

סיכומי הרצאות בקורס:

חשבון אינפיניטסימלי 1

חלק 1

הרצאות 1-13

ההרצאות הועברו בין השנים תשע"ה – תשע"ט במחלקה למדעי המחשב באוניברסיטת בר-אילן (מס' קורס: 89132).

הקורס מבוסס על ספרו של Jerome Keisler:

Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach

(ניתן להורידו בצורה חופשית: [Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach](#))

ההרצאות הועברו ונערכו על-ידי ד"ר לואי ג'ינגס¹.

תאריך עדכון אחרון: 14.11.2018

¹ luie@jennings.es

תוכן הקורס

קורס זה מבוסס על שיטת המספרים האינפיניטסימלים המכונה בספרות "אנליזה לא סטנדרטית" (non-standard analysis). מדובר בשיטה שפותחה על-ידי אברהם רובינסון בשנות השישים של המאה ה-20. הרעיון (בגדול) הוא להרחיב את שדה המספרים הממשיים כך שהם יכללו (בין השאר) גם מספרים אינפיניטסימלים.

כאשר לייבניץ וניוטון פיתחו את החשבון הדיפרנציאלי (המאה ה-17) הם עשו זאת תוך שימוש בגדלים אינפיניטסימלים. למרות ההצלחות של שיטותיהם הם ספגו ביקורות רבות מכיוון שהשיטה לא הייתה פורמלית מספיק. כלומר, היה קושי להגדיר בצורה מספקת את המושג "אינפיניטסימל". למשל, מצד אחד הם הזניחו אותו בחישוביהם (בהנחה שהוא גודל אפסי) ומצד שני הם חילקו בו.

הבעיה הזאת נפתרה (נעלמה, יותר נכון) כאשר במאה ה-19 ווירשטראס הצליח להגדיר את המושג "גבול" ועשה זאת ללא אינפיניטסימלים, אלא במושגים ממשיים בלבד (הגדרת אפסילון-דלתא). בכך הוא העמיד את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי על בסיס פורמלי ויציב.

רק בשנות ה-60 של המאה ה-20 רובינסון הצליח לפתח תיאוריה עקבית של אנליזה שמשתמשת במספרים אינפיניטסימלים. בהרבה מובנים שיטה זו מחזירה את האנליזה למקורות שלה.

את הקורס הנוכחי אנו נלמד בתוך מסגרת המספרים ההיפר-ממשיים: שדה של מספרים שכולל את המספרים הממשיים, מספרים אינסופיים וכן מספרים אינפיניטסימלים.

באמצע הקורס נזכיר גם את השיטה הממשית (שיטת אפסילון-דלתא) ונראה איך אפשר לתרגם מושגים שונים בין שתי השיטות (גבול, רציפות, גזירות, התכנסות סדרה וכד').

הערות לגבי התוכן

תחילה קחו בחשבון שהסיכומים אינם מלאים ונמצאים בתהליך של מילוי, תיקון ושיפור.

יש לא מעט הוכחות שעדיין חסרות בסיכומים אלה למרות שהן כן מוצגות בכיתה. את ההוכחות ניתן למצוא בספר הלימוד הנ"ל של קיסלר (Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach), או בספר המלווה את הספר הנ"ל (ומכיל עוד הסברים והוכחות): **Foundations of Infinitesimal Calculus** שניתן למצוא כאן: [Foundations/Keisler](https://www.math.umd.edu/~keisler/foundations/).

הרצאה מס' 1

- קבוצות של מספרים (קובץ נפרד)

פונקציות של מספרים ממשיים

הגדרה

פונקציה ממשית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא קבוצה של זוגות סדורים של מספרים ממשיים $f = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ כך שלכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים אחד מהשניים:

- קיים $b \in \mathbb{R}$ יחיד עבורו הזוג (a, b) שייך ל- f .
במקרה זה נאמר ש- $f(a)$ מוגדר ונכתוב $f(a) = b$, ונקרא ל- b "הערך של f ב- a ".
- לא קיים $b \in \mathbb{R}$ עבורו הזוג (a, b) שייך ל- f .
במקרה זה נאמר ש- $f(a)$ אינו מוגדר.

! אחת הדרכים הנוחות להדגמת מושג הפונקציה היא באמצעות הגרף שלה.

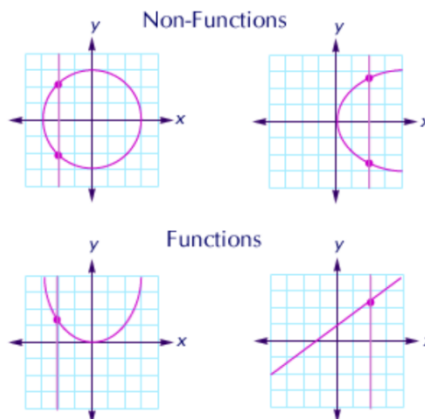
הגדרה

גרף של פונקציה ממשית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הוא קבוצת כל הנקודות (x, y) במישור כך ש-
 $y = f(x)$.

- שאלה: האם כל קבוצה של נקודות במישור היא גרף של פונקציה כלשהי?

דוגמאות

בכל אחד מהמקרים להסביר לפי ההגדרה מדוע זו פונקציה/לא פונקציה.



! אם נסכם את מה שלמדנו מהדוגמאות, נקבל את הטענה הבאה:

טענה – מבחן הקו האנכי

קבוצה S של נקודות במישור מתארת גרף של פונקציה כלשהי f אם ורק אם עבור כל קו אנכי במישור מתקיים אחד מהשניים:

- א. בדיוק נקודה אחת על הקו שייכת ל- S ;
- ב. אף נקודה על הקו אינה שייכת ל- S .

תחום ותמונה של פונקציה

הגדרות

1. **תחום הגדרה** של פונקציה ממשית f הוא קבוצת כל ה- $x \in \mathbb{R}$ כך שהביטוי $f(x)$ מוגדר. נסמן: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ is defined}\}$.
2. **תמונה** של פונקציה ממשית f היא קבוצת כל הערכים $f(x)$ כאשר x נמצא בתחום ההגדרה של f .
נסמן: $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$.

דוגמאות חשובות (להמחיש על-ידי ציור הגרפים)

1. **הפונקציה הריבועית:**
הפונקציה הריבועית מוגדרת באמצעות הכלל $f(x) = x^2$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
הגרף שלה הוא הפריבולה בעלת המשוואה $y = x^2$.
[מדובר, למעשה, בקבוצת הזוגות $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.]
מתקיים: $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = [0, \infty)$.
2. **הפונקציה $\frac{1}{x}$:**
הגרף של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$ הוא הפריבולה² שמשוואתה $y = \frac{1}{x}$.
מתקיים: $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{Im}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. **הפונקציה הקבועה:**
בהינתן מספר קבוע $c \in \mathbb{R}$, הפונקציה המוגדרת על-ידי הכלל $f(x) = c$ לכל $x \in \mathbb{R}$ נקראת **הפונקציה הקבועה**.
מתקיים: $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = \{c\}$.
4. **פונקציית הזהות:**

²נגזר ממילה יוונית שמשמעה "מוגזם". השווה עם המילה האנגלית hyperbole.

הפונקציה המוגדרת על-ידי הכלל $f(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$ נקראת **פונקציית הזהות**.

הגרף שלה הוא קו ישר שמשוואתו $y = x$.

מתקיים: $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

5. פונקציית הערך המוחלט:

זוהי פונקציה המסומנת ב- $|x|$ ומוגדרת באמצעות הכלל: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

מבחינה גיאומטרית, $|x|$ הוא מרחקו של x מאפס.

חשוב: ניתן להגדיר את פונקציית הערך המוחלט גם באמצעות הכלל: $|x| = \sqrt{x^2}$.

משפט – תכונות הערך המוחלט (לא הספקתי)

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$. אזי מתקיים:

א. $|-a| = |a|$

ב. $|ab| = |a||b|$

ג. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ לכל $b \neq 0$

השיפוע

תזכורת: שיפועו של הקו הישר העובר בשתי נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ נתון על-ידי

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

מעתה נסמן את השינויים על הצירים באמצעות: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ בסימונים החדשים.}$$

❗ שאלה: מה זה שיפוע של עקומה?

כדי לתת תשובה מלאה לשאלה זו, אנו נצטרך כלים מתקדמים (בפרק הבא), וכעת רק ניתן אינטואיציה.

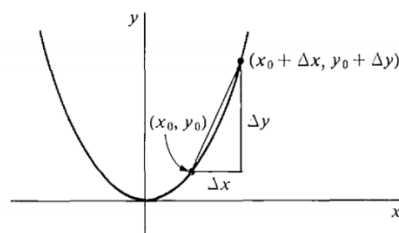
בקווים ישרים השיפוע מודד:

- א. את הכיוון של הישר
- ב. את קצב השינוי של פונקציית הקו הישר

אותו הרעיון מתקיים גם עבור שיפוע של עקומה כללית, רק שכעת השיפוע לא יהיה קבוע כמו בקו הישר, ויוכל להשתנות מנקודה לנקודה.

הדוגמה של הפונקציה הריבועית

נתבונן בשתי נקודות על הפרבולה:



השיפוע של הקו הישר העובר בשתי הנקודות הוא $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. נחשב שיפוע זה. מכיוון

ששתי הנקודות נמצאות על העקומה, הן מקיימות: $\begin{cases} y_0 = x_0^2 \\ y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 \end{cases}$ ולכן, אם

נחסר את המשוואות, נקבל: $\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

כלומר: $m = 2x_0 + \Delta x$.

(שימו לב שאת כל החישובים ניתן לעשות רק עבור $\Delta x \neq 0$!)

כעת, ככל ששתי הנקודות שבחרנו הן קרובות יותר זו לזו, כך השיפוע של הקו הישר מתקרב לשיפוע של הפונקציה. כלומר, ככל ש- Δx קטן יותר, השיפוע יהיה קרוב יותר לשיפוע האמיתי.

לכן, מצד אחד אנחנו רוצים ש- Δx יהיה כמה שיותר קרוב לאפס, כדי שנוכל "להזניח אותו", ומצד שני לא רוצים שהוא יהיה אפס, שכן אז אין אפשרות לעשות את החישובים שעשינו.

איזה מן מספר הוא Δx ?

כל מספר ממשי שונה מאפס הוא בעל גודל כלשהו, ולכן לא ניתן להזניח אותו בחישובים.

לכן, המטרה שלנו היא להציג מערכת מספרים חדשה שתכיל, בין השאר, גם מספרים "זניחים" במובן שתיארנו.

הגדרה: (הגדרה מרכזית בקורס!)

נאמר שמספר ε הוא **אינפיניטסימל** אם לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ מתקיים: $-a < \varepsilon < a$.

• למשל: אפס הוא אינפי, והוא האינפי היחיד ב- $\mathbb{R}$.

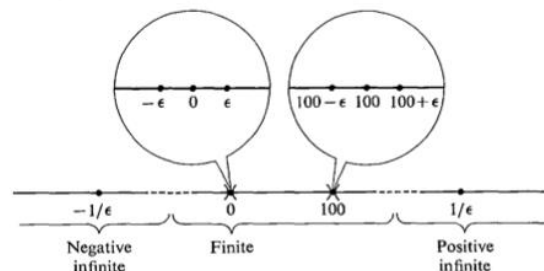
הגדרה (התחלתית. נשנה אותה בהרצאה הבאה).

א. אם ε הוא אינפי חיובי, אזי $\frac{1}{\varepsilon}$ הוא **מספר אינסופי חיובי**.

ב. אם ε הוא אינפי שלילי, אזי $\frac{1}{\varepsilon}$ הוא **מספר אינסופי שלילי**.

❗ המספרים האינפיניטסימלים והמספרים האינסופיים אינם שייכים ל- $\mathbb{R}$ (למעט אפס), ולכן, מעכשיו, אנו נתחיל לעבוד עם מערכת מספרים חדשה: **המספרים ההיפר ממשיים** $\mathbb{R}^*$.

שימו לב שמתקיים: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$.



הרצאה מס' 2

תזכורת:

הגדרה (הגדרה מרכזית בקורס!)

נאמר שמספר ε הוא **אינפיניטסימל** אם לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ מתקיים: $-a < \varepsilon < a$.

- למשל: אפס הוא אינפי, והוא האינפי היחיד ב- $\mathbb{R}$.

אז איפה נמצאים כל המספרים האינפיניטסימלים האלה? לשם כך נגדיר מערכת מספרים חדשה: $\mathbb{R}^*$ - המספרים **ההיפר-ממשיים**. $\mathbb{R}^*$ היא קבוצה שמכילה את $\mathbb{R}$, ויש לה תכונות דומות מאוד לאלה של $\mathbb{R}$, אך בניגוד לקבוצת הממשיים, $\mathbb{R}^*$ מכילה גם מספרים אינפיניטסימליים.

❗ המספרים האינפיניטסימלים אינם שייכים ל- $\mathbb{R}$ (למעט אפס).

כעת המטרה היא להפוך את כל הדיון שעשינו לתיאוריה פורמלית.

בקורס הנוכחי ניעזר בשלושה עקרונות המקשרים בין $\mathbb{R}$ לבין $\mathbb{R}^*$.

- אנו נתייחס לעקרונות אלה כאל **אקסיומות**.

העיקרון הראשון הוא עיקרון שנותן לנו את המספרים ההיפר-ממשיים, ומרחיב את הפונקציות הממשיות למספרים אלה.

עקרון ההרחבה – Extension Principle

1. המספרים הממשיים הם תת-קבוצה של המספרים ההיפר-ממשיים, ויחס הסדר $x < y$ של המספרים הממשיים הוא תת-קבוצה של יחס הסדר של המספרים ההיפר-ממשיים.
2. קיים מספר היפר-ממשי שגדול יותר מאפס וקטן יותר מכל מספר ממשי חיובי.
3. לכל פונקציה ממשית f מתאימה פונקציה היפר-ממשית f^* , שנקראת "ההרחבה הטבעית של f ".

