתומה (משפט 3) לומר שבסביבת נק' (x_0,y_0) שבה $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

$F(x,y)=0$ מגדירה את y כפונק' של x ו- $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$. עכשיו:

$F_x=-x^3+\sin x$, $F_y=y^2+e^y$. בנק' התחלה $(0,1)$: $F_y(0,1)=1^2+e^1\neq 0$

לכן בסביבת $x=0$ - $y=f(x)$ ו- $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x^3-\sin x}{y^2+e^y}$ וקיימנו את הנדרש.

<u>המשך הסבר:</u>

ד. בעיות קיצון עם אילוץ. הבעיה הראשונה שפגשנו בפרק 2 בבעית קיצון היתה:
היקף מלבן שווה 20, מצאו את השטח המקסימלי של מלבן כזה.

צ"ל, יש למצוא את המקסימום של $f(x,y)=xy$ תחת אילוץ $x+y=10$.

פותרים את הבעיה ע"י הצבה $y=10-x$ ומוצאים מקסימום של -

$$g(x)=xy=x(10-x)$$

אבל, יש בעיות של קיצון עם אילוץ שקשה או בלתי אפשרי לחלץ משתנים מהאילוץ אז יש שיטה הבאה משפט 3

נניח למשל שרוצים למצוא נקודות קיצון של $f(x,y,z)$ עם אילוץ $h(x,y,z)=0$.

אם ב־(x_0,y_0,z_0) - $h_z\neq 0$ אז לפי משפט 3 יש פתרון יחיד לאילוץ $h(x,y,z)=0$ שהוא $z=\varphi(x,y)$ כאשר מוגדר שהפונ' ב-C^1.

אז הבעיה היא לחפש נק' קיצון של הפונ' $g(x,y)=f(x,y,\varphi(x,y))$.

נק' קריטיות נמצאות ע"י $g_x=g_y=0$ כלו' - $g_x=f_x+f_z\varphi_x=0$, $g_y=f_y+f_z\varphi_y=0$.

כלומר - $f_x=-f_z\varphi_x$, $f_y=-f_z\varphi_y$, $f_z=-f_z(-1)$.

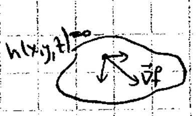
כמובן - $z=\varphi(x,y)$ פותר $h(x,y,\varphi(x,y))=0$ לכן $\varphi_x=\frac{\partial z}{\partial x}$ אז - $h_x+h_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $h_y+h_z\frac{\partial z}{\partial y}=0$

מכאן - $\varphi_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{h_x}{h_z}$, $\varphi_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{h_y}{h_z}$, נחזור למעלה:

$$f_x=-f_z\varphi_x=f_z\frac{h_x}{h_z},\quad f_y=-f_z\varphi_y=f_z\frac{h_y}{h_z},\quad f_z=f_z\cdot 1$$

נסדר כווקטור - $\begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{pmatrix}=\frac{f_z}{h_z}\begin{pmatrix}h_x\\h_y\\h_z\end{pmatrix}$ כלומר בנק' קריטיות, $\vec\nabla f$ כפולה של $\vec\nabla h$.

<u>הסבר גאומטרי</u> - $h(x,y,z)=0$ מגדיר משטח במרחב



אם (x_0,y_0,z_0) נק' במשטח שבה $f(x,y,z)$ מקבלת קיצון לגבי שאר נק' המשטח, אז הנגזרת של כל וקטור יחידה $\vec u$ שמשיק למשטח ב-(x_0,y_0,z_0) - $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0,z_0)=0$. במילים אחרות - $\vec\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec u=0$

זה נכון לכל $\vec u$ המשיק למשטח לכן זה אומר ש-$\vec\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ מאונך למשטח $h(x,y,z)=0$ בנק' (x_0,y_0,z_0).

אבל כבר ראינו ש- $\vec\nabla h(x_0,y_0,z_0)$ מאונך למשטח שם.

לכן בהכרח $\vec\nabla h\parallel\vec\nabla f$ בנק' קיצון, כלומר $\vec\nabla f$ כפולה של $\vec\nabla h$.

המשך לגרנז':

ד. קיצון עם אילוץ - כופלי לגרנז'.

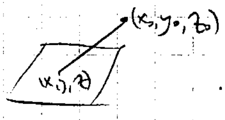
- יש דרך פרקטית לחשב נק' קריטיות כאלה -

מגדירים $G(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda h(x,y,z)$ ומחפשים נק' קריטיות של G:

כלומר - $G_x=f_x+\lambda h_x=0,\ G_y=f_y+\lambda h_y=0,\ G_z=f_z+\lambda h_z=0,\ G_\lambda=h=0$

כי $h=0$ כנדרש, ו- $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}$ כנדרש!

דוגמה חשובה:



נחשב את המרחק המינימלי של (x_0,y_0,z_0) למישור - $ax+by+cz+d=0$.

פתרון: המרחק בריבוע מ-(x_0,y_0,z_0) ל-(x,y,z) נתון ע"י - $f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$

רוצים את המינימום של f תחת האילוץ - $h(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$.

נגדיר - $G(x,y,z,\lambda)=f+\lambda h=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(ax+by+cz+d)$:

נחפש קיצון ל-G: $G_x=2(x-x_0)+a\lambda=0;\ G_y=2(y-y_0)+b\lambda=0,\ G_z=2(z-z_0)+c\lambda=0,\ G_\lambda=h=0$

מכאן - נעלה את המשוואות בריבוע ונחבר - $4[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]=(a^2+b^2+c^2)\lambda^2$

כמו כן - $2(x-x_0)^2=-\lambda a(x-x_0),\ 2(y-y_0)^2=-\lambda b(y-y_0),\ 2(z-z_0)^2=-\lambda c(z-z_0)$. ונחבר משוואות;

$$2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]=-\lambda[ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0]$$

(x,y,z) על המישור לכן נסמן $k=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ וקיבלנו - $2k=-\lambda(d-ax_0-by_0-cz_0)$

וגם קיבלנו $4k=\lambda^2(a^2+b^2+c^2)$. מכאן - $4k=\lambda^2(a^2+b^2+c^2),\ 4k^2=\lambda^2(ax_0+by_0+cz_0+d)^2$

נחלק משוואות ונקבל - $k=\frac{(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$.

אז המרחק מ-(x,y,z) ל-(x_0,y_0,z_0) הוא - $\sqrt{k}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}$

אין מרחק מקסימלי בין (x_0,y_0,z_0) למישור. יש רק נק' קריטית אחת ולכן זו בהכרח נק' מינימום!