הסבר:

חלק 1 אומר, למעשה, ש- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$, ושהמספרים הממשיים מסודרים שם באותו הסדר.

חלק 2 אומר שקיים לפחות אינפי חיובי אחד, ובכך מבטיח שיש מספרים היפר-ממשיים שאינם ממשיים. כלומר: $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$.

חלק 3 מאפשר לנו להפעיל פונקציות ממשיות על מספרים היפר-ממשיים.

למשל: אפשר לחשב $\cos(\varepsilon)$ עבור אינפי' כלשהו ε .

- כעת, משיש לנו את המספרים ההיפר-ממשיים, וניתן אפילו להפעיל עליהם פונקציות ממשיות, נשאלת השאלה: מה הפונקציות האלה עושות ל- $\mathbb{R}^*$? למשל, מה זה $\varepsilon + 2\varepsilon$?

עקרון ההעברה – Transfer Principle

כל טענה ממשית (real statement) המתקיימת עבור פונקציות ממשיות כלשהן, מתקיימת גם עבור ההרחבה הטבעית שלהן.

[רק בעל-פה] ננסה להבין מהי "טענה ממשית". בגדול, טענה ממשית היא שילוב של אי-שוויונים ומשוואות במספרים ממשיים, של זהויות (אלגבריות, טריגונומטריות...), של טענות האומרות אם ביטוי מוגדר או לא, ושל המבנים הלוגיים הסטנדרטיים (או, וגם, טענות תנאי).

דוגמאות לטענות ממשיות

1. חוק הקומוטטיביות של חיבור: לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים: $x + y = y + x$.

2. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < x < y$ אז $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

3. לכל $x \in \mathbb{R}$ הביטוי $\frac{x}{0}$ אינו מוגדר.

4. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

5. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < x < 1$ אז $0 < x^2 < x$.

- עקרון ההעברה אומר לנו שטענות אלה נכונות גם עבור מספרים היפר-ממשיים. למשל:

לכל $x \in \mathbb{R}^*$ הביטוי $\frac{x}{0}$ אינו מוגדר.

לכל $x, y \in \mathbb{R}^*$ מתקיים: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

לכל ε אינפי' מתקיים: $\varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$.

- עקרון ההרחבה אומר שקיים לפחות אינפי' חיובי אחד, נקרא לו ε . כלומר $0 < \varepsilon < 1$.

עקרון ההעברה מאפשר לנו ליצור אינפני חדשים. למשל, לפי עקרון ההעברה מתקיים: $0 < \varepsilon^2 < \varepsilon$ ולכן גם ε^2 הוא אינפי. באופן דומה אפשר ליצור מספרים אינפני נוספים.

❗ שימו לב! לפי הבניה של $\mathbb{R}^*$ ניתן לראות שיש בו אינסוף מספרים אינפניטסימלים שונים!

• שאלה: איזה עוד מספרים יש ב- $\mathbb{R}^*$?

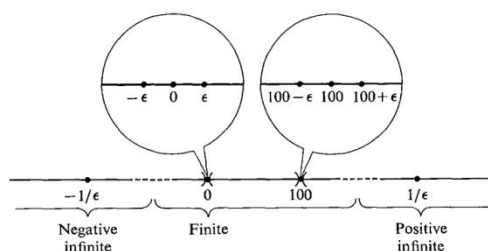
הגדרה

מספר היפר-ממשי b נקרא:

- א. **סופי** אם b נמצא בין שני מספרים ממשיים;
- ב. **אינסופי חיובי** אם b גדול יותר מכל מספר ממשי (חיובי);
- ג. **אינסופי שלילי** אם b קטן יותר מכל מספר ממשי (שלילי).

❗ שימו לב:

1. כל מספר אינפניטסימלי הוא מספר סופי.
2. כל מספר ממשי הוא מספר סופי.



❗ שימו לב:

מספרים סופיים מתחלקים ל-2: ממשיים ולא ממשיים. כלומר, $\mathbb{R}$ מוכל כולו בחלק הסופי. האינפניטסימלים (השונים מאפס) נמצאים בחלק הלא ממשי.

• לתת מספר דוגמאות למספרים: $\frac{1}{\varepsilon}, 5 + \varepsilon, -2 - 2\varepsilon, \dots$

כעת נרצה לנסח רשימה של כללים שיעזרו לנו לקבוע אם מספר מסויים הוא סופי שאינו אינפי, אינפי או אינסופי.

לפני שננסח את הרשימה המלאה, נתבונן בקרוב באחד מהכללים.

טענה

אם ε אינפֿי חיובי, אזי $\frac{1}{\varepsilon}$ הוא מספר אינסופי חיובי.

הוכחה: יהי $0 < r \in \mathbb{R}$ וצ"ל כי $r < \frac{1}{\varepsilon}$.

מכיון ש- $\varepsilon > 0$ הוא אינפֿי, מתקיים $0 < \varepsilon < \frac{1}{r}$. לכן, לפי עקרון ההעברה, מתקיים:

$$0 < r < \frac{1}{\varepsilon}$$

מש"ל

כללים עבור מספרים אינפֿיניטסימלים, סופיים ואינסופיים – לגזור ולשמור!

יהיו ε, δ אינפֿיניטסימלים; יהיו b, c מספרים היפר-ממשיים סופיים שאינם אינפֿי ויהיו H, K מספרים היפר-ממשיים אינסופיים. אזי:

5. מכפלה: - $\varepsilon\delta, \varepsilon b$ הם אינפֿי - bc הוא סופי שאינו אינפֿי - HK, Hb הם אינסופיים 6. מנה: - $\frac{\varepsilon}{H}, \frac{b}{H}, \frac{\varepsilon}{b}$ הם אינפֿי - $\frac{b}{c}$ הוא סופי שאינו אינפֿי - $\frac{H}{b}, \frac{H}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon}$ הם אינסופיים (בהנחה כי $\varepsilon \neq 0$) 7. שורשים: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: - אם $\varepsilon > 0$ אזי $\sqrt[n]{\varepsilon}$ הוא אינפֿי - אם $b > 0$ אזי $\sqrt[n]{b}$ הוא סופי שאינו אינפֿי - אם $H > 0$ אזי $\sqrt[n]{H}$ הוא אינסופי	1. מספרים ממשיים: - כל מספר ממשי הוא סופי - האינפֿיניטסימל הממשי היחיד הוא אפס 2. מספרים נגדיים: - $(-\varepsilon)$ הוא אינפֿיניטסימל - $(-b)$ הוא סופי שאינו אינפֿי - $(-H)$ הוא אינסופי 3. מספרים הופכיים: - אם $\varepsilon \neq 0$ אזי $\frac{1}{\varepsilon}$ הוא אינסופי - $\frac{1}{b}$ הוא סופי שאינו אינפֿי - $\frac{1}{H}$ הוא אינפֿי 4. סכום: - $\varepsilon + \delta$ הוא אינפֿי - $b + \varepsilon$ הוא סופי שאינו אינפֿי - $b + c$ הוא סופי (יכול להיות אינפֿי) - $H + b, H + \varepsilon$ הם אינסופיים
--	--

❗ שימו לב שלא נתנו כללים עבור ביטויים מהצורה $H\varepsilon$, $H + K$, $\frac{\varepsilon}{\delta}$, $\frac{H}{K}$. הסיבה היא שהם ביטויים בלתי מוגדרים, ולכן יכולים להיות אינפי, סופיים שאינם אינפי או אינסופיים (יש לשפוט כל מקרה לגופו).

דוגמאות לביטויים לא מוגדרים

1. מנה של אינפיניטסימלים:

$$\text{אינפי} \quad \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon \quad -$$

$$\text{סופי שאינו אינפי} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1 \quad -$$

$$\text{אינסופי} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} \quad -$$

2. מנה של אינסופיים:

$$\text{אינפי} \quad \frac{H}{H^2} = \frac{1}{H} \quad -$$

$$\text{סופי שאינו אינפי} \quad \frac{H}{H} = 1 \quad -$$

$$\text{אינסופי} \quad \frac{H^2}{H} = H \quad -$$

3. מכפלת אינסופי באינפי: (הראתי רק את זה. את 1 ו-4 הם רואים בתרגול).

$$\text{אינפי} \quad H \cdot \frac{1}{H^2} = \frac{1}{H} \quad -$$

$$\text{סופי שאינו אינפי} \quad H \cdot \frac{1}{H} = 1 \quad -$$

$$\text{אינסופי} \quad H^2 \cdot \frac{1}{H} = H \quad -$$

4. סכום של אינסופיים:

$$\text{אינפי} \quad H + (-H) = 0 \quad -$$

$$\text{סופי שאינו אינפי} \quad (H + 1) + (-H) = 1 \quad -$$

$$\text{אינסופי} \quad H + H = 2H \quad -$$

כעת נראה איך מיישמים את הכללים שניסחנו. (לא הספקתי, עובר להרצאה 3)

דוגמאות

$$1. \frac{b-4\varepsilon}{c+2\delta}$$

$$2. \varepsilon \neq 0, \frac{5\varepsilon^4-7\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$3. \varepsilon \neq 0, \frac{2\varepsilon^3-5\varepsilon^2+\varepsilon}{\varepsilon^2+\varepsilon}$$

$$4. \varepsilon \neq 0, \frac{4\varepsilon^4+\varepsilon}{\varepsilon^3+\varepsilon^2}$$

$$5. \frac{2H^2-3H}{H^2-2}$$

הרצאה מס' 3

[כדאי להזכיר להם בציור את סוגי המספרים ההיפר-ממשיים שהכרנו.]

דוגמאות (את אלה שלא הספקתי בשיעור הקודם)

הערה:

לפעמים נשתמש במושג
"משמעותי" על מנת לציין מספר
סופי שאינו אינפי'.

$$1. \frac{b-4\varepsilon}{c+2\delta}$$

$$2. \varepsilon \neq 0, \frac{5\varepsilon^4 - 7\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$3. \varepsilon \neq 0, \frac{2\varepsilon^3 - 5\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \varepsilon}$$

$$4. \varepsilon \neq 0, \frac{4\varepsilon^4 + \varepsilon}{\varepsilon^3 + \varepsilon^2}$$

$$5. \frac{2H^2 - 3H}{H^2 - 2}$$

בהרצאה הקודמת דיברנו על פעולות במספרים ההיפר-ממשיים. כעת ננסח משפט המדבר על יחסי הסדר בין הסוגים השונים של מספרים ב- $\mathbb{R}^*$.

משפט

1. כל מספר היפר-ממשי שנמצא בין שני מספרים אינפיניטסימלים הוא אינפיניטסימל.
2. כל מספר היפר-ממשי שנמצא בין שני מספרים היפר-ממשיים סופיים הוא סופי.
3. כל מספר היפר-ממשי שגדול ממספר אינסופי חיובי כלשהו, הוא מספר אינסופי חיובי.
4. כל מספר היפר-ממשי שקטן ממספר אינסופי שלילי כלשהו, הוא מספר אינסופי שלילי.

הוכחה

נוכיח רק את 1. ו-4. והשאר תרגיל בית!

1. יהי $a \in \mathbb{R}^*$ מספר היפר-ממשי עבורו קיימים שני אינפיניטסימלים $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^*$ כך ש-
 $\varepsilon < a < \delta$. יש להוכיח כי a הוא אינפיניטסימל.
יהי $0 < r \in \mathbb{R}$. צריך להוכיח כי $-r < a < r$.
מכיון ש- ε, δ הם אינפי', מתקיים: $-r < \varepsilon < a < \delta < r$.

4. יהי $a \in \mathbb{R}^*$ מספר היפר-ממשי עבורו קיים מספר אינסופי שלילי $H \in \mathbb{R}^*$ המקיים:
 $a < H$. יש להראות ש- a הוא אינסופי שלילי.

יהי $r \in \mathbb{R}$ וצריך להוכיח ש- $a < r$. אבל, מהגדרת מספר אינסופי שלילי, מתקיים
 $H < r$ ולכן, לפי כלל המעבר, מתקיים $a < r$ כנדרש.

מש"ל

מסקנה

אם H, K הם אינסופיים חיוביים, אזי $H + K$ הוא אינסופי חיובי, שכן $H < H + K$.
 ואם H, K הם אינסופיים שליליים, אזי $H + K$ הוא אינסופי שלילי, שכן $H + K < H$.

תרגילונים לסיום התת-פרק הזה:

1. הראו שאם H הוא אינסופי חיובי, אזי $\sqrt{H+1} - \sqrt{H-1}$ הוא אינפי.
2. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ונתבונן בביטוי $\frac{aH^3 + 5H}{2H - bH^3}$. עבור אילו ערכי a, b הביטוי הוא סופי
 שאינו אינפי/אינסופי/אינפי?

כעת נעבור לדבר על העיקרון השלישי של המספרים ההיפר-ממשיים:

עקרון החלק הסטנדרטי – Standard Part Principle

לפני שנוכל לנסח את העיקרון, יש צורך בהגדרה חשובה נוספת.

הגדרה

יהיו $b, c \in \mathbb{R}^*$ שני מספרים היפר-ממשיים. נאמר ש- b **קרוב אינסופית ל- c** אם ההפרש
 $b - c$ הוא מספר אינפיניטסימלי. נסמן: $b \approx c$.

למשל: אם ε אינפי, אז $5 + \varepsilon \approx 5$, $1.5 + \varepsilon \approx 1.5$, $2\varepsilon^2 \approx 0$.

הערות:

1. לכל $b \in \mathbb{R}^*$ ולכל $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ אינפי מתקיים: $b \approx b + \varepsilon$.
2. $b \in \mathbb{R}^*$ הוא אינפי אם ורק אם $b \approx 0$.
 הסבר:
 כיוון ראשון: אם b אינפי, אז גם $b - 0$ אינפי, ולכן $b \approx 0$.
 כיוון שני: אם $b \approx 0$ אזי $b - 0$ הוא אינפי ולכן b אינפי.
[חשוב!] מעכשיו זה יהווה עבורנו סימון מקוצר למספר אינפי.
3. **[חשוב!]** אם $b, c \in \mathbb{R}$ ו- $b \approx c$ אזי $b = c$. (מדוע?)