נעבור למקרה של קיצון תחת שני אילוצים - $h_1(x,y,z)=0,\ h_2(x,y,z)=0$;

ובכן - משוואות האילוצים $h_1=h_2=0$ מגדירות עקומה γ ב-R^3 שמאונכת בכל נק' ל-$\vec\nabla h_1,\vec\nabla h_2$.

אם f מקבלת קיצון ב-γ ב-$P\in\gamma$, אז לכל וקטור משיק $\vec u$ ל-γ ב-P: $\frac{\partial f}{\partial u}(P)=0$ כי - $\vec\nabla f(P)\cdot\vec u=0$.

מכאן - $\vec\nabla f$ מאונך ל-γ בנק' הקריטית. כמו כן ב-P, $\vec\nabla h_1,\vec\nabla h_2$ לא מקבילים אז הם פורשים את המישור המאונך ל-γ ולכן ב-P: $\vec\nabla f=\lambda_1\vec\nabla h_1+\lambda_2\vec\nabla h_2$ כנדרש.

לכן נפתור את הבעיה ע"י מציאת קיצון ל-G המוגדרת ע"י - $G(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1 h_1(x,y,z)+\lambda_2 h_2(x,y,z)$

בעית קיצון עם אילוצים: (חזרה עם תוספות)

למה: נניח ש-γ מסילה גזירה C^1 שמוגדרת ע"י $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$

כרגיל, וקטור המהירות המשיק ל-γ הוא $x'(t)=(x_1'(t),\dots,x_n'(t))$

עת נניח $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונק' מוגדרת גזירה C^1 בסביבת γ.

נניח של-$f|_\gamma$ יש קיצון ב-$x(t_0)$. אז $x'(t_0)\perp\vec\nabla f(x(t_0))$.

אם $k(x)$ פונק' C^1 שקבועה ב-γ אז לכל t: $\vec\nabla k(x(t))\perp\vec x'(t)$

הוכחה: נגדיר $g(t)=f(x(t))$. לפי הנתון g מקבלת קיצון ב-t_0.

לכן $0=g'(t)=\frac{df(x(t))}{dt}\Big|_{t=t_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x(t_0))\frac{dx_k}{dt}(t_0)=\vec\nabla f(x(t_0))\cdot\vec x'(t_0)$

לגבי k קבועה ב-γ נגדיר $h(t)=k(x(t))$. כיון ש-h קבועה, לכל t – $0=h'(t)=\vec\nabla k(x(t))\cdot\vec x'(t)$

המשמעות - $\vec\nabla f$ מאונך ל-γ בנק' קיצון, ו-$\vec\nabla k$ מאונך ל-γ תמיד.

משפט 4: נניח $f,h_1,h_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונק' ב-C^1.

(א) נניח שלפונק' f עם אילוץ $h_1(x)=0$ יש קיצון ב-$P=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$,

אם $\vec\nabla h_1(P)\neq0$ אז קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$\vec\nabla f(P)=\lambda\vec\nabla h_1(P)$ (הוכחנו כבר בעבר).

(ב) נניח שלפונק' f עם שני אילוצים $h_1(x)=h_2(x)=0$ יש קיצון ב-$P=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$

אם $\vec\nabla h_1(P),\vec\nabla h_2(P)$ וקטורים בת"ל, אז קיימים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ כך ש-$\vec\nabla f(P)=\lambda_1\vec\nabla h_1(P)+\lambda_2\vec\nabla h_2(P)$

(כלומר - $\vec\nabla h_1,\vec\nabla h_2$ מאונכים ל-γ תמיד, ובפרט בקיצון. אם הם בת"ל, הם פורשים את המאונך לו, ובפרט את $\vec\nabla f(P)$).

הוכחה:

(ב) נגדיר $\gamma=\{x\in\mathbb{R}^3\mid h_1(x)=h_2(x)=0\}$. נתון ש-$P$ קיצון של f ב-γ. כי נתון $\vec\nabla h_1,\vec\nabla h_2$ בת"ל ב-P. אז למט' $\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3}\end{pmatrix}$

ב-P יש 2 שורות בת"ל, ולכן ממשפט שלמדנו יש 2 עמודות בת"ל, למשל 2 העמודות האחרונות.

לכן ממשפט 3 בסביבת x_1^0 אפשר לחלץ מהמשו' $h_1(x)=h_2(x)=0$ את x_2,x_3 כפונק' C^1 של x_1.

לכן γ מקבלת פרמטריזציה C^1: $x_1=t$, $x_2=x_2(t)$, $x_3=x_3(t)$; לכן נק' $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ ולפי הלמה מתקיים $\vec\nabla h_1\perp\vec x'(t)$, $\vec\nabla h_2\perp\vec x'(t)$

אך $P=x(t_0)$ אז גם $\vec\nabla f\perp\vec x'(t_0)$. יש כאן שלושה וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ שמאונכים ל-$\vec x'(t_0)$.

כיון ש-$\vec\nabla h_1(P),\vec\nabla h_2(P)$ בת"ל, בהכרח קיימים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ כך ש-$\vec\nabla f(P)=\lambda_1\vec\nabla h_1(P)+\lambda_2\vec\nabla h_2(P)$

(א) נגדיר $S=\{x\in\mathbb{R}^3\mid h_1(x)=0\}$. נתון ש-$P\in S$ והיא נק' קיצון עבור $f|_S$. גם נתון ש-$\vec\nabla h_1(P)\neq0$. בה"כ $\frac{\partial h_1}{\partial x_3}\neq0$

ב-$P=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$. לכן ממשפט 3 שבסביבת הנקודה (x_1^0,x_2^0) אפשר לחלץ מ-$h_1(x)=0$ – $x_3=x_3(x_1,x_2)$;

על המשטח S ניתן להגדיר עקומות: γ_1: $x_1=t$, $x_2=x_2^0$, $x_3=x_3(t,x_2^0)$ ו-γ_2: $x_1=x_1^0$, $x_2=t$, $x_3=x_3(x_1^0,t)$

דרך P יש משיק $\vec u$ ל-γ_1 ו-$\vec v$ ל-γ_2. γ_1,γ_2 על S אז $h(x)=0$ בהם, לכן $\vec\nabla h(P)\perp\vec u,\vec v$. P קיצון על γ_1,γ_2 לכן $\vec\nabla f(P)\perp\vec u,\vec v$

לסיכום: $\vec\nabla f,\vec\nabla h$ מאונכים למישור המשיק ל-S בנק' P. כיון ש-$\vec\nabla h(P)\neq0$ קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$\vec\nabla f(P)=\lambda\vec\nabla h(P)$

משפט 2: המקרה הכללי

נניח $f,h_1,h_2,\dots,h_k:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}$ פונק' C^1. נגדיר - $S\equiv\{x\in\mathbb{R}^{n+k}\mid h_1(x)=\dots=h_k(x)=0\}$

עוד נניח של-$f|_S$ קיימת נק' קיצון ב-$p\in S$.