כעת נדון במספר תכונות של היחס $\approx$.

משפט 1

היחס $\approx$ הוא יחס שקילות על $\mathbb{R}^*$, כלומר, לכל $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ מתקיים:

1. היחס רפלקסיבי: $a \approx a$.
2. היחס סימטרי: אם $a \approx b$ אז $b \approx a$.
3. היחס טרנזיטיבי: אם $a \approx b$ וגם $b \approx c$, אזי $a \approx c$.

הוכחה

1. ההפרש $a - a$ הוא אינפי ולכן $a \approx a$.
2. אם $a \approx b$ אזי $a - b$ הוא אינפי ולכן גם $-(a - b)$ הוא אינפי. אבל $-(a - b) = b - a$ ולכן $b - a$ אינפי ומכאן $b \approx a$.
3. אם $a \approx b$ אזי $a - b$ הוא אינפי; אם $b \approx c$ אזי $b - c$ הוא אינפי; לכן: $a - c = (a - b) + (b - c)$ הוא אינפי, כסכום של שני אינפי.

מש"ל

משפט 2

נניח ש- $a \approx b$. אזי:

1. אם a אינפי אז b אינפי.
2. אם a סופי אז b סופי.
3. אם a אינסופי אז b אינסופי.

הוכחה

1. מכיוון ש- $a \approx b \wedge a \approx 0$ נקבל $b \approx 0$ (לפי משפט 1, סעיף 3).
2. אם $a \approx b$ אזי קיים אינפי ε עבורו $a - b = \varepsilon$. לכן $b = a - \varepsilon$ ומכאן b סופי.
3. בדומה לסעיף הקודם.

מש"ל

❗ לפעמים המספרים הממשיים נקראים "**מספרים סטנדרטיים**" (ביחס למספרים ההיפר-ממשיים), ואולי זו הסיבה שאנו נותנים את השם "**החלק הסטנדרטי של b** " למספר הממשי הקרוב אינסופית ל- b .

- למשל, החלק הסטנדרטי של $5 + \varepsilon$ הוא 5.

העיקרון השלישי שלנו טוען שלכל מספר **סופי** יש חלק סטנדרטי.

עקרון החלק הסטנדרטי

כל מספר היפר-ממשי סופי קרוב אינסופית למספר ממשי אחד ויחיד.

הגדרה

יהי $b \in \mathbb{R}^*$ מספר סופי. **החלק הסטנדרטי של b** הוא המספר הממשי הקרוב אינסופית ל- b .

נסמן: $\text{st}(b)$.

❗ שימו לב: בסימונים החדשים כל מספר סופי $b \in \mathbb{R}^*$ מקיים: $b \approx \text{st}(b)$.

❗ לפי משפט 2, למספרים אינסופיים אין חלק סטנדרטי (מדוע?).

תכונות (אשר נובעות מההגדרה)

יהיו $a, b \in \mathbb{R}^*$ שני מספרים היפר-ממשיים סופיים. אזי:

1. $\text{st}(b) \in \mathbb{R}$.
2. קיים $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ אינפי כך ש- $b = \text{st}(b) + \varepsilon$ (או: קיים $\delta \in \mathbb{R}^*$ אינפי $\text{st}(b) = b + \delta$).
3. אם $b \in \mathbb{R}$ אזי $\text{st}(b) = b$.
4. אם $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ אינפי, אזי $\text{st}(\varepsilon) = 0$.
5. $a \approx b$ אם ורק אם $\text{st}(a) = \text{st}(b)$.

הסבר לכיוון הפחות טריוויאלי: $\text{st}(a) \approx a \approx b \approx \text{st}(b)$ ולכן $\text{st}(a) \approx \text{st}(b)$ ולפי

הערה קודמת (סעיף 3) זה אומר ש- $\text{st}(a) = \text{st}(b)$.

כעת המטרה שלנו היא ללמוד לחשב את החלק הסטנדרטי.

משפט – תכונות החלק הסטנדרטי – לגזור ולשמור!

יהיו $a, b \in \mathbb{R}^*$ שני מספרים היפר-ממשיים סופיים. אזי:

5. אם $st(b) \neq 0$ אז $st\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{st(a)}{st(b)}$ 6. לכל $n \in \mathbb{N}$: $st(a^n) = (st(a))^n$ 7. אם $a \geq 0$ אז $st(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{st(a)}$ 8. אם $a \leq b$ אזי $st(a) \leq st(b)$	1. $st(-a) = -st(a)$ 2. $st(a + b) = st(a) + st(b)$ 3. $st(a - b) = st(a) - st(b)$ 4. $st(a \cdot b) = st(a) \cdot st(b)$
---	---

הוכחה (חלקית)

1. קיים $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ אינפי עבורו $st(-a) = -a + \varepsilon$. כלומר: $-st(-a) = a - \varepsilon \approx a \approx st(a)$.
ולכן $-st(-a) \approx st(a)$. מכיון ששניהם ממשיים מתקיים: $-st(-a) = st(a)$ וזה מוכיח את הדרוש.

2. קיימים $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ אינפי כך ש- $st(a) = a + \varepsilon$, $st(b) = b + \delta$. לכן,
 $st(a) + st(b) = a + \varepsilon + b + \delta = (a + b) + (\varepsilon + \delta) \approx a + b \approx st(a + b)$. מכיון ש-
 $st(a) + st(b)$, $st(a + b)$ הם ממשיים, נקבל את הדרוש.
3. כמו 2.

4. קיימים $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ אינפי כך ש- $st(a) = a + \varepsilon$, $st(b) = b + \delta$. מתקיים:
 $st(a)st(b) = (a + \varepsilon)(b + \delta) = ab + a\delta + b\varepsilon + \varepsilon\delta \approx ab \approx st(ab)$. מכיון ש-
 $st(a)st(b)$, $st(ab) \in \mathbb{R}$ נקבל את הדרוש.

5. לפי 4. מתקיים: $st\left(\frac{a}{b}\right)st(b) = st\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = st(a)$.

6. מדלגים כי דורש אינדוקציה.

7. מדלגים כי דורש אינדוקציה.

8. קיימים $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ אינפי כך ש- $st(a) = a + \varepsilon$, $st(b) = b + \delta$. **נניח בשלילה** כי

$st(a) > st(b)$. אזי $a + \varepsilon > b + \delta$ ולכן $a - b > \delta - \varepsilon$. מכיון ש- $a - b \leq 0$ לפי

הנתון) נקבל: $0 \geq a - b > \delta - \varepsilon$. כלומר, $a - b$ נמצא בין שני מספרים אינפיניטסימלים, ולכן הוא אינפיניטסימל. לכן, לפי ההגדרה של קרובים אינסופית, מתקיים $a \approx b$ ומכאן $st(a) = st(b)$, **בסתירה להנחה**.

מש"ל

הרצאה מס' 4

בהרצאה האחרונה ניסחנו כללים עבור החלק הסטנדרטי, וכעת נראה מספר דוגמאות חישוב.

דוגמאות

בכל אחד מהסעיפים חשבו, אם ניתן, את $st(a)$, כאשר $\varepsilon, \delta, \Delta x \in \mathbb{R}^*$ הם אינפ'י, ו- $H \in \mathbb{R}^*$ הוא אינסופי חיובי.

$$1. \quad a = 5\varepsilon - 2\delta + 1$$

$$2. \quad a = 2x\Delta x + x^2 + (\Delta x)^2 \quad \text{עבור } x \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad a = \left(\frac{\delta}{1+\varepsilon} \right)^2$$

$$4. \quad a = \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2-\Delta x}}$$

$$5. \quad a = \frac{\varepsilon+5}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

$$6. \quad a = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} \quad \text{עבור } x \in \mathbb{R}^*, x \neq 1 \text{ כך ש-} st(x) = 1$$

$$7. \quad a = \frac{2 - 5H^5}{H^5 + H^4 + 7}$$

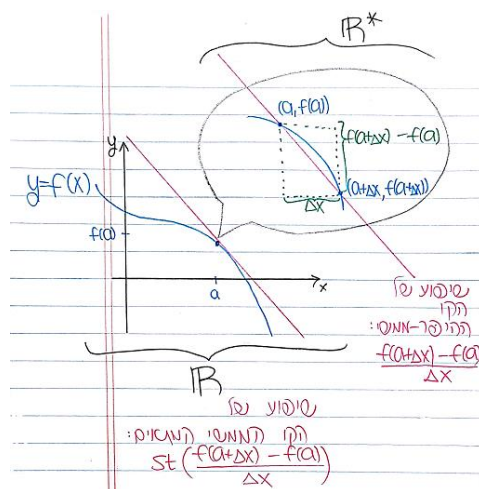
$$8. \quad a = \frac{\Delta x}{3 - \sqrt{9 - \Delta x}}$$

גזירה

בשלב זה נוכל להגדיר את המושג "שיפוע של עקומה".

תהי f פונקציה ממשיית ותהי $a \in \mathbb{R}$ נקודה בתחום ההגדרה של f . נרצה לחשב את השיפוע של f בנקודה a .

לשם כך, אנו עושים שינוי אינפיניטסימלי בציר ה- x ומגיעים לנקודה $a + \Delta x$ (כאשר $0 \approx \Delta x \neq 0$). השינוי המתאים בציר ה- y הוא $f(a + \Delta x) - f(a)$.



הגדרה

נאמר ש- m הוא **השיפוע** של f בנקודה a אם $m = \text{st} \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$ **לכל** $\Delta x \neq 0$ אינפי.

❗ הערה: $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ הוא השיפוע של הקו ההפר-ממשי בציר, והחלק הסטנדרטי שלו הוא השיפוע של העקומה.

דוגמה

נמצא את השיפוע של $f(x) = 3x - 1$ בנקודה $a = 2$.

יהי $\Delta x \neq 0$ אינפי. מתקיים:

$$m = \text{st} \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{3(2 + \Delta x) - 1 - (3 \cdot 2 - 1)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{6 + 3\Delta x - 6}{\Delta x} \right) = 3$$

- כעת, אם נתבונן בשיפוע של f בנקודה x כלשהי, נקבל **פונקציה חדשה של x** .

הגדרה

תהי f פונקציה ממשית. **הנגזרת** של f היא פונקציה ממשית f' שערכה ב- x הוא השיפוע של f ב- x . כלומר: $f'(x) = \text{st} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ בכל נקודה x בה השיפוע קיים.

- אם השיפוע של f בנקודה כלשהי a אינו קיים, אזי $f'(a)$ אינו מוגדר ואומרים ש- **f לא גזירה ב- a** .
- אם $f'(a)$ מוגדר אומרים ש- **f גזירה ב- a** (differentiable).
- התהליך שבו מחשבים את הנגזרת נקרא **גזירה** (differentiation).

דוגמה

נמצא את f' עבור $f(x) = x^2 - 1$.

יהי $\Delta x \neq 0$ אינפי. מתקיים:

$$\text{st} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{(x + \Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{\Delta x} \right) = \text{st} \left(\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right) = 2x$$

לכן $f'(x) = 2x$.

הערה על משתנים

הגדרה

משתנה הוא אות המייצגת מספר כלשהו, שנקרא "הערך של המשתנה".

אם ניתן לבטא את המשתנה y כפונקציה של המתשנה x , נאמר ש- y הוא **משתנה תלוי**, ואילו x הוא **משתנה בלתי תלוי**.

דוגמאות

במשוואה $y = x^2$, y הוא משתנה תלוי.

במשוואה $x = t^3 - 1$, t הוא משתנה בלתי תלוי, ואם נכתוב אחרת: $t = \sqrt[3]{x+1}$, אז נקבל שדווקא x הוא המתשנה הבלתי תלוי.

נתבונן כעת במשוואה $y = f(x)$. כאן y הוא משתנה תלוי ו- x הוא משתנה בלתי תלוי. נציג משתנה בלתי תלוי חדש Δx , ומשתנה תלוי חדש Δy : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Δy נקרא **שינוי (increment)** של y .

מבחינה גיאומטרית, Δy הוא שינוי בציר ה- y על הפונקציה שמתאים לשינוי Δx על ציר האיקס.

בסימונים החדשים: $f'(x) = y' = \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

דוגמה

נמצא את הנגזרת של $f(x) = x^3$.

בדוגמה זו ובדוגמאות הבאות: $x \in \mathbb{R}$, $\Delta x \neq 0$ אינפי.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x\Delta x + 3x^2 + (\Delta x)^2$$

מתקיים:

כעת נמצא את החלק הסטנדרטי, ונשים לב שהוא קיים ואינו תלוי ב- Δx :

$$f'(x) = \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 3x^2$$

גזירות ואי-גזירות

$$1. \text{ הנגזרת } f'(a) \text{ קיימת אם הביטוי } \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} :$$

א. מוגדר וסופי;

ב. יש לו אותו חלק סטנדרטי **לכל** $\Delta x \neq 0$ אינפי.

$$2. \text{ הנגזרת } f'(a) \text{ אינה קיימת בכל אחד מהמצבים הבאים:}$$

א. $f(a)$ אינו מוגדר;

ב. $f(a + \Delta x)$ אינו מוגדר עבור $\Delta x \neq 0$ אינפי כלשהו;

$$ג. \text{ קיים אינפי } \Delta x \neq 0 \text{ עבורו הביטוי } \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ הוא אינסופי;}$$

ד. לביטוי $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ יש חלקים סטנדרטיים שונים עבור אינפיניטסימלים

(שונים מאפס) שונים. כלומר $\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ תלוי באופן כלשהו ב- Δx .

דוגמה

נמצא את הנגזרת של $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\text{טיוטה: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

אנו רואים שכאשר $x < 0$ הביטוי $\sqrt{x}$ אינו מוגדר, ולכן הנגזרת אינה קיימת.

מה לגבי $x = 0$? במקרה זה הביטוי $\sqrt{0 + \Delta x}$ צריך להיות מוגדר ולכן צריך להתקיים $\Delta x > 0$. כלומר, קיים אינפני $\Delta x \neq 0$ עבורו הביטוי $f(0 + \Delta x)$ אינו מוגדר, ולכן הפונקציה אינה גזירה ב- $x = 0$.