אם $\vec\nabla h_i$ $1\le i\le k$ בת"ל ב-p, אז קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ כך ש- $\vec\nabla f(p)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec\nabla h_j(p)$.

תקציר ההוכחה:

כיוון ש- $\{\vec\nabla h_j\}_{j=1}^{k}$ בת"ל ב-p, נקבל ממשפט 3 שבסביבת p, S מתואר ע"י פונק':

$y_1=y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_k=y_k(x_1,\dots,x_n)$ (כאן אנחנו לוקחים k משתנים מתוך $n+k$)

כיוון שיש n משתנים חופשיים, S משטח C^1 ממימד n בסביבת p.

ב-$\mathbb{R}^{n+k}$ יש k מימדים מאונכים ל-S. נקבל שבנקודה p: $\vec\nabla h_j(p)$, $1\le j\le k$ מאונך ל-S.

ו-$\vec\nabla f(p)$ מאונך ל-S. כיוון ש-$\vec\nabla h_j(p)$ בת"ל, בהכרח $\vec\nabla f(p)$ צירוף לינארי שלהם,

כלו' קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ כך ש- $\vec\nabla f(p)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec\nabla h_i(p)$

הערות

(1) הפרמטרים שבו מחפשים נק' קיצון במשפט 2 הוא לגרנז' כמו קודם -

$G(x_1,\dots,x_{n+k},\lambda_1,\dots,\lambda_k)=f(x_1,\dots,x_{n+k})+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j h_j(x_1,\dots,x_{n+k})$. נק' קיצון של f ב-S הן נק' קריטיות של G.

(2) התנאי של משפט 2 הוא רק תנאי הכרחי למקסימום או מינימום, אך לא מספיק.

ככל צורך הרבה פעמים מהאופי של בעיה פיזיקלית יודעים אם קיבלנו מקסימום או מינימום,

ואם המשטח S חסום וסגור (קומפקטי) אז משפט ויירשטראס מבטיח ש-f מקבלת מקסימום ומינימום מוחלטים ב-S,

ואז מספיק להשוות את הערכים של f בנק' הקריטיות

(ואם יש - בנק' "סינגולריות" שבהן הנגזרות $\vec\nabla h_i$ תלויים לינארית...)

אינטגרציה ב-$\mathbb{R}^n$

הגדרה: $D\subseteq\mathbb{R}^n$ נקרא $\boxed{\text{תחום}}$ (או תחום פתוח) אם D קב' פתוחה וקשירה.

אם כן אז $\bar D$ נקרא $\boxed{\text{תחום סגור}}$.

עבור $\bar D$ תחום סגור ב-$\mathbb{R}^n$ ו- $f:\bar D\to\mathbb{R}$ פונק' חסומה,

נרצה להגדיר- $\int_{\bar D} f(x)dx = \int_{\bar D} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n$

כדי להגדיר אינטגרל זה, נתחיל נגדיר $\boxed{\text{חלוקה}}$ P של $\bar D$ נהיא:

$\bar D=\bigcup_{j=1}^{k}\bar D_j$ כאשר $\bar D_j$ תחום סגור לכל $i\neq j$ - $D_i\cap D_j=\emptyset$ (הפנים זרים - החיתוך רק בשפה).

עבור $1\le j\le k$ נגדיר - $m_j=\inf\{f(x)\mid x\in\bar D_j\}$, $M_j=\sup\{f(x)\mid x\in\bar D_j\}$

אז נגדיר $\boxed{\text{סכום עליון}}$: $\bar S(f,P)=\sum_{j=1}^{k}M_j|\bar D_j|$, $\boxed{\text{סכום תחתון}}$: $\underline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^{k}m_j|\bar D_j|$

כאן לכל j, $|\bar D_j|$ מסמן את הנפח של $\bar D_j$ ב-$\mathbb{R}^n$. נרצה להגדיר את הנפח הנ"ל:

$\boxed{\text{תיבה}}$ ב-$\mathbb{R}^n$ היא מכפלה קרטזית של n קטעים סגורים ב-$\mathbb{R}$.

נפח התיבה T מוגדרת ע"י $T=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid a_j\le x_j\le b_j,\ 1\le j\le n\}$ ולפי הגדרה - $|T|=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$

עבור תחום סגור כלשהו $\bar D\subseteq\mathbb{R}^n$, $\boxed{\text{הנפח הפנימי}}$ של $\bar D$ ע"י - $|D|_{int}=\sup_{\bigcup_{s=1}^{L}T_s\subseteq\bar D}\sum_{s=1}^{L}|T_s|$

sup על כל האפשרויות לתיבות שהפנים שלהן זרים והאיחוד בתוך התחום.

כמו כן- $\boxed{\text{הנפח החיצוני}}$ של $\bar D$ ע"י - $|D|_{ext}=\inf_{\bar D\subseteq\bigcup_{s=1}^{L}T_s}\sum_{s=1}^{L}|T_s|$

$\bar D$ $\boxed{\text{בעל נפח}}$ אם $|D|_{ext}=|D|_{int}$.

$\bar D$ בעל נפח $\iff$ $\partial\bar D$ (השפה של $\bar D$) בעלת נפח אפס, זא- לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $T_1,\dots,T_L$, כך ש- $\sum_{s=1}^{L}|T_s|<\varepsilon$ ו- $\partial\bar D\subseteq\bigcup_{s=1}^{L}T_s$

דוגמא: נראה כי הגרף $y=f(x)$ של פונק' רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונראה שלשטח הגרף הוא אפס.

הסבר: כיוון ש-f רציפה ב-$[a,b]$ היא רציפה שם במ"ש. לכן אם $\varepsilon>0$ נתון, קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ עבורם $|x-y|<\delta$ אז- $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

הגרף בין a ל-$a+\delta$, הגרף של f מוכל בתיבה $[a,a+\delta]\times[f(a)-\frac{\varepsilon}{b-a},f(a)+\frac{\varepsilon}{b-a}]$ ששטחה הוא- $\frac{2\varepsilon}{b-a}\cdot\delta$.

כמו כן הגרף בין $a+\delta$ ל-$a+2\delta$ מוכל בתיבה ששטחה שוב $\frac{2\varepsilon}{b-a}\cdot\delta$. נמשיך את זה עוד $\frac{b-a}{\delta}$ פעמים.

סה"כ השטח של התיבות שמכסות את הגרף הוא לא יותר מ- $\frac{2\varepsilon}{b-a}\cdot\frac{b-a}{\delta}\cdot\delta=2\varepsilon$ (וסיימנו).