כעת נניח כי $x > 0$ ונחשב את הנגזרת: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$ ולכן

$$\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

לסיכום: לכל $x > 0$ מתקיים: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

דוגמה

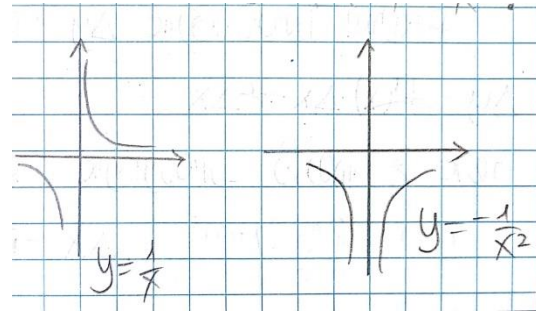
נחשב את הנגזרת של $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{מתקיים: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

ניתן לראות שעבור $x = 0$ הנגזרת לא קיימת, ולכן נניח כי $x \neq 0$ ונמשיך.

$$\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ולכן} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

לסיכום: לכל $x > 0$ מתקיים: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$



דוגמה

נמצא את הנגזרת של $f(x) = |x|$

$$\text{מתקיים: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

נפצל למקרים:

1. $x > 0$: שימו לב שבמקרה זה גם $x + \Delta x > 0$ (שכן $\Delta x > -x$). נקבל:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

כלומר, לכל $x > 0$ מתקיים: $f'(x) = 1$

2. $x < 0$: שימו לב שבמקרה זה גם $x + \Delta x < 0$ (שכן $\Delta x < -x$). נקבל:

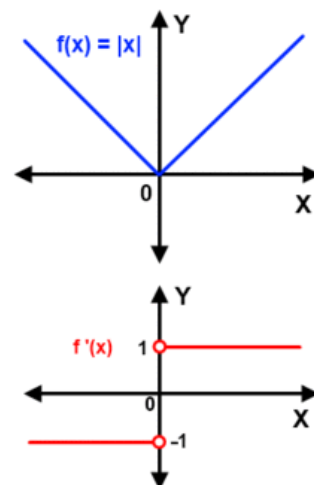
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -1$$

כלומר, לכל $x < 0$ מתקיים: $f'(x) = -1$

3. $x = 0$: במקרה זה מתקיים: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \Delta x > 0 \\ -1 & \Delta x < 0 \end{cases}$ ולכן הנגזרת בנקודה

$x = 0$ אינה קיימת (שכן החלק הסטנדרטי תלוי ב- Δx).

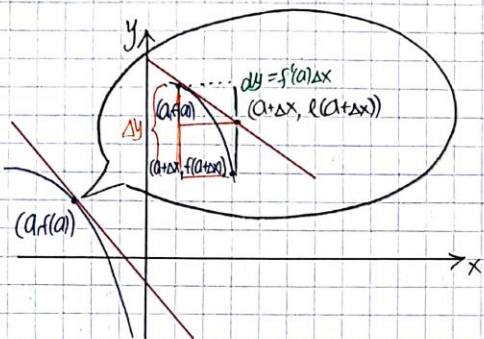
$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{undefined} & x = 0 \end{cases} \quad \text{לסיכום:}$$



הרצאות מס' 5,6

3. ציון (הקצמה רצונית יא)

נתבונן בעקומה פשוטה $y=f(x)$
 שיש לה נשיק בנק' $x=a$
 ונזכיר $\sigma_x \approx 0$ את



נחשב שיוני כצד y .

10) צל (יִסְלַח) / (יִסְלַח) / (יִסְלַח) :

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

פ) צד המשיק:

$$l(a+\Delta x) - l(a) =$$

$$f'(a)(a+\Delta x - a) + f(a) - (f'(a)(a-a) + f(a)) =$$

$$f'(a) \Delta x$$

• פאונדיר העצרת פונק' $x=a$ ק"מ

יש קשר (הדוק) בין שני הצדדים.
הנ"ל.

(Increment Theorem) $\Delta \text{Time} = \Delta \text{Space}$

רעיון $y=f(x)$ עקומה ונניח שמתקדשה

כִּשְׁלוֹי x הוֹשֵׁט $f'(x)$ קו"מ.

י' ד' איוניס'ס'נ'ל. צ'י:

Δy הוא אינפיניטסימל ו'אמה נקד':

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

עבודת ע אינפ' פונקטן וואו פ-ח

(f) . DX-21

5' ON תחבול

צֵיטָה רֵנְזִיכָל וְהוּסָר הַמַּעֲשִׂי

משפחה:

$\ell(x)$ פיק

שימוע מ שעוסק בק' (h, a) ,

לענין תשובה:

$$l(x) = m(x-a) + b$$

מזל

תמו $y=f(x)$ עקומה כד:

שטנקיזד, $(a, f(a))$ פאונט

REIN $f'(a)$ y. b. b. b.

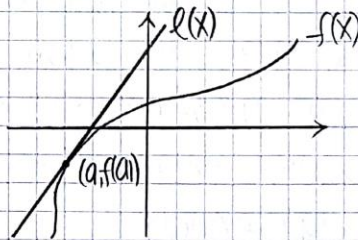
כלי הישר המשיך לעקוב

פנקודה $(a, f(a))$ הוא ישר

שעור 6 - $(a, f(a))$ ונסיים

 $f'(a)$

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a) : \text{מיתר}$$



17N213

נמצא את משוואת הישר

המשקל $y = \sqrt{x}$

סנקוויז (4,2)

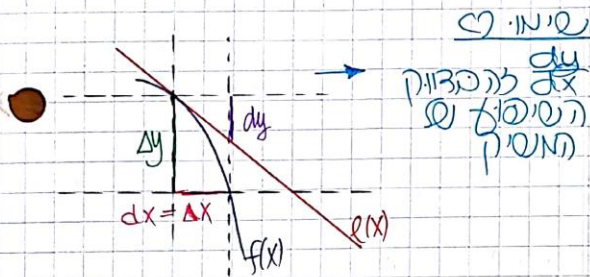
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad -0,1 \quad y'(1)$$

$\therefore \text{pf. } f'(4) = \frac{1}{4} \quad \text{QED}$

$$L(x) = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$

• כעת נבדוק כיצד ניתן אינטגרל את
השיעור של המשיק.
זוהי סך נכח משתנה תלוי חדש:
 dy

כאמור: $dy = f'(x) \Delta x$
זמן האחריות נכנס את המשתנה
 Δx כשם נוסף ל- Δx ולכן:
 $dy = f'(x) dx$



הצבה

יהי y משתנה תלוי ב- x , כאמור
 $y = f(x)$

(1) נציב x של x הוא המשתנה
הסתמי תלוי $\Delta x = dx$

(2) נציב y של y הוא המשתנה
התלוי המוכר באמצעות

$$dy = f'(x) dx$$

• כי $dx \neq 0$ dx נמצא לנתון
סימון של $\frac{dy}{dx} = f'(x)$
Leibniz (1646-1702) Lagrange (1736-1813)

ומעורבים בה יהיה הסימון של dx

• שימו לב: $\frac{dy}{dx} = \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$
שימו לב: 2: לאורו של dx , dy הוא אינפיניטסימלי
 $\frac{dy}{dx} \in \mathbb{R}$

המספר, למעשה, סופי שני
צורה חשבונית אחרת
העוקבות גבירה:

$$(1) \quad \Delta x \approx 0 \quad \Delta x \text{ אינפיניטסימלי}$$

(2) $\Delta x \approx 0$
כעת נבדוק שבה העוקבות
גבירה, המשיק וצורה

העוקבות קרובים

אינסופית אחד לנטי

ועכשיו נבדוק
אם זה נכון
ל- Δx

הוכחה

נבדוק המקרים

$$(A) \quad \Delta x = 0$$

אז $dy = 0$ ו- $dx = 0$

כמו כן:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

אז $\varepsilon = 0$

$$0 = f'(x) \cdot 0 + \varepsilon \cdot 0$$

$$(B) \quad \Delta x \neq 0$$

הנצחת דיווח, כאמור:

$$f'(x) = \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\varepsilon \approx 0$ עקרו

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon$$

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

כעת

אנחנו רוצים להראות ש- ε אינפיניטסימלי
אם Δx אינפיניטסימלי

(C)

• השימוש בדיפרנציאל אסימטוטי (הצטמק)
 הוא מאוד נפוץ, כי הוא מאפשר
 אותה הכתיבה המיקוצית:
 עבור $y=f(x)$, במקום לכתוב dy
 אפשר לכתוב ישירות $d(f(x))$.

דוגמה

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$d(2x+1) = 2dx$$

פוסט:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

כאשר $\Delta x \neq 0$

• בעת המעבר של Δx ל- dx (הוא קטן)
 צריך שבאמצעות dx נכיל לצבור
 שונותיות מורכבות ולא שינויים
 זעירים.

למשל, צי קשר $f(x) = \frac{(2x-x^2)^5}{2x^2+1}$ (כאן)
 ונראה מצאנו דרך פשוטה יותר.

③

דוגמה

חישוב דיפרנציאל כאשר
 הצטמק קטן ידוע:

$$\textcircled{1} y = x^3, dy = 3x^2 dx$$

$$\textcircled{2} y = \frac{1}{x}, dy = -\frac{1}{x^2} dx \quad (x \neq 0)$$

$$\textcircled{3} y = \sqrt{x}, dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad (x > 0)$$

$$\textcircled{4} y = |x|, dy = \begin{cases} dx & x > 0 \\ -dx & x < 0 \\ \text{אין} & x = 0 \end{cases}$$

דוגמה חישוב דיפרנציאל

$$y = 2x + 1 \quad \textcircled{1}$$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x) + 1 - (2x + 1) = 2\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow$$

$$dy = 2dx \quad \left(\frac{dy}{dx} = 2 \right)$$

$$z = x^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2x + \Delta x \Rightarrow f'(x) = \frac{dz}{dx} = 2x$$

$$dz = 2x dx$$

$$z = 4y^2 \quad \textcircled{3}$$

$$\Delta z = 4(y + \Delta y)^2 - 4y^2 =$$

$$8y\Delta y + (\Delta y)^2$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = 8y + \Delta y \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dy} = 8y \Rightarrow dz = 8y dy$$

$$y = su \quad \textcircled{4}$$

$$\Delta y = s(u + \Delta u) - su = s\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = s \Rightarrow dy = s du$$

$$\left(\frac{dy}{du} = s \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = St\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = b$$

שני

דוגמה

הפונקציה של $5x+8$ היא:

$$\frac{d(5x+8)}{dx} = 5$$

אסטרטגיה - פונקציה של קבוע

י"י $(\in \mathbb{R})$ קבוע נשקל: אז:

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

אסטרטגיה - כלל המכנה

תהייה u ו- v פונקציות של x , אז:

כל x של x בקירוב תגזיר:

$$\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \text{ גזירות, מתק"פ:}$$

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

הוכחה

$$y = g(x) + h(x) \quad \therefore u = g(x), v = h(x)$$

יהי $0 \neq \Delta x \approx 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - (g(x) + h(x))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = St\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

הערה: תוצאת המכנה
מכיוון ששתי הנגזרות
הן "7"

$$\frac{d(x^2+x^3)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(x^3)}{dx} = 2x + 3x^2$$

נגזרות של פונקציות
רציונליות

הגדרה

① יהיו $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. ביטוי ליניארי

הוא ביטוי מרצב: $a_1x + a_0$

② יהיו $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ו- $n \geq 0$

פולינום מדרגה n במשתנה x

הוא ביטוי מרצב:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

③ ביטוי רציונלי במשתנה x

הוא ביטוי המהגזר x -

וממספרים ממשיים באמצעות

ו פעולות חשבון: חיבור,

חסר, כפל וחילוק.

דוגמה

$$-x-19, 2x+5 \quad ①$$

$$5x^2-9, 3x^4-2x^2+1 \quad ②$$

$$\frac{(x-2)^5(9x-1)}{3(x+2)}, \frac{2x-5}{1-\frac{1}{2x-5}} \quad ③$$

אסטרטגיה - פונקציה של פונקציה ליניארית

$$\frac{d(bx+c)}{dx} = b$$

הוכחה

נסמן $y = bx+c$ יהי $0 \neq \Delta x \approx 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b(x+\Delta x) + c - (bx+c)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{b\Delta x}{\Delta x} = b$$

④

דוגמה

$$\frac{d(8x^3)}{dx} = 8 \frac{d(x^3)}{dx} = 8 \cdot 3x^2 = 24x^2$$

הכרחי מן G

אנשים - הכרחי (כפי שזכרנו)

תהייה u, v פונקציות של x . סכום

ערך של x שעבורו הנגזרות

$\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ קיימות, אז יהיה:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

הוכחה

יהי $y = uv$ ונניח $u = g(x), v = h(x)$

כאשר $y = g(x)h(x)$ ויהי $0 \neq \Delta x \approx 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - g(x)h(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \frac{uv + u\Delta v + v\Delta u - uv + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

הנגזרת $g'(x) = \frac{du}{dx}$ קיימת וכן $h'(x) = \frac{dv}{dx}$

לפי משפט השני

הנגזרת $\frac{dv}{dx}$ קיימת וכן $\frac{\Delta v}{\Delta x} \approx 0$

אז $\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \approx 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

שני

משפט

תהייה $u_1, \dots, u_n$

פונקציות של x . אז

ערך של x עבורו הנגזרות

$$\frac{du_1}{dx}, \dots, \frac{du_n}{dx}$$

קיימות, אז יהיה:

$$\frac{d(u_1 + \dots + u_n)}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$$

משפט - כפי שהקדמנו

תהי u פונקציה של x

ויהי $c \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו.

אז x עבורו הנגזרת

$\frac{du}{dx}$ קיימת, אז יהיה:

$$\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}$$

הוכחה

נניח $y = cu$

כאשר $u = g(x)$

ויהי $0 \neq \Delta x \approx 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c(g(x+\Delta x)) - cg(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{c(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= c \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(c \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = c \frac{du}{dx}$$

שני

דוגמה

$$\frac{d((2x-1)^3)}{dx} = 3(2x-1)^2 \frac{d(2x-1)}{dx} = 3(2x-1)^2 \cdot 2$$

משפט

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} \quad (1)$$

$$\frac{d(a_n x^n + \dots + a_0)}{dx} = n \cdot a_n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1 \quad (2)$$

לפי שזכרנו על גזירת שברים, נזכיר אינך שימושית.

דוגמה - גזירת $\frac{1}{x}$

יהי v פונקציה של x אצלנו עדיין של x שנקווה $v \neq 0$ וזה גזרת:

$\frac{dv}{dx}$ קיימת, מתקיים:

$$\frac{d(\frac{1}{v})}{dx} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

הוכחה

נניח $v = g(x)$ ויהי $y = \frac{1}{v} = \frac{1}{g(x)}$ ויהי:

$0 \neq \Delta x \approx 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x) g(x+\Delta x)} = \\ &= \frac{-\Delta v}{\Delta x \cdot v \cdot (v+\Delta v)} = \frac{-1}{v(v+\Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

שני

דוגמה

$$\begin{aligned} \frac{d(2x \cdot x^3)}{dx} &= 2x \frac{d(x^3)}{dx} + x^3 \frac{d(2x)}{dx} = \\ &= 2x \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 2 = \\ &= 6x^3 + 2x^3 = 8x^3 \end{aligned}$$

משפט - כל פונקציה (אנטי-גרדיאנט)

יהי u פונקציה של x ויהי $\frac{du}{dx}$ קיימת, אז עדיין של x שנקווה $u \neq 0$ וזה גזרת:

$\frac{d(u^n)}{dx}$ קיימת, מתקיים:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

הוכחה

נניח $u = g(x)$ ויהי $y = u^n = (g(x))^n$ ויהי:

$$\frac{d(u)}{dx} = 1 \cdot u^0 \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}$$

הנחת (אנטי-גרדיאנט) $k \neq 0$:

$$\frac{d(u^k)}{dx} = ku^{k-1} \frac{du}{dx}$$

של $k \neq 0$ (אנטי-גרדיאנט) $k \neq 0$:

$$\frac{d(u^{k+1})}{dx} = (k+1)u^k \frac{du}{dx} \quad (3)$$

וכן:

$$\begin{aligned} \frac{d(u^{k+1})}{dx} &= \frac{d(u \cdot u^k)}{dx} = u \frac{d(u^k)}{dx} + u^k \frac{du}{dx} \\ &= u \cdot ku^{k-1} \frac{du}{dx} + u^k \frac{du}{dx} \\ &= (k+1)u^k \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

שני

תהי u פונקציה של x ויהי χ
 $\psi \in \mathcal{S}'$ של χ . אזי, $\chi \cdot \psi$
 פונקציה $u \neq 0$ (והוא צמוד) $\frac{du}{dx}$
 קיימת, מתקיים:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$m \in \mathbb{N}$ $p \in \mathbb{Z}$ $p \leq 0$ $p \leq 0$ n
 $n = -m$ $n \leq 0$

: 571 $y = u^p = u^{-m} = \frac{1}{u^m}$ 1201

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{u^m}\right)}{dx} \stackrel{\text{INT}}{=} \frac{-1}{(u^m)^2} \frac{d(u^m)}{dx} =$$

$$= \frac{-1}{u^{2m}} \cdot m \cdot u^{m-1} \frac{du}{dx} =$$

$$= -m u^{-m-1} \frac{du}{dy} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

5

TEINT

$$\frac{d(x^{-5})}{dx} = -5x^{-6} \frac{dx}{dx} = \frac{-5}{x^6}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2x+1}\right)}{dx} = \frac{-1}{(2x+1)^2} \cdot \frac{d(2x+1)}{dx} = \frac{-1}{(2x+1)^2} \cdot 2$$

COON - 10000

תהייה u, v פונקציות
 $u, v \in C^1(\Omega)$ עדיף
 שנקוו: $v \neq 0$ ונתונה
 קבוצת, מתקיים:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

תוכן

∴ '51c. $y = \frac{u}{v}$ (NO)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u \cdot \frac{1}{v})}{dx} =$$

$$= u \cdot \frac{d(\frac{1}{v})}{dx} + \frac{1}{v} \frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{1}{v^2} \cdot u \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{-u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}}{v^2}$$

UN

Font

$$\frac{d\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)}{dx} = \frac{x^2 \frac{d(2x-1)}{dx} - (2x-1) \frac{d(x^2)}{dx}}{x^4}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4}$$

הרצאה מס' 7 – פונקציות הפיכות

הגדרה

תהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה ממשית של משתנה אחד (כאשר $X = D(f)$, $Y = \text{Im}(f)$). נאמר ש- f **הפיכה** אם קיימת פונקציה ממשית $g : Y \rightarrow X$ המקיימת את התכונה הבאה:
$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(f(x) = y \leftrightarrow x = g(y))$$

אם f הפיכה אז g הנ"ל היא יחידה והיא נקראת **ההופכית** של f .

מסמנים: $g = f^{-1}$.

כלומר, בתנאי למעלה ניתן לרשום: $f(x) = y \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

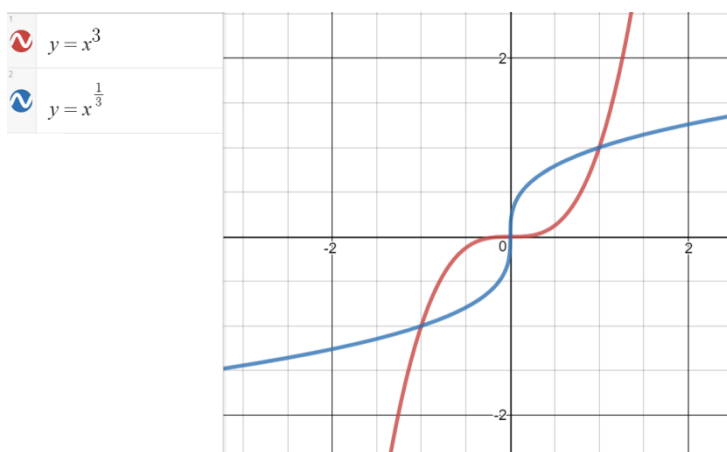
דוגמה

הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ היא הפיכה, וההופכית שלה היא $g(y) = \sqrt[3]{y}$. ואכן:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y = x^3 \leftrightarrow \sqrt[3]{y} = x)$$

(למשל: $f(2) = 8$, $g(8) = 2$).

נתבונן בגרפים של שתי הפונקציות $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (החלפנו את שני המשתנים ל- x כדי שנוכל לצייר את הפונקציות באותה מערכת צירים):



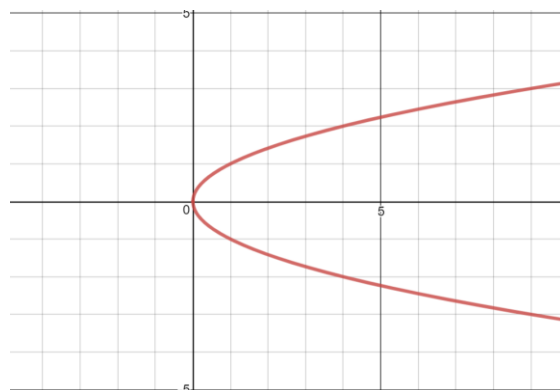
ניתן לראות ששני הגרפים הם שיקוף אחד של השני סביב $y = x$.

שימו לב: אם f הפיכה, אז גם ההופכית שלה f^{-1} היא הפיכה.

דוגמה

נתבונן בפונקציה $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

אם הפונקציה הייתה הפיכה, אז הגרף שלה היה צריך להיראות כך:



אך כזכור, הגרף הזה לא מתאר פונקציה. לכן $f(x) = x^2$ היא לא הפיכה.

נוכיח זאת אלגברית:

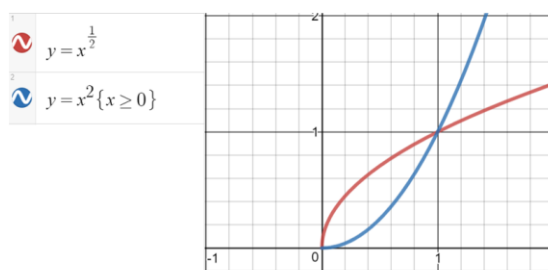
נניח בשלילה ש- f הפיכה. לכן קיימת לה פונקציה הופכית g המקיימת:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})(f(x) = y \leftrightarrow x = g(y))$$

לכן, בפרט, מתקיים:
$$\begin{cases} f(2) = 4 \Rightarrow g(4) = 2 \\ f(-2) = 4 \Rightarrow g(4) = -2 \end{cases}$$
 ורואים ש- g אינה פונקציה.

• עם זאת, הפונקציה $f(x) = x^2 : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ היא כן

הפיכה, וההופכית שלה היא $g(x) = \sqrt{x}$.



טענה

$f : X \rightarrow Y$ הפיכה אמ"מ לכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים: אם $x_1 \neq x_2$ אז $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[הוכחה: בתרגיל בית].

מסקנה שימושית

תהי $y = f(x)$ פונקציה הפיכה. אזי לכל $\Delta x \neq 0$ מתקיים $\Delta y \neq 0$.

הסבר:

לפי ההגדרה $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. נתון ש- $\Delta x \neq 0$ ולכן $x + \Delta x \neq x$ ומכאן

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$$

נגזרת של הפונקציה ההופכית

נתבונן בטבלה הבאה:

$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$x = g(y)$	$\frac{dx}{dy}$
$y = 5x$	5	$x = \frac{y}{5}$	$\frac{1}{5}$
$y = \frac{1}{x} (x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$	$x = \frac{1}{y}$	$-\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{(1/x)^2} = x^2$
$y = x^2 (x \geq 0)$	$2x$	$x = \sqrt{y}$	$\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x}$

משפט – נגזרת הפונקציה ההופכית

תהי $y = f(x)$ פונקציה הפיכה ונסמן ב- $x = g(y)$ את ההופכית שלה. אם הנגזרות

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ ו- } g'(y) = \frac{dx}{dy} \text{ קיימות ושונות מאפס, אז } f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\text{באופן שקול: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

הוכחה

נתבונן ב- $y = f(x)$. יהי $\Delta x \neq 0 \approx 0$ ויהי Δy השינוי המתאים בציר ה- y .
לפי משפט השינוי מתקיים $\Delta y \approx 0$ וכן, לפי המסקנה האחרונה, $\Delta y \neq 0$.

$$\text{כעת: } f'(x) = \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \text{ וכן } g'(x) = \text{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right).$$

$$\text{לכן } f'(x) \cdot g'(y) = \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = 1 \text{ ומכאן } f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \text{ כנדרש.}$$

מש"ל

דוגמה

$$\text{תהי } y = \sqrt[3]{5x+8} \text{ ונחשב } \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{מתקיים: } x = \frac{y^3}{5} - \frac{8}{5} \Leftrightarrow y^3 = 5x + 8 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{5x+8} \text{ ולכן } \frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{5}.$$

$$\text{לכן, לפי משפט הנגזרת של הפונקציה ההופכית, מתקיים} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{3y^2}{5}\right)} = \frac{5}{3y^2} = \frac{5}{3(\sqrt[3]{5x+8})^2}, \text{ וזאת לכל } x \neq -\frac{8}{5}.$$

דוגמה (כאן חייבים להשתמש במשפט)

$$\text{נחשב } \frac{dy}{dx} \text{ עבור } x = y^5 + y \text{ ונמצא את משוואת המשיק לעקומה זו בנקודה } (2,1).$$

(בשלב זה נקבל כנתון שהפונקציה הנ"ל אכן הפיכה.)

$$\text{מתקיים: } \frac{dx}{dy} = 5y^4 + 1 \text{ ולכן } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4 + 1}.$$

שיפוע הפונקציה בנקודה $(2,1)$ הוא $\frac{1}{6}$ ולכן משוואת המשיק היא $y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2)$ כלומר $y = \frac{x}{6} + \frac{2}{3}$.

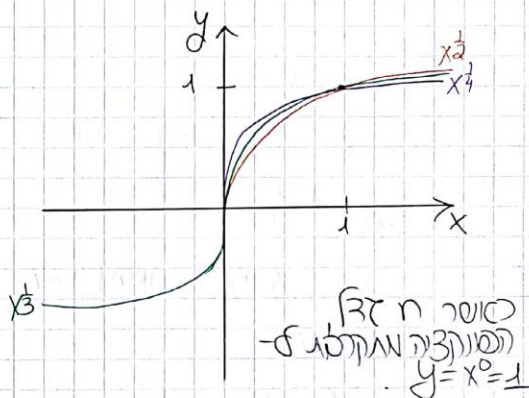
שימושים נוספים לסטנדרטיות ההוכחה:

הצגת נוסף

נתבונן בסטנדרטיות $y = x^{\frac{1}{n}}$.
עבור n אי-זוגי, היא מוגדרת
לכל x , ועבור n זוגי היא
מוגדרת לכל $x \geq 0$.

באשר לסטנדרטיות מוגדרת, היא
הפוכה, וההוכחה שלה היא:

$$x = y^n$$



נוסחה

יהי $y = x^{\frac{1}{n}}$ ונתבונן בסטנדרטיות $x \neq 0$.
לכל ערך של $x \neq 0$ שבו הסטנדרטיות
מוגדרת, הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ קיימת
וניתק"פ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

אפשרות אחרת: מניסוח עבור $y = u^{\frac{1}{n}}$
כי אנו לא יוצאים מההוכחה
שלנו.

הוכחה

נתבונן ב- $y = x^{\frac{1}{n}}$. יהי $\Delta x \neq 0$.
יהי y השכינה והמקום ב- y .
(זהו תחום של y שבו ההוכחה קיימת,
כלומר של y שבו $\frac{dy}{dx}$ יש תוק סטנדרטי
שיוני גלוי ב- Δx).