אפשר להכליל דוגמא זו - לגרף $z=z(x_1,\dots,x_n)$ ב-$\mathbb{R}^{n+1}$, z רציפה בתיבה סגורה, יש נפח אפס.

מכאן והלאה נדבר רק על תחומים $\bar D$ שיש להם נפח, ולכן שהשפה מורכבת ממס' סופי של גרפים של פונק'.

לפי זה אפשר לחזור להגדרות $\underline{S},\bar S$.

הגדרה: "פרמטר" של החלוקה P הוא $\lambda(P)=\max\limits_{1\le j\le k} \operatorname{diam}(\bar D_j)$ (קוטר)

משפט 1: אם הפונק' המוגבלת f מקיימת $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in\bar D$, אז לכל חלוקה P של $\bar D$:

$$m|\bar D| = m\sum_{j=1}^k |\bar D_j| = \sum_{j=1}^k m|\bar D_j| \le \sum_{j=1}^k m_j|\bar D_j| \le \sum_{j=1}^k M_j|\bar D_j| \le \sum_{j=1}^k M|\bar D_j| = M|\bar D|$$

בפרט, כתוב כאן ש- $m|\bar D|\le \underline{S}(f,P)\le \bar S(f,P)\le M|\bar D|$

הערה: מעכשיו והלאה נזהה את הגבול ב-$\bar D$ ו-D לכל עניין תחום סגור של נפח.

מסקנה: עפ"י משפט 1 כל הסכומים העליונים והתחתונים $\underline S(f,P),\bar S(f,P)$ חסומים באותו ערך ב-P, לכן מוגדר היטב האינטגרל העליון $\overline{\int_D} f=\inf_P \bar S(f,P)$ והאינטגרל התחתון $\underline{\int_D} f=\sup_P \underline S(f,P)$.

הגדרה: f $\boxed{\text{אינטגרבילית לפי דרבו}}$ אם $\underline{\int_D} f=\overline{\int_D} f$ ואז הערך המשותף מסומן $\int_D f(x)dx$.

הגדרה: נניח $P=\{D_j\}_{j=1}^k$ חלוקה של D. נאמר ש-Q $\boxed{\text{עידון}}$ של P אם Q מתקבל מ-P ע"י חלוקה של כל D_j.

משפט 2: אם Q עידון של P אז- $\underline S(f,P)\le \underline S(f,Q)\le \bar S(f,Q)\le \bar S(f,P)$.

הוכחה: נרשום $Q=\bigcup_{j=1}^k P_j$ כאשר P_j היא חלוקה של D_j. לפי כך-

$\bar S(f,Q)=\sum_{j=1}^k \bar S(f,P_j) \underset{\text{משפט 1}}{\le} \sum_{j=1}^k M_j|D_j|=\bar S(f,P)$. באופן דומה $\underline S(f,P)\le \underline S(f,Q)$.

מסקנה 1: לכל 2 חלוקות P,R של D מתקיים- $\underline S(f,P)\le \bar S(f,R)$.

הוכחה: נגדיר חלוקה T של D ע"י כל החיתוכים של תחומים ב-P עם תחומים ב-R.

אז T עידון של P,R שניהם, ולכן ממשפט 2- $\underline S(f,P)\le\underline S(f,T)\le \bar S(f,T)\le\bar S(f,R)$.

מסקנה 2: $\underline{\int_D} f\le\overline{\int_D} f$. נובע בקלות ממסקנה 1.

משפט 3: f אינטגרבילית ב-D $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של D כך ש- $\bar S(f,P)-\underline S(f,P)<\varepsilon$.

הוכחה: $\Leftarrow$ לפי הנתון לכל $\varepsilon>0$ קיימת P כך ש- $\bar S(f,P)-\underline S(f,P)<\varepsilon$. אבל קיבלנו- $\underline S(f,P)\le\underline{\int}f\le\overline{\int}f\le\bar S(f,P)$

אז $0\le\overline{\int}f-\underline{\int}f\le\bar S(f,P)-\underline S(f,P)<\varepsilon$. זה נכון לכל $\varepsilon>0$ לכן $\underline{\int}f=\overline{\int}f$ ו-f אינטגרבילית ב-D.

$\Rightarrow$ נתון $\underline{\int}f=\overline{\int}f$. יהי $\varepsilon>0$, מהגדרת חסם תחתון נובע שקיימת P כך ש- $0\le\bar S(f,P)-\overline{\int}f<\frac{\varepsilon}{2}$.

כמו כן מהגדרת חסם עליון נובע שקיימת Q כך ש- $0\le\underline{\int}f-\underline S(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר חלוקה R שהיא עידון משותף ל-P,Q

אז- $0\le\bar S(f,R)-\overline{\int}f<\frac{\varepsilon}{2}$, $0\le\underline{\int}f-\underline S(f,R)<\frac{\varepsilon}{2}$. נחבר את אי השוויונים ומהנתון נקבל $\bar S(f,R)-\underline S(f,R)<\varepsilon$ כנדרש!

מסקנה: f אינט' ב-D $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P=\{D_j\}_{j=1}^k$ $(D=\bigcup_{j=1}^k D_j)$ כך ש- $\sum_{j=1}^k (M_j-m_j)|D_j|<\varepsilon$

הוכחה: לפי ההגדרה - $\overline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^k M_j|D_j|$ ו- $\underline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^k m_j|D_j|$.

לכן עפ"י משפט 3: f אינט' $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש- $\sum_{j=1}^k (M_j-m_j)|D_j|=\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon$

משפט 4: יהי $D\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום קומפקטי ו- $f:D\to\mathbb{R}$ פונ' רציפה ב-D. אז f אינט' ב-D.

הוכחה: לפי משפט ויירשטראס, f חסומה ב-D וזה תנאי הכרחי לאינטגרביליות.

כעת, יהי $\varepsilon>0$ נתון. כיוון ש-f רציפה בתחום קומפקטי D, היא רציפה במ"ש שם.

אז קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in D$ כך ש- $\|x-y\|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2|D|}$.

כעת נקח חלוקה כלשהי P של D כך ש- $\lambda(P)<\delta$. $P=\{D_j\}_{j=1}^k$.

אם x,y שתי נקודות ב-D_j אז $\|x-y\|<\delta$ ולכן $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2|D|}$. הדבר נכון לכל $x,y\in D_j$ ולכן $M_j-m_j\le\frac{\varepsilon}{2|D|}<\frac{\varepsilon}{|D|}$

לפי זה - $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^k (M_j-m_j)|D_j|\le\sum_{j=1}^k\frac{\varepsilon}{|D|}\cdot|D_j|=\frac{\varepsilon}{|D|}\sum_{j=1}^k|D_j|=\frac{\varepsilon}{|D|}\cdot|D|=\varepsilon$

הדבר אפשרי לכל $\varepsilon>0$ ולכן לפי משפט 3 f אינט' ב-D.