נבנה אומדן של $x = y^n$
אולם רק: (נראה) $y \neq 0$.

קודם כל, $\Delta y \neq 0$ שכן הסטנדרטיות הפוכה.

$$\bullet \quad \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}$$

$$st(\Delta y) = st(x + \Delta x)^{\frac{1}{n}} - st(x)^{\frac{1}{n}} = 0$$

$$\Delta y \approx 0 \quad \Leftarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = ny^{n-1} = st\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \quad \text{כעת}$$

$$\cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx ny^{n-1} \quad \text{זמן}$$

מכאן (דפי קרליז משה):
ס: סטנדרטיות איוס

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{1}{ny^{n-1}}$$

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{1}{ny^{n-1}} \quad \text{ולכן}$$

$$\cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{אזכור}$$

של

גרביז סט

יהי $y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ונתבונן ב- y .
חשבו (ס) אפי ההקדמה והוכחה ב- f .
איונה גבירה ב- $x=0$.

דוגמה

$$\frac{d(3x^{\frac{1}{2}})}{dx} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$\frac{d(5x^{\frac{1}{7}})}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{7} \cdot x^{-\frac{6}{7}} = \frac{5}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

לעתיד: אלוויד את המספר
(הרצון)

משפט

יהי $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$.
אז $\frac{dy}{dx} = r x^{r-1}$

$$\frac{dy}{dx} = r x^{r-1}$$

הוכחה

$m, n \in \mathbb{Z}$, $r = \frac{m}{n}$ (אז)

$$y = (x^{\frac{1}{n}})^m$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d((x^{\frac{1}{n}})^m)}{dx} = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \frac{d(x^{\frac{1}{n}})}{dx} =$$

$$= m x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} - 1} = r x^{r-1}$$

דוגמה

דוגמה

$$\frac{d(x^{\frac{2}{3}})}{dx} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d(\frac{1}{x^2+x^3})}{dx} = \frac{-1}{(x^2+x^3)^2} \frac{d(x^2+x^3)}{dx} =$$

$$= \frac{-1}{(x^2+x^3)^2} \cdot (2x + 3x^2)$$

הרצאה מס' 8

פונקציות טרנסצנדנטליות³

בפרק הזה נכיר מספר דוגמאות חשובות של פונקציות טרנסצנדנטליות.

פונקציה טרנסצנדנטלית היא פונקציה שאינה אלגברית, כלומר כזאת שאי-אפשר להציג אותה באמצעות חיבור, חיסור, חילוק, כפל, שורש וחזקה.

למשל: $e^x, 3^x, \log x, \sin x, \tan x$.

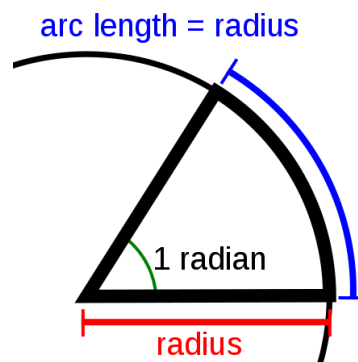
בפרק זה נציג את הפונקציות ואת הנגזרות שלהן (את ההוכחות נשאיר להמשך).

פונקציות טריגונומטריות

τριγωνομετρία - מדידת משולשים

רדיאנים מול מעלות

רדיאן אחד זהו הגודל של הזווית המרכזית במעגל הנשענת על קשת באורך רדיוס המעגל.



מכיוון שהיקף המעגל הוא 2π , במעגל יש 2π רדיאנים.

💡 רדיאן הוא גודל טבעי שנוצר בצורה טבעית מתוך המעגל. עם זאת, "מעלה" זה משהו מומצא ושרירותי.

³ Transcendental Functions

❗ בחדוו"א נוח יותר לעבוד עם רדיאנים. אחת הסיבות לכך היא שאז הנוסחאות הן יותר "יפות". למשל: $(\sin x)' = \cos x$. אם היינו עובדים במעלות היינו מקבלים:

$$(\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x$$

❗ חשוב: π הוא מספר שערכו קרוב ל-3.14, לכן כאשר הוא נמצא מחוץ לפונקציה הטריגונומטרית, לעולם אין להמירו ב-180!

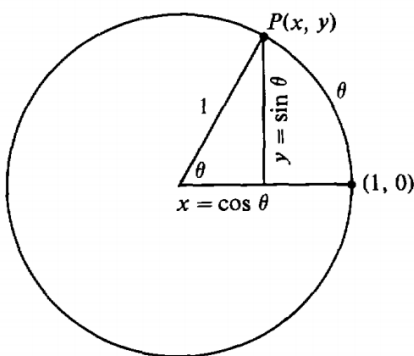
נוסחאות המרה:

$$2\pi_{\text{rad}} = 360^\circ \text{ ולכן } \pi_{\text{rad}} = 180^\circ \text{ ו- } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\text{למשל: } \frac{\pi}{3 \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\text{למשל: } 45^\circ = 45 \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

סינוס וקוסינוס



נתבונן במעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$ ותהי $P(x, y)$ נקודה על המעגל.

נסמן ב- θ את הזווית המרכזית שנוצרת כאשר מתקדמים מ- $(1, 0)$ ל- $P(x, y)$ נגד כיוון השעון.

אז:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \end{aligned}$$

נגדיר גם את הפונקציה **טנגנס** על-ידי: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, לכל θ עבורו $\cos \theta \neq 0$.

הערות:

- שימו לב שהגדרות אלה תקפות לכל הזוויות (שליליות, חיוביות, גדולות מ- 2π).
- ניתן להגדיר פונקציות אלה גם באמצעות משולש ישר-זווית, אך רק לזוויות בין 0

$$\text{ל-} \frac{\pi}{2}$$

- זהות שימושית שנובעת ממשוואת המעגל: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

הנגזרות

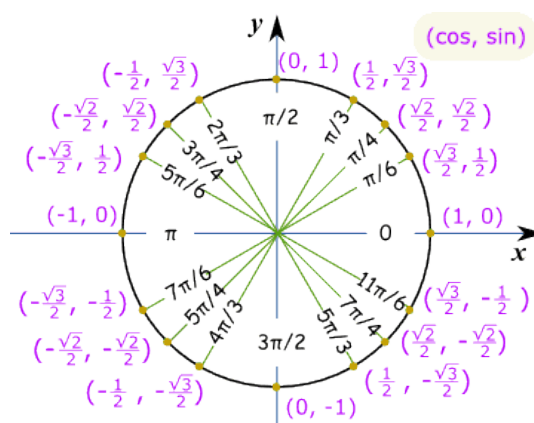
$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x, \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

דוגמאות

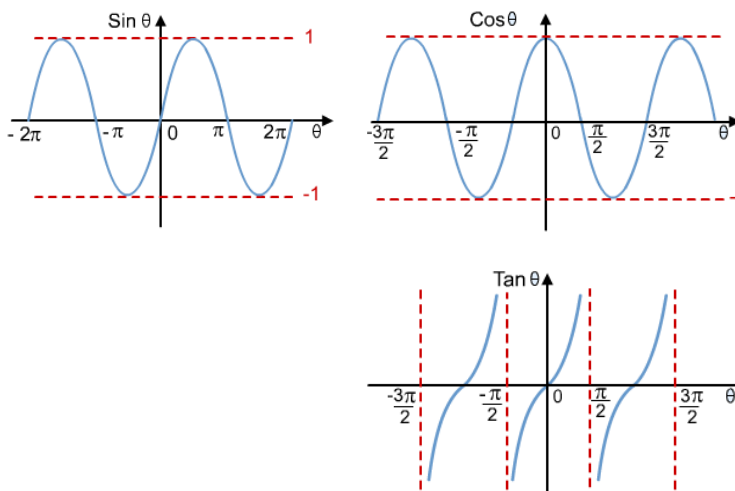
$$\frac{d(\sin^2 \theta)}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta \quad .1$$

$$\frac{d(\sin \theta (1 - \cos \theta))}{d\theta} = \sin^2 \theta + \cos \theta - \cos^2 \theta \quad .2$$

ערכים של זוויות שימושיות

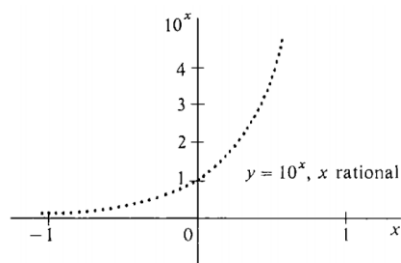


גרפים של הפונקציות הטריגונומטריות



פונקציות מעריכיות

בהינתן $0 < b \in \mathbb{R}$ ו- $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ מגדירים: $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$, $b^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}$.



למשל, הנה הגרף של 10^x , $x \in \mathbb{Q}$:

אם נחבר את כל הנקודות באמצעות עקומה חלקה, נקבל את הגרף של הפונקציה הממשית $y = 10^x$ (עבור $x \in \mathbb{R}$).

כדי לבנות את הפונקציה הממשית $y = b^x$ יש צורך בכלים מתקדמים יותר, ולכן כרגע נסתפק בהגדרה האינטואיטיבית.

הפונקציה $y = b^x$ שתיארנו עכשיו נקראת **הפונקציה המעריכית עם בסיס b**.

תכונות

לכל $0 < b$ ולכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$1. \quad b^0 = 1$$

$$2. \quad 0 < b^x$$

$$3. \quad b^{x+y} = b^x b^y$$

$$4. \quad b^{xy} = (b^x)^y$$

❗ שימו לב שהכללים עובדים רק עבור $0 < b$. ואמנם:

$$-1 = (-1)^3 = (-1)^{6 \cdot \frac{1}{2}} = \left((-1)^6\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

❗ הבסיס הכי שימושי בחדו"א הוא המספר $e = 2.71828\dots$. זהו מספר אי-רציונאלי שנקרא לפעמים Euler's number (1727) (על שם המתמטיקאי השוויצרי לאונהרד אוילר).

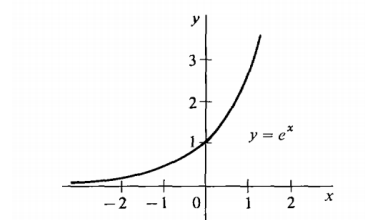
יש מספר הגדרות שונות למספר זה, ואחת מהן היא:

$$e \text{ הוא המספר הממשי היחיד המקיים: } \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

אנו נדון במספר זה באריכות בהמשך הקורס.

הגרף:

$$e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$



דוגמה

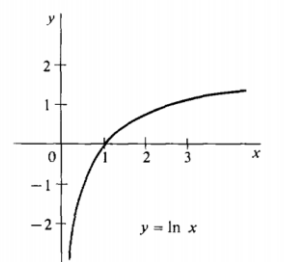
$$\frac{d(xe^x)}{dx} = e^x + xe^x$$

הגדרה

הפונקציה ההופכית של $x = e^y$ נקראת **הלוגריתם הטבעי** ומסומנת ב- $y = \ln x$.
(שימו לב שהלוגריתם הטבעי מוגדר רק עבור $x > 0$. מדוע?)

הגרף:

$$\ln x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$



שתי זהויות חשובות

1. לכל $x > 0$ מתקיים: $e^{\ln x} = x$.
2. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\ln(e^x) = x$.

דוגמאות

[זכרו שמתקיים (בגלל ההפיכות): $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$]

$$\ln(e) = 1, \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1, \ln(1) = 0$$

תכונות

1. לכל a, b חיוביים מתקיים:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

2. לכל $a > 0$ ולכל b מתקיים:

$$\ln(a^b) = b \ln a$$

הנגזרת

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{לכל } x > 0 \text{ מתקיים:}$$

הסבר: ניתן לקבל את הנגזרת מכלל הפונקציה ההופכית (בהנחה שיודעים ששתייהן גזירות, וזאת נוכיח בהמשך הקורס).

$$y = \ln(x), x = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y = e^{\ln x} = x$$

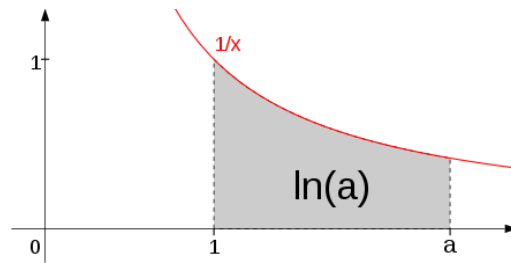
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

דוגמה

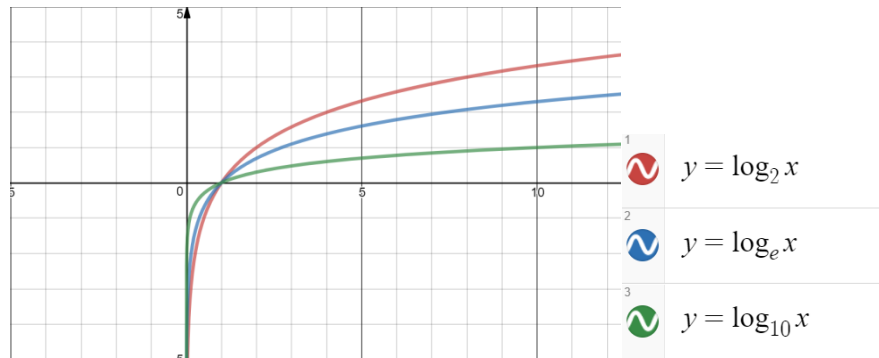
$$\frac{d(3(\ln x)^2)}{dx} = 6 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

להעשרה 🚩

1. דרך נוספת להגדיר את הלוגריתם הטבעי:



2. מדוע קוראים לו הלוגריתם **הטבעי**? אחת הסיבות היא סעיף 1 הנ"ל.
 סיבה אפשרית נוספת היא העובדה שהשיפוע של $y = \ln x$ בנקודה $x = 1$ הוא 1.



כלל השרשרת

אנחנו הולכים לפתור בעיות (גזירה) מהסוג:

$$y = \ln(\sin x), y = \sin(\cos(2x^2 + 1)), y = \sqrt[5]{3x^2 - 15x}$$

כלל השרשרת עוסק במצבים בהם יש לנו שתי פונקציות: $y = f(x)$, $x = h(t)$. כלומר, x, y שניהם משתנים התלויים ב- t .

נגדיר פונקציה חדשה של t באופן הבא: $g(t) = f(h(t))$. אזי g נקראת **ההרכבה של f על h** .

מסמנים: $g = f \circ h$.

דוגמה להרכבה

$$y = f(x) = 3x + 5, \quad x = h(t) = t^2$$

$$g(t) = f(h(t)) = f(t^2) = 3t^2 + 5$$

למעשה, כל פונקציה ניתנת לכתיבה (ובהמשך לגזירה) כהרכבה של שתי פונקציות.

$$\text{למשל: } g(t) = (13t^2 - 1)^3.$$

• כלל השרשרת מבטא את הנגזרת של g במונחי הנגזרות של h ושל f .

משפט – כלל השרשרת

תהייה f, h שתי פונקציות ממשיות ותהי $g = f \circ h$ ההרכבה שלהן המוגדרת באמצעות $g(t) = f(h(t))$. אזי לכל ערך של $t \in \mathbb{R}$ שעבורו הנגזרות $f'(h(t))$, $h'(t)$ קיימות, גם הנגזרת $g'(t)$ קיימת ומתקיים: $g'(t) = f'(h(t))h'(t)$.

הוכחה

$$\text{נסמן } x = h(t), y = f(x) \text{ ונקבל } y = f(h(t)) = g(t).$$

יהי $t \in \mathbb{R}$ עבורו הנגזרות $f'(h(t))$, $h'(t)$ קיימות, ונזכיר ש- $g'(t)$ קיימת ומקיימת $g'(t) = f'(h(t))h'(t)$.

יהי $0 \neq \Delta t \approx 0$. מכיוון ש- $h'(t)$ קיימת, לפי משפט השינוי Δx הוא אינפי.

$f'(x)$ קיימת, ולכן לפי משפט השינוי מתקיים: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$ עבור $\varepsilon \approx 0$ כלשהו.

נחלק את השוויון האחרון ב- Δt ונקבל: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$

נפעיל חלק סטנדרטי ונקבל: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = f'(x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) + 0$. כלומר:
 $g'(t) = f'(x)h'(t) = f'(h(t))h'(t)$

מש"ל

דוגמאות

1. נחשב את הנגזרת $g'(t)$ עבור $g(t) = \cos(\ln t)$.

2. נחשב את הנגזרת $f'(x)$ עבור $f(x) = e^{\sin x}$.

• לפעמים נוח יותר לעבוד עם משתנים תלויים במקום עם פונקציות.

משפט – כלל השרשרת עם משתנים תלויים

תהייה $y = f(x)$, $x = h(t)$ אם $f'(x)$, $h'(t)$ קיימות אזי: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

דוגמה

נתון: $y = 2x^2 - 5$, $x = \sin t$. נחשב $\frac{dy}{dt}$.

לפי כלל השרשרת מתקיים: $\frac{dy}{dt} = 4x \cdot \cos t = 4 \sin t \cos t$.

❗ בשיעור האחרון הוכחנו את הכלל $\frac{d(x^r)}{dx} = rx^{r-1}$ (עבור $r \in \mathbb{Q}$), וכעת נכליל אותו:

משפט – כלל החזקה (הצורה הכללית)

יהי $r \in \mathbb{Q}$ ויהי u משתנה התלוי ב- x . אם $u > 0$ והנגזרת $\frac{du}{dx}$ קיימת, אז

$$\frac{d(u^r)}{dx} = ru^{r-1} \frac{du}{dx}$$

הוכחה

$$\frac{d(u^r)}{dx} = \frac{d(u^r)}{du} \frac{du}{dx} = ru^{r-1} \frac{du}{dx} \quad \text{לפי משפט כלל השרשרת מתקיים:}$$

מש"ל

דוגמה

$$\frac{d\left((1-2x^2)^{\frac{1}{5}}\right)}{dx} = \frac{1}{5}(1-2x^2)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-4x)$$

דוגמה

$$y = (e^{2x} + \ln x)^3 \quad \text{נגזור את}$$

הרצאה 9

נגזרת של פונקציה סתומה

נגזרות מסדר גבוה

הגדרה

נגזרת שנייה של פונקציה f היא הנגזרת של הנגזרת של f , ומסומנת ב- f'' או ב- $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

נגזרת שלישית של פונקציה f היא הנגזרת של הנגזרת השנייה של f , ומסומנת ב- f''' או ב- $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

באופן כללי, נגזרת מסדר n מסומנת ב- $f^{(n)}$ או ב- $\frac{d^n y}{dx^n}$.

דוגמה

נמצא את הנגזרת השלישית של $y = e^{\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x e^{\cos x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x e^{\cos x} - \sin x e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = e^{\cos x} (-\cos x + \sin^2 x)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) (-\cos x + \sin^2 x) + e^{\cos x} (\sin x + 2 \sin x \cos x)$$

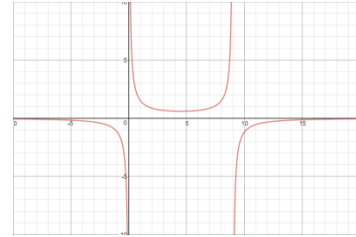
הגדרה

נאמר ש- y הוא **פונקציה סתומה** של x אם הקשר בין y ל- x מוגדר באמצעות משוואה (ולא באופן מפורש).

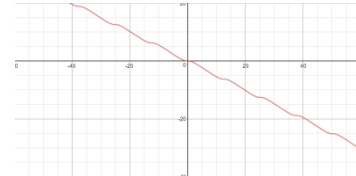
למשל:

$$5x + y = 7$$

$$9xy - 12 = x^2 y$$



$$\sin(x+y) = x+2y$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

הערות:

1. יש פונקציות סתומות בהן אפשר לבודד את אחד המשתנים (למשל $5x + y = 7$), ויש כאלה בהן אי אפשר (למשל $\sin(x+y) = x+2y$).
 2. יש משוואות שמגדירות יותר מפונקציה אחת (למשל $x^2 + y^2 = 1$).
- כל משוואה (בין אם היא מתארת פונקציה ובין אם לא) מתארת עקומה כלשהי במישור, ויש משמעות לשאלה: מהו השיפוע בנקודה מסוימת על העקומה?
- שאלה: איך גוזרים במקרים בהם לא ניתן לבודד את אחד המשתנים?
 - תשובה: גזירה סתומה.

תהליך הגזירה הסתומה

1. נגזור את שני האגפים של המשוואה לפי x . בשלב זה זכרו ש- y הוא פונקציה של x , ולכן יש להשתמש בכלל השרשרת.
2. נפתור את המשוואה שהתקבלה עבור $\frac{dy}{dx}$.

דוגמאות

1. נמצא $\frac{dy}{dx}$ עבור $5x + y = 7$, ונאמת את התשובה באמצעות גזירה ישירה.
- גזירה סתומה:

גוזרים את שני האגפים לפי x :

$$\frac{d(5x + y)}{dx} = \frac{d(7)}{dx}$$

$$5 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ מבודדים :}$$

$$\frac{dy}{dx} = -5$$

גזירה ישירה:

$$y = 7 - 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = -5$$

2. נמצא $\frac{dy}{dx}$ עבור $9xy - 12 = x^2y$

גוזרים את שני האגפים לפי x :

$$\frac{d(9xy - 12)}{dx} = \frac{d(x^2y)}{dx}$$

$$9y + 9x \frac{dy}{dx} = 2xy + x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ מבודדים :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 9y}{9x - x^2}$$

3. נמצא $\frac{dy}{dx}$ עבור $y^2 + xy = 2xy^2$

$$\begin{aligned}\frac{d(y^2 + xy)}{dx} &= \frac{d(2xy^2)}{dx} \\ 2y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} &= 2y^2 + 2x \cdot 2y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx}(2y + x - 4xy) &= 2y^2 - y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2y^2 - y}{2y + x - 4xy}\end{aligned}$$

4. נמצא את שיפועי המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 4$ בנקודות $(0,2)$, $(2,0)$.

5. נמצא את משוואות המשיקים לעקומה $x^2y^4 + x + y = 2y^2$ בנקודות

$$\cdot \left(0, \frac{1}{2}\right), (0,0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^4 + 1}{4y - 1 - 4x^2y^3}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)} = -1$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\left(0, \frac{1}{2}\right)} = 1$$

שאלות בנושא גזירות

(אפשר לעשות כמה מהשאלות הבאות ואפשר להעבירן לתרגול ולהתחיל גבולות. תלוי בקצב ובהרגשה הכללית בכיתה.)

שאלה 1

באילו נקודות הפונקציה הבאה גזירה?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \end{cases}$$

פתרון

קודם כל שימו לב שהנקודה $x = 1$ היא נקודה "בעייתית" שכן בנקודה זו אנו מדביקים שתי פונקציות ולא ברור אם מקבלים פונקציה גזירה בנקודת ההדבקה.

לכן נפצל את בדיקת הגזירות לשניים: גזירות עבור $x \neq 1$ וגזירות עבור $x = 1$.

כאשר $x \neq 1$ יש לנו שתי פונקציות שונות.

עבור $x < 1$ מתקיים: $f'(x) = 2x$, ועבור $x > 1$ מתקיים: $f'(x) = 2$.

סיכום ביניים:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ ? & x = 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$$

בנקודה $x = 1$ נבדוק גזירות לפי ההגדרה:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(1 + \Delta x) - 1}{\Delta x} \right)$$

בשלב זה אנו רואים שיש צורך לחלק למקרים, מכיוון ש- $f(1 + \Delta x)$ תלוי בסימן של Δx .

לכן נחלק לשני מקרים: $\Delta x > 0$ ו- $\Delta x < 0$.

שימו לב: על מנת שהנגזרת תהיה קיימת, יש צורך שהחלק הסטנדרטי יהיה (קיים ו-) בלתי תלוי ב- Δx . כלומר, אנו אמורים לקבל את אותה התשובה בשני המקרים.

$$:\Delta x < 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(1+\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \right) = 2$$

$$:\Delta x > 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(1+\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(2(1+\Delta x) - 1) - 1}{\Delta x} \right) = 2$$

קיבלנו את אותו החלק הסטנדרטי בשני המקרים, ולכן הפונקציה גזירה ב- $x = 1$ ומתקיים:
 $f'(1) = 2$

לסיכום:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases} \quad \text{או} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$$

שאלה 2

באילו נקודות הפונקציה הבאה גזירה?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 3x + 1} & x \leq 0 \\ -2x + 1 & 0 < x \end{cases}$$

(שימו לב לתחום ההגדרה של הפונקציה! היא לא

מוגדרת בתחום $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ ולכן הנקודות $-1, -\frac{1}{2}$ הן חשודות לאי-גזירות.)

שאלה 3

באילו נקודות הפונקציה הבאה גזירה?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גבולות

- להתחיל מהסבר אינטואיטיבי. המטרה שלנו היא להבין התנהגות של פונקציות סביב נקודות "בעייתיות" (למשל, נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת).

דוגמאות

$$1. f(x) = \frac{1}{x}$$

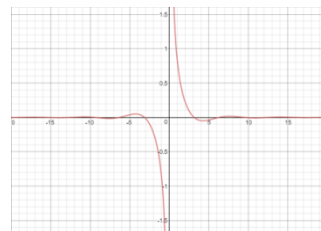
זו פונקציה שאינה מוגדרת באפס, ומכיוון שאנו מכירים כבר את הגרף שלה, אנו מבינים איך היא מתנהגת בסביבת הנקודה.

$$2. f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

גם זו פונקציה שאינה מוגדרת באפס. איך היא מתנהגת שם? זו אחת השאלות שנענה עליהן בהמשך.



$$3. \text{ מה לגבי } f(x) = \frac{\sin x}{x^2} ?$$



הגדרה

יהיו $c, L \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה מממית. נאמר ש- L הוא **הגבול של f בנקודה c** אם:

לכל $x \in \mathbb{R}^*$ שקרוב אינסופית ל- c ושונה מ- c מתקיים ש- $f(x)$ קרוב אינסופית ל- L .

כלומר: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)((x \approx c \wedge x \neq c) \rightarrow f(x) \approx L)$.

מסמנים: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

- אם אין L המקיים את ההגדרה הנ"ל, אומרים שהגבול של f בנקודה c אינו קיים.

דוגמה

נחשב $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ עבור $f(x) = 5x - 2$.

יהי $x \neq 3$, כלומר, $x = 3 + \Delta x$, עבור $\Delta x \neq 0$.

נבדוק לאיזה מספר $f(x)$ קרוב אינסופית (בהנחה שיש כזה):

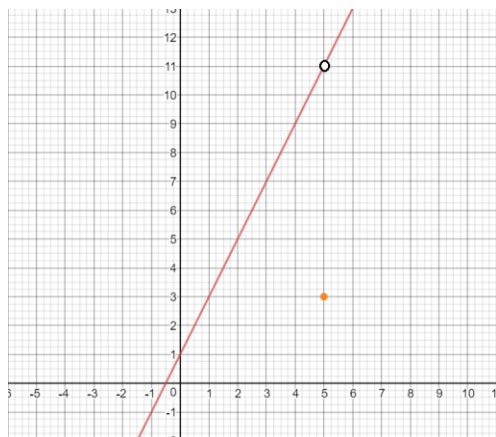
$$f(x) = f(3 + \Delta x) = 5(3 + \Delta x) - 2 = 13 + 5\Delta x \approx 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 2) = 13 \text{ לכן}$$

[להדגים גם בציור.]

דוגמה

נתבונן בפונקציה המפוצלת הבאה: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \neq 5 \\ 3 & x = 5 \end{cases}$. נחשב $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.



יהי $x \neq 5$, כלומר, $x = 5 + \Delta x$, עבור $\Delta x \neq 0$.