מסקנה: מהלך ההוכחה שאם f רציפה ב-D אז- $\lim_{\lambda(P)\to0}\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=0$

לכן- $\int_D f=\lim_{\lambda(P)\to0}\overline{S}(f,P)=\lim_{\lambda(P)\to0}\underline{S}(f,P)$

הוכחה: בהוכחה של משפט 3 הראינו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $\lambda(P)<\delta$ אז- $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon$.

זה בדיוק אומר - $\lim_{\lambda(P)\to0}\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=0$.

ולפי הקודמת, נקבל שלכל P - $\underline{S}(f,P)\le\int_D f\le\overline{S}(f,P)$ לכן- $0\le\overline{S}(f,P)-\int_D f\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)$.

לפי סנדוויץ' - $\lim_{\lambda(P)\to0}[\overline{S}(f,P)-\int_D f]=0$ כלו' - $\lim_{\lambda(P)\to0}\overline{S}(f,P)=\int_D f$. באופן דומה- $\lim_{\lambda(P)\to0}\underline{S}(f,P)=\int_D f$.

משפט 5: (משפט דרבו)

f אינטגרבילית ב-D $\iff$ $\lim_{\lambda(P)\to0}\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=0$

כל זה היה השימוש של דרבו לאינטגרלים. יש גישה דומה, הגישה של רימן.

הגדרה: תהי $P=\{D_j\}_{j=1}^{k}$ חלוקה של D ו- $f:D\to\mathbb{R}$ פונק' חסומה.

$\boxed{\text{סכום רימן}}$ של f מעל P הוא סכום מהצורה: $\sum_{j=1}^{k} f(x_j)|D_j|$

כאשר x_j נק' כלשהי ב- D_j.

פשוט שאם S מציין סכום רימן של f עפ"י החלוקה P: $\underline{S}(f,P)\le S\le \overline{S}(f,P)$

למעשה- $\underline{S}(f,P)$ הוא ה-inf של כל סכומי רימן S עפ"י P, $\overline{S}(f,P)$ הוא ה-sup שלהם.

הגדרה: אומרים $\boxed{\text{ש-}f\text{ אינטגרבילית לפי רימן}}$ ב- D אם כאשר $\lambda(P)\to 0$,
כל סכומי רימן הבנויים על כל החלוקות P שואפים לגבול אחד, L, ואז אומרים ש- $\int_D f = L$

משפט 6: יהיה $D\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום קומפקטי ו- $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, אזי:
f אינטגרבילית לפי רימן $\Longleftrightarrow$ f אינטגרבילית לפי דרבו, ואם כן $\int_{D(\text{דרבו})} f = \int_{D(\text{רימן})} f$

הוכחה: כאמור, אם P חלוקה של D ו- S סכום רימן הבנוי על P אז- $\underline{S}(f,P)\le S\le \overline{S}(f,P)$

כעת אם f אינט' לפי דרבו, נקבל משלוש ל- $\lim_{\lambda(P)\to 0}\underline{S}(f,P)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(f,P)=\int_{D(\text{דרבו})} f$

עכשיו נקבל מסנדוויץ' ש- $\lim_{\lambda(P)\to 0} S=\int_{D(\text{דרבו})} f$. כיוון שיש גבול לסכומי רימן, f אינט' רימן ו- $\int_{D(\text{רימן})} f=\int_{D(\text{דרבו})} f$.

לצד השני נזכור שלכל חלוקה P- $\underline{S}(f,P)=\inf\{S \mid S \text{ סכום רימן על } P\}$, $\overline{S}(f,P)=\sup\{S \mid S \text{ סכום רימן על } P\}$

אם נתון ש- f אינט' רימן ב- D אז כאשר $\lambda(P)\to 0$, כל סכומי רימן של f הבנויים על P שואפים לגבול אחד
שהוא $\int_{D(\text{רימן})} f$, לכן - $\lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(f,P)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\underline{S}(f,P)=\int_{D(\text{רימן})} f$. מכאן f אינט' דרבו ו- $\int_{D(\text{רימן})} f=\int_{D(\text{דרבו})} f$.

פירושים של האינטגרל:

(1) אם $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום קומפקטי, ו- $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה ואי-שלילית אז $\int_D f$ הוא הנפח מתחת לגרף.

גם אם $D\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום קומפקטי ו- $f\in C(D)$ אי שלילית אז $\int_D f$ הוא הנפח (כמו שהגדרנו)

של התחום- $\mathbb{R}^{n+1}\supseteq S=\{(x_1,\dots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid 0\le y\le f(x_1,\dots,x_n)\}$

(2) אם D תחום קומפקטי ב- $\mathbb{R}^3$ ואם $f(x,y,z)$ היא צפיפות החומר בנק' (x,y,z) אז - $\int_D f$ הוא המסה של הגוף D.

הסבר: נקשה חלוקה עדינה $P=\{D_j\}$ של D. בתוך התחום הקטן D_j, f "כמעט" קבוע,

לכן נוכל לבחור נקודה $(x_j,y_j,z_j)\in D_j$ ולהגיד שהמסה של D_j שווה בערך ל- $f(x_j,y_j,z_j)|D_j|$ (צפיפות·נפח).

המסה של D מקורבת היטב ע"י- $\sum_{j=1}^{k} f(x_j,y_j,z_j)|D_j|$. זה סכום רימן השואף למסה המדויקת $\int_D f$.

משפט 7: תכונות האינטגרל

יהי $D\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום קומפקטי. ונניח $f,g:D\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ב-D, ו- $c\in\mathbb{R}$ קבוע. אזי:

(א) $f+cg$ אינט' ב-D ומתקיים $\int_D f+cg=\int_D f+c\int_D g$. (כלומר האינטגרל לינארי)

(ב) אם לכל $x\in D$ - $f(x)\geq g(x)$ אז $\int_D f\geq\int_D g$. ובפרט אם $f(x)\geq 0$ אז $\int_D f\geq 0$. (כלומר האינטגרל מונוטוני)

(ג) אם $D=\bigcup_{j=1}^{k}D_j$ חלוקה של D, אז f אינט' בכל D_j ומתקיים: $\int_D f=\sum_{j=1}^{k}\int_{D_j}f$.

(ד) אם $m\leq f(x)\leq M$ ב-D אז $m|D|\leq\int_D f\leq M|D|$.

(ה) $\int_D 1=|D|$.

(ו) **משפט ערך הביניים:** אם f רציפה ב-D אז קיים $x_0\in D$ כך ש- $\int_D f=f(x_0)|D|$.

(ז) $|f|$ אינט' ומתקיים - $\left|\int_D f\right|\leq\int_D|f|$

הוכחה:

(א) סכום רימן עבור $f+cg$ הוא סכום של $\sum_{j=1}^{k}[f(x_j)+cg(x_j)]|D_j|=\sum_{j=1}^{k}f(x_j)|D_j|+c\sum_{j=1}^{k}g(x_j)|D_j|$

ובגבול $\lambda(P)\to 0$. כיוון ש- f,g אינט', אגף ימין שואף ל- $\int_D f+c\int_D g$, לכן גם אגף שמאל שואף לזה.

ומכאן ש- $f+cg$ אינט' ו- $\int_D f+c\int_D g=\lim\left(\begin{smallmatrix}\text{סכומי}\\\text{רימן}\end{smallmatrix}\right)=\int_D f+cg$.

(ב) כיוון שלכל $x\in D$ $f(x)\geq g(x)$ נקבל עבור סכומי רימן: $\sum_{j=1}^{k}f(x_j)|D_j|\geq\sum_{j=1}^{k}g(x_j)|D_j|$. ובגבול $\lambda(P)\to 0$ נקבל $\int_D f\geq\int_D g$.

ובמיוחד אם $f(x)\geq 0$ אז - $\int_D f\geq\int_D 0=0$.

(ג) עבור $1\leq j\leq k$ נגדיר P_j להיות חלוקה של D_j. אז $P=\bigcup_{j=1}^{K}P_j$ היא חלוקה של D.

בפרט ש- $\overline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^{K}\overline{S}(f,P_j)$, $\underline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^{K}\underline{S}(f,P_j)$ ולכן - $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^{K}\overline{S}(f,P_j)-\underline{S}(f,P_j)$

האגף הימני הוא סכום של K איברים לא שליליים, ולכן עבור $1\leq j\leq K$, $0\leq\overline{S}(f,P_j)-\underline{S}(f,P_j)\leq\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)$

נתון ש- f אינט' ב-D ולכן כאשר $\lambda(P)\to 0$ נקבל $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\to 0$. נקבל ממשפט הסנדוויץ' שכאשר $\lambda(P_j)\to 0$

נקבל $\overline{S}(f,P_j)-\underline{S}(f,P_j)\to 0$ ולכן f אינטגרבילית ב-D_j. לפי ערך האינטגרלים בשלב (בנפרד):

$$\int_D f=\lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(f,P)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{j=1}^{K}\overline{S}(f,P_j)=\sum_{j=1}^{K}\int_{D_j}f$$

(ד) נתון שלכל $x\in D$: $m\leq f(x)\leq M$, (ממשפט 1 שלב) לכל חלוקה P של D:

$m|D|\leq\underline{S}(f,P)\leq\overline{S}(f,P)\leq M|D|$, ובשאיפה $\lambda(P)\to 0$ נקבל - $m|D|\leq\int_D f\leq M|D|$.

(ה) אם $f(x)=1$ הרי לכל $x\in D$: $1\leq f(x)\leq 1$, לפי סעיף ד - $1\cdot|D|\leq\int_D f\leq 1|D|$.

<u>המשך ההוכחה:</u>

(1) D קומפקטי, לפי ויירשטראס קיימים $m=\min\{f(x)|x\in D\}$, $M=\max\{f(x)|x\in D\}$. לפי ג' - $m|D|\le\int_D f\le M|D|$

אז - $m\le\frac{1}{|D|}\int_D f\le M$. כעת $f(x)$ רציפה בתחום קשיר D ומקבלת את ערכיה m,M.

לפי ערך הביניים היא מקבלת כל ערך בין m ל-M ובפרט יש $x_0\in D$ עבורו - $f(x_0)=\frac{1}{|D|}\int_D f$ אז - $\int_D f=f(x_0)|D|$.

(2) נתבונן בחלוקה $P=\{D_j\}$ של D - $D=\bigcup_{j=1}^{k}D_j$. נשים לב שאם $x,y\in D_j$ אז $\left||f(x)|-|f(y)|\right|\le|f(x)-f(y)|$

ניקח סופרמום על שני האגפים על $x,y\in D_j$ ונקבל - $M_j(|f|)-m_j(|f|)\le M_j(f)-m_j(f)$.

נסכם על $1\le j\le k$: $0\le\bar{S}(|f|,P)-\underline{S}(|f|,P)\le\bar{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)$.

נתון f אינט' ב-D לכן כאשר $\lambda(P)\to0$, $\bar{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\to0$, לפי סנדוויץ' - $\lim_{\lambda(P)\to0}\bar{S}(|f|,P)-\underline{S}(|f|,P)=0$

לכן $|f|$ אינט' ב-D.

לגבי אי השוויון נשים לב שלכל $x\in D$ - $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$, לפי ב' - $-\int|f|\le\int f\le\int|f|$, כלומר בדיוק $\left|\int f\right|\le\int|f|$.

<u>מסקנה:</u> אם נתון של D חילוק $D=\bigcup_{j=1}^{k}D_j$ ונתון $f:D\to\mathbb{R}$ אינט' בכל D_j, אז f אינט' ב-D,

ומתקיים: $\int_D f=\sum_{j=1}^{k}\int_{D_j}f$ (הוספה לסעיף ג').

<u>הוכחה:</u> כמו בהוכחת ג', נגדיר חלוקות P_j של D_j, וחלוקה P של D כך ש- $D=\bigcup_{j=1}^{k}P_j$.

כמו ראינו שאם כך אז - $\bar{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\sum_{j=1}^{k}\bar{S}(f,P_j)-\underline{S}(f,P_j)$

להראות ש-f אינט' בכל D, יהי $\varepsilon>0$ נתון. כיוון ש-f אינט' בכל D_j, אפשר לבחור את החלוקות P_j,

כך שלכל j - $\bar{S}(f,P_j)-\underline{S}(f,P_j)<\frac{\varepsilon}{k}$. נגדיר $D=\bigcup_{j=1}^{k}P_j$, ולכן נקבל - $\bar{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon$.

לכן f אינט' ב-D עפ"י משפט 3.

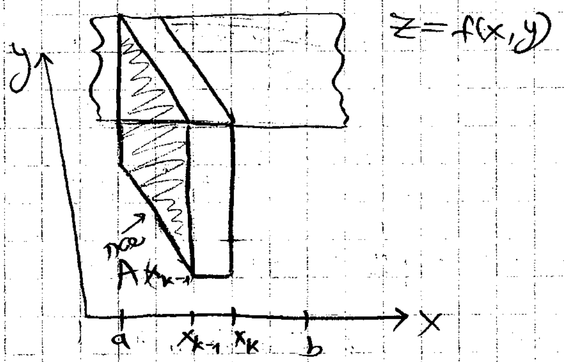
השוויון $\int_D f=\sum_{j=1}^{k}\int_{D_j}f$ כמו בהוכחה של ג'.

חישוב אינטגרלים

נתחיל עם אינטגרלים מעל תחום המישור: $D\subset\mathbb{R}^2$ ופונק' אינטגרבילית: $f:D\to\mathbb{R}$

<u>סימון מקובל</u>: $\iint f(x,y)\,dx\,dy$, קוראים לו $\boxed{\text{"אינטגרל כפול"}}$.

<u>הסבר</u>: D מלבן: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$. במקרה ה-1 נניח ש- $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x)\ge 0$ אזי שהאינטגרל שווה "נפח שמתחת לגרף".



נעשה חלוקה $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ של $[a,b]$ ובכך נחלק את הנפח מתחת לגרף לפרוסות. באופן מקורב הנפח של הפרוסה בין x_{k-1} ל- x_k הוא $A(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})$ כאשר $A(x_{k-1})$ הוא שטח החתך של אותו נפח ע"י המישור $x=x_{k-1}$

אם כן, הנפח כולו מקורב ע"י "סכום רימן": $\sum_{k=1}^{n} A(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})$

כאשר החלוקה נעשית עדינה יותר, נקבל את הנפח המדויק ע"י $\int_a^b A(x)\,dx$,

אבל עבור x מסוים, שטח החתך $A(x)$ הוא השטח מתחת לגרף $y\to f(x,y)$, $c\le y\le d$, והוא $\int_c^d f(x,y)\,dy$. לפי סימון זה, האינטגרל הכפול: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ שווה ל<u>"אינטגרל החוזר"</u>:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \text{, כנהוג יותר כ- } \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

מסימטריות נקבל שזה שווה ל- $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dy$

בהמשך נביא הוכחה ברורה של אופן לשוויון הנ"ל.

דוגמאות חישוב:

1. $\iint_D (x+y)^3\,dx\,dy$ כאשר D זה ריבוע היחידה: $[0,1]\times[0,1]$

פתרון: האינטגרל הכפול שווה לאינטגרל החוזר - $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)^3\,dy$

לכן - $$\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)^3 dy=\int_0^1 \frac{(x+y)^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=1}dx=\int\left(\frac{(x+1)^4}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx=$$
$$=\left(\frac{(x+1)^5}{20}-\frac{x^5}{20}\right)\Big|_0^1=\frac{2^5-2}{20}=\frac{30}{20}=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

2. $\iint x y^2\cos(x^2y)\,dx\,dy$ כאשר $D=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

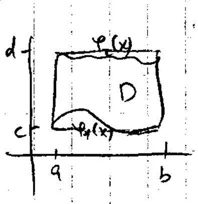
פתרון: כאן נח לחשב אינטגרל לפי x תחילה, לכן נקבל - $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^1 xy^2\cos(x^2y)\,dx$

לכן - $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^1 xy^2\cos(x^2y)\,dx=\int_0^{\pi/2}dy\left(\frac{y}{2}\sin(x^2y)\right)\Big|_{x=0}^{1}=\int_0^{\pi/2}\frac{y}{2}\sin y\,dy=$$
$$=-\frac{1}{2}y\cos y+\frac{1}{2}\sin y\Big|_0^{\pi/2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

נתקדם לתחום יותר כללי

הגדרה: $\boxed{\text{תחום נורמלי}}$ לפי x הוא תחום מהצורה - $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

באופן דומה מגדירים תחום נורמלי לפי y.



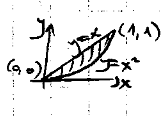
כדי לחשב $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ כאשר D נורמלי לפי x נגיד, נשים את D בתוך מלבן $R=[a,b]\times[c,d]$, כאשר ב-$R\setminus D$ נגדיר $f(x,y)=0$.

לפי הנימוק שאנו מכירים ש- $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

הסבר - $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy+\cancel{\iint_{R\setminus D} f(x,y)\,dx\,dy}=\int_a^b dx\int_c^d dy\, f(x,y)$

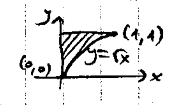
עבור כל $x\in[a,b]$ - $\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ ולכן נקבל - $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

דוגמאות:

3. $\iint_D xy^2\,dx\,dy$. $D\longrightarrow$ 

האינטגרל הוא - $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x xy^2\,dy=\int_0^1 dx\,\frac{xy^3}{3}\Big|_{y=x^2}^{x}=\int_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{15}-\frac{1}{24}}}$

4. $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy$. נשים לב שזה לא פשוט כי $\int e^{x/y}dy$ לא ידוע לנו.

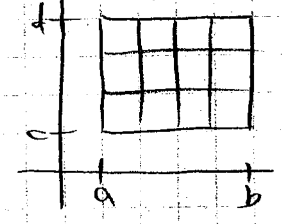


אז נחליף את סדר האינטגרציה ואז - $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx=\int_0^1 dy\ ye^{x/y}\Big|_{x=0}^{y^2}=\int_0^1(ye^y-y)\,dy$

לכן האינטגרל הוא - $ye^y-e^y-\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=e-e-\frac{1}{2}+1=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

משפט 8: משפט פוביני

נניח שהפונק' $f(x,y)$ מוגדרת ואינט' במלבן $A=[a,b]\times[c,d]$. עוד נניח שלכל $x\in[a,b]$ קיים אינטגרל $I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ אז $I(x)$ אינט' ב-$[a,b]$ ומתקיים $\iint_A f(x,y)dxdy=\int_a^b I(x)dx$.



הוכחה: נעשה חלוקה P של $[a,b]$ כך ש- $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

וחלוקה Q של $[c,d]$ כך ש- $c=y_0<y_1<\dots<y_m=d$

אז החלוקה $P\times Q$ מחלקת את A למלבנים קטנים: $A_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, עוד נסמן כרגיל $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$

$m_{ij}=\inf\{f(x,y)\mid(x,y)\in A_{ij}\}$, $M_{ij}=\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in A_{ij}\}$

נבנה סכום רימן עבור $\int_a^b I(x)dx$ עפ"י החלוקה P של $[a,b]$ והוא סכום מהצורה $\sum_{i=1}^n I(t_i)\Delta x_i$

כאשר $t_i\in[x_{i-1},x_i]$, נקח $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ קבוע, אז לכל $1\le j\le m$,

אם $y\in[y_{j-1},y_j]$, הרי $(t_i,y)\in A_{ij}$ ולכן $m_{ij}\le f(t_i,y)\le M_{ij}$.

לפי זה, $m_{ij}\Delta y_j\le\int_{y_{j-1}}^{y_j}f(t_i,y)\,dy\le M_{ij}\Delta y_j$.

נסכם ונקבל: $\sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j\le\sum_{j=1}^m\int_{y_{j-1}}^{y_j}f(t_i,y)dy\le\sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j$

הסכום האמצעי הוא בדיוק: $\int_c^d f(t_i,y)dy=I(t_i)$, כלומר $\sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j\le I(t_i)\le\sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j$

נכפיל ב- Δx_i ונסכם על i ונקבל: $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\le\sum_{i=1}^n I(t_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$

כלומר כאן $\underline{S}(f,P\times Q)\le R\le\overline{S}(f,P\times Q)$, כאשר R הוא סכום רימן $\sum_{i=1}^n I(t_i)\Delta x_i$

לבסוף, נשאיף $\lambda(P)\to0$ וגם $\lambda(Q)\to0$ אוטומטית $\lambda(P\times Q)\to0$

לפי התנאים שלנו, אי-השוויון הנ"ל הופך להיות: $\iint_A f(x,y)dxdy\le\int_a^b I(x)\,dx\le\iint_A f(x,y)dxdy$

לכן, כולם שווים ובפרט, האינטגרל האמצעי: $\int_a^b I(x)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$

מש"ל

מסקנה 1: אם נתון, בנוסף ל-8, שלכל $y\in[c,d]$ קיים האינטגרל $J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$

אז $\int_c^d J(y)dy$ קיים ושווה $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

ובמקרה שתנאי המשפט עם תנאי המסקנה מתקיימים, וכאשר f אינטגרבילית ב-A,

אז $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

מסקנה 2: תהי $f(x,y,z)$ פונק' אינטגרבילית על תיבה $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ e\le z\le g\}$

עוד נניח שלכל $x\in[a,b]$ קיים האינטגרל $\iint_R f(x,y,z)dy\,dz$ כאשר $R=[c,d]\times[e,g]\subseteq\mathbb{R}^2$,

אז $\int_a^b dx\iint_R f(x,y,z)dy\,dz$ קיים ושווה $\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

בדומה, אם לכל $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ קיים האינטגרל $\int_e^g f(x,y,z)dz$ אז $\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^g f\,dz$

במקרה שהתנאים מתקיימים לכל המשתנים, וכאשר f אינטגרבילית ב-T,

אז אפשר לחשב את $\iiint_T f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ כאינטגרל חוזר בכל 6 הסדרים של המשתנים.

הכללה: הכללה ל-$\mathbb{R}^n$ ברורה. בפרט אם $T\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה ו-$f:T\to\mathbb{R}$ רציפה,

אז ניתן לחשב את $\int_T f$ - כאינטגרל חוזר בכל $n!$ הסדרים האפשריים.

משפט 9: נניח $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום נורמלי לפי x, כלומר - $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

כאשר עבור $i=1,2$, $\varphi_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות. עוד נניח - $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה.

אז - $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

הוכחה: כיוון ש-φ_1,φ_2 רציפות הן חסומות, ואפשר לכסות את D במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$.

נגדיר - $g(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\in R\setminus D\end{cases}$

טענה: g אינט' ב-R ולכל $x\in[a,b]$, הפונק' $g_x(y)=g(x,y)$ אינט' ב-$[c,d]$ - וכן $\iint_R g(x,y)dx\,dy=\iint_D f(x,y)dx\,dy$

הוכחה - תחילה נשים לב שלכל $x\in[a,b]$ הפונק' $g_x(y)=g(x,y)$ רציפה ב-$[c,d]$ פרט לנק' $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ שבהן אולי שבירה

ל-$g_x(y)$ אי רציפות ממין ראשון. לכן $g_x(y)$ אינט' לכל $x\in[a,b]$. עתה נראה ש-g אינט' בכל R.

g חסומה, נניח $m\le g(x,y)\le M$. יהי $\varepsilon>0$ נתון. כבר הוכחנו שהגרפים של $\varphi_2(x),\varphi_1(x)$

בעלי שטח 0, לכן אפשר לכסות אותם ע"י $T=\bigcup_{k=1}^n T_k$ (איחוד סופי של מלבנים T_k) כך ש-$|T|=\sum|T_k|$

קטן כרצוננו. בפרט ש-$|T|<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. אם נסיר את הפנים של T ע"י $\mathring{T}$ אז $R-\mathring{T}$ קומפקטי ו-g רציפה.

לכן, עפ"י משפט 4 קיימת חלוקה Q של $R\setminus\mathring{T}$, כך ש-$\bar S(g,Q)-\underline S(g,Q)<\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן נעדן את R ע"י $R=Q\cup T$, אז $\bar S(g,P)-\underline S(g,P)=\bar S(g,Q)-\underline S(g,Q)+\bar S(g,T)-\underline S(g,T)<\frac{\varepsilon}{2}+(M-m)|T|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(M-m)\varepsilon}{2(M-m)}=\varepsilon$

כך הראינו לכל ε כי g אינט'.

המשך ההוכחה:

לבסוף נעיר ש- $\iint_R g(x,y)dxdy=\iint_D g(x,y)dxdy+\iint_{R\setminus D} g(x,y)dxdy$ לפי סעיף ג של משפט 7,

וזה שווה ל- $\iint_D f(x,y)dxdy+\iint_{R\setminus D} 0\,dxdy$ וקיבלנו את המבוקש $\iint_D f=\iint_R g$, והוכחנו את הטענה.

כעת נשתמש במשפט 8 לומר - $\iint_D f=\iint_R g=\int_a^b dx\int_c^d g(x,y)dy$

אבל לכל $x\in[a,b]$ $g(x,y)=0$ כאשר $y<\varphi_1(x)$ או $y>\varphi_2(x)$ לכן האינטגרל הפנימי שווה $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy$

והוכחנו - $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy$

מסקנה 1: תחת כל ההנחות של המשפט ואם $D\subset\mathbb{R}^n$ ו- $g: D\to\mathbb{R}$ פונק' חסומה שרציפה ב-D, כמו כן ∂D בעלת נפח אפס, אז g אינטגר' ב-D.

מסקנה 2: ברור שאפשר לערוך את משפט 9 ל-"תחום נורמלי לפי y"

מסקנה 3: הכללה לאינטגרל משולש -

נניח ש-A תחום ב-$\mathbb{R}^2$ ו- $D\subset\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י - $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in A,\ \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$

כאשר φ_1,φ_2 רציפות ב-A. אם נניח $f: D\to\mathbb{R}$ רציפה ב-D.

אזי - $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iint_A dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

(ניתן להכליל את המשפט גם לאינטגרלים מעל $\mathbb{R}^n$)

מסקנה 4: אפשר להחליף את משפט 9 עם המסקנות למקרה ש-f רק אינטגר' (ולא רציפה) ב-D