נבדוק לאיזה מספר $f(x)$ קרוב אינסופית (בהנחה

שיש כזה):

$$f(x) = f(5 + \Delta x) = 2(5 + \Delta x) + 1 = 11 + 2\Delta x \approx 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 11 \text{ לכן}$$

מסקנה/הערה חשובה

הגבול של f בנקודה c לא תלוי בערך של הפונקציה בנקודה זו. בין אם $f(c)$ מוגדר

ובין אם לא, הוא לא משפיע על הערך של הגבול.

דוגמה

נתבונן ב- $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ 3 & x < 2 \end{cases}$ ונחשב שני גבולות: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

נתחיל מ- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

יהי $x \neq 0$, כלומר, $x = \Delta x$, עבור $\Delta x \approx 0$.

$$f(x) = f(\Delta x) = 3 \approx 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \text{ לכן}$$

כעת נחשב $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

יהי $x \neq 2$, כלומר, $x = 2 + \Delta x$, עבור $\Delta x \approx 0$.

נבדוק לאיזה מספר $f(x)$ קרוב אינסופית (בהנחה שיש כזה): יש לחשב $f(2 + \Delta x)$, אך למה הכוונה? ההצבה בפונקציה תלויה כעת ב- Δx , לכן נפצל למקרים: $\Delta x > 0$, $\Delta x < 0$.

עבור $\Delta x > 0$ נקבל $f(2 + \Delta x) = 1 \approx 1$, ואילו עבור $\Delta x < 0$ נקבל $f(2 + \Delta x) = 3 \approx 3$.

יצא שמצד אחד $f(2 + \Delta x)$ קרוב אינסופית ל-1, ומצד שני הוא קרוב אינסופית ל-3. לכן, הגבול בנקודה $x = 2$ אינו קיים.

[שימו לב! המשחק של "גבול" מתנהל באופן הבא: אני מוחקת את הפס $x = 2$ מהגרף של הפונקציה, ומבקשת מכם לנחש מה $f(2)$ הולך להיות.]

שלבים למציאת הגבול $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ (במידה וקיים):

1. נניח ש- $x \approx c$, כלומר $x = c + \Delta x$, עבור $\Delta x \approx 0$.
2. נציב $x = c + \Delta x$ ב- $f(x)$ ונחשב $st(f(x))$. המספר שנקבל יהיה הגבול הרצוי.

כלומר: אם הגבול $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ קיים, אז $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = st(f(c + \Delta x))$ לכל $\Delta x \approx 0$.

הערה: אם ניתן לפשט את הפונקציה, כדאי לעשות זאת לפני ההצבה של $c + \Delta x$.

דוגמאות לחישוב גבול

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 1)$$

יהי $x \neq 0$, כלומר, $x = \Delta x$ עבור $0 \approx \Delta x \neq 0$.

$$\text{מתקיים: } st(f(\Delta x)) = st(3(\Delta x)^2 - 1) = -1$$

$$\text{לכן } \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 1) = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$$

שימו לב שכאן אפשר לפשט את הפונקציה:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

[להסביר שאפשר לצמצם רק בגלל העובדה שלפי הגדרת הגבול יש לנו

$$[x = -1 + \Delta x \neq -1]$$

כעת, יהי $x \neq -1$, כלומר, $x = -1 + \Delta x$ עבור $0 \approx \Delta x \neq 0$.

$$\text{מתקיים: } st\left(\frac{-1 + \Delta x - 2}{-1 + \Delta x - 1}\right) = st\left(\frac{-3 + \Delta x}{-2 + \Delta x}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{לכן } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{5}{x}}{\frac{3}{x} + 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16 - x} \quad (\text{להראות מה קורה אם לא מפשטים את הפונקציה לפני ההצבה})$$

הרצאה מס' 10

הערה על נגזרת

למעשה, ניתן להגדיר את הנגזרת של פונקציה בנקודה מסוימת באמצעות גבול באופן הבא.

תהי f פונקציה כלשהי ונניח שהיא גזירה בנקודה $a \in \mathbb{R}$. מתקיים:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \text{st}_{0 \neq \Delta t \approx 0} \left(\frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t} \right) = f'(a)$$

כלומר: $f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$

כללי אריתמטיקה של גבולות

מהכללים שהוכחנו עבור st נובעים מיידית כללי הגבולות הבאים. בהנחה שהגבולות $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ קיימים, מתקיים:

Standard Part Rule	Limit Rule
$\text{st}(kb) = k \text{st}(b)$, k real	$\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
$\text{st}(a + b) = \text{st}(a) + \text{st}(b)$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
$\text{st}(ab) = \text{st}(a) \cdot \text{st}(b)$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
$\text{st}(a/b) = \text{st}(a)/\text{st}(b)$, if $ \text{st}(b) > 0$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x)$, if $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
$\text{st}(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{\text{st}(a)}$, if $a > 0$	$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, if $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$

דוגמה

$$\lim_{x \rightarrow -1} 5 \cdot \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}} = 5 \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}} = 5 \sqrt{\frac{3}{2}}$$

מצבים בהם הגבול אינו קיים

בכל אחד מהמצבים הבאים הגבול $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ אינו קיים:

1. קיים $c \neq x \approx c$ עבורו הביטוי $f(x)$ אינו מוגדר.
2. קיים $c \neq x \approx c$ עבורו הביטוי $f(x)$ הוא אינסופי.
3. ל- $f(x)$ יש חלקים סטנדרטיים שונים עבורים x -ים שונים המקיימים $c \neq x \approx c$.

דוגמאות לכל אחד מהמצבים

$$1. f(x) = \sqrt{x}$$

הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ אינו קיים. ואמנם, עבור $x = \Delta x < 0$ הביטוי $f(x)$ אינו מוגדר.

$$2. f(x) = \frac{1}{x^2}$$

הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ אינו קיים. ואכן, עבור $x = \Delta x \approx 0$ הביטוי $f(x)$ הוא אינסופי.

$$3. f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ אינו קיים, ואכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = \text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} (f(0 + \Delta x)) = \text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} \left(\frac{1 + \Delta x}{|1 + \Delta x|} \right) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

גבולות חד-צדדיים

הגדרה

יהיו $c, L \in \mathbb{R}$.

1. נאמר ש- L **הוא הגבול מימין של f בנקודה c** אם לכל x הקרוב אינסופית ל-

$$c \text{ וגדול מ-} c \text{ מתקיים ש-} f(x) \approx L.$$

$$\text{כלומר: } (\forall x \in \mathbb{R}^*) (c \approx x > c \rightarrow f(x) \approx L).$$

$$\text{במקרה זה נסמן: } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

2. נאמר ש- L **הוא הגבול משמאל של f בנקודה c** אם לכל x הקרוב אינסופית

$$c \text{ וקטן מ-} c \text{ מתקיים ש-} f(x) \approx L.$$

$$\text{כלומר: } (\forall x \in \mathbb{R}^*) (c \approx x < c \rightarrow f(x) \approx L).$$

$$\text{במקרה זה נסמן: } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L.$$

דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 3 \\ 5 & x < 3 \end{cases}$$

$$\text{נחשב } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\text{נתחיל עם } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x):$$

$$\text{יהי } x > 3 \approx 3. \text{ כלומר, } x = 3 + \Delta x \text{ עבור } \Delta x > 0 \approx 0. \text{ מתקיים: } f(x) = f(3 + \Delta x) = 1$$

$$\text{ולכן } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1.$$

$$\text{כעת נמצא את } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x):$$

$$\text{יהי } x < 3 \approx 3. \text{ כלומר, } x = 3 + \Delta x \text{ עבור } \Delta x < 0 \approx 0. \text{ מתקיים: } f(x) = f(3 + \Delta x) = 5$$

$$\text{ולכן } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5.$$

הערה על חישוב גבול חד-צדדי (אם קיים)

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \text{st}_{0 \approx \Delta x > 0} (f(x + \Delta x))$$
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \text{st}_{0 \approx \Delta x < 0} (f(x + \Delta x))$$

משפט

יהיו $L, c \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה ממשית. L הוא הגבול של f בנקודה c אם ורק אם שני הגבולות החד-צדדיים בנקודה c קיימים ושווים ל- L .

בסימונים:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

הוכחה

הכיוון $\Rightarrow$ ברור מהגדרת הגבול.

עבור $\Leftarrow$ ניקח $c \approx x \neq c$ ונזכיר ש- $f(x) \approx L$.

מפני ש- $x \neq c$ מתקיים $x > c$ או $x < c$. אם $x < c$ אז מכיוון ש- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ נקבל ש-

$f(x) \approx L$. אם $x > c$ אז מכיוון ש- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ נקבל ש- $f(x) \approx L$.

מש"ל

אי-קיום גבול במונחים של גבולות חד-צדדיים

אם הגבול $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ אינו קיים, אז (בהכרח) מתקיים אחד מהבאים:

1. אחד הגבולות החד-צדדיים אינו קיים.
2. שני הגבולות החד-צדדיים לא קיימים.
3. הגבולות החד-צדדיים קיימים ושונים.

דוגמאות

$$1. f(x) = \sqrt{x}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$3. f(x) = \frac{|x|}{x}$$

רציפות

- אינטואיטיבית, פונקציה רציפה היא פונקציה שניתן לצייר מבלי להרים את העפרון מהדף. עם זאת, האינטואיציה הזאת לא לגמרי נכונה כפי שתכף נראה.

הגדרה

יהי $c \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה ממשית. נאמר ש- f **רציפה בנקודה** c אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. f מוגדרת ב- c ;
2. אם $x \approx c$ אז $f(x) \approx f(c)$.

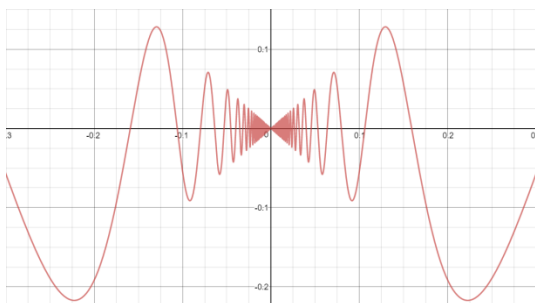
דוגמה

הפונקציה $f(x) = 2x - 7$ רציפה ב- $x = 3$.

הוכחה: $f(3)$ מוגדר. נבדוק את התנאי השני.

אם $x \approx 3$ אז $x = 3 + \Delta x$ עבור $\Delta x \approx 0$. מתקיים:
 $f(x) = f(3 + \Delta x) = 2(3 + \Delta x) - 7 = -1 + 2\Delta x \approx -1 = f(3)$

דוגמה (פונקציה רציפה שסותרת את האינטואיציה שהזכרנו קודם)



$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{הפונקציה}$$

רציפה בנקודה $x = 0$.

הוכחה: הביטוי $f(0)$ מוגדר.

יהי $x \approx 0$. אזי $x = \Delta x$ עבור $\Delta x \approx 0$. מתקיים: $f(x) = f(\Delta x) = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \approx 0 = f(0)$.

הרצאה מס' 11

משפט

תהי f פונקציה ממשית ותהי $c \in \mathbb{R}$. f רציפה בנקודה c אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

[ההוכחה נובעת מההגדרה. השלימו בבית.]

דוגמה (לפונקציה לא רציפה בנקודה)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$$

מתקיים: $f(3) = 5$. נחשב את הגבול: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \operatorname{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} (f(3 + \Delta x)) = 1$.

קיבלנו ש- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$ ולכן הפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.

טענה

נתבונן בפונקציה $f(x) = ax + b$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$. לכל $c \in \mathbb{R}$: f רציפה ב- c .

הוכחה

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \operatorname{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} (f(c + \Delta x)) = \operatorname{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} (a(c + \Delta x) + b) = ac + b = f(c)$$

מש"ל

משפט

תהיינה f, g פונקציות רציפות בנקודה $c \in \mathbb{R}$. מתקיים:

1. הפונקציה $k \cdot f$ רציפה ב- c לכל $k \in \mathbb{R}$.
2. הפונקציה $f + g$ רציפה ב- c .
3. הפונקציה $f \cdot g$ רציפה ב- c .
4. הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה ב- c בתנאי ש- $g(c) \neq 0$.

5. עבור $n \in \mathbb{N}$, אם $f(c) > 0$ אז הפונקציה $\sqrt[n]{f}$ רציפה ב- c .

[ניתן להוכיח את המשפט בשתי דרכים:

- א. באמצעות כללי הגבולות שלמדנו;
- ב. באמצעות כללי החלק הסטנדרטי.]

מסקנה

הפונקציות הבאות רציפות בכל תחום הגדרתן:

- 1. פונקציות לינאריות
- 2. פולינומים
- 3. פונקציות רציונאליות מהצורה $\frac{f}{g}$ כאשר f, g הם פולינומים (שימו לב: תחום ההגדרה כאן הוא $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$).
- 4. פונקציות מהצורה $f(x) = x^r$ עבור $r \in \mathbb{Q}$ (שימו לב: יתכן שיהיה כאן תחום הגדרה כמו $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, או $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, תלוי ב- r).

דוגמאות

- 1. הפונקציה $f(x) = -9x^2 + 15$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.
- 2. הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x-2}$ רציפה בכל $x \neq 2$.
- 3. הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.
- 4. הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ רציפה לכל $x > 0$.
- 5. הפונקציה $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ רציפה לכל $x \neq 0$.

דוגמה

האם הפונקציה הבאה רציפה ב- $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$$

הרצאה מס' 12

סיווג נקודות אי-רציפות

הגדרה

נאמר של- f יש **נקודת אי-רציפות סליקה** בנקודה c אם הגבול $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ קיים ומתקיים אחד מהשניים:

א. $f(c)$ אינו מוגדר;

ב. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$.

למשל:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

הגדרה

נאמר של- f יש **נקודת אי-רציפות ממין ראשון (קפיצה)** בנקודה c אם הגבולות החד-צדדיים בנקודה c **קיימים ושונים**.

למשל:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 2 \\ x+5 & x > 2 \end{cases} \quad \text{או} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

הגדרה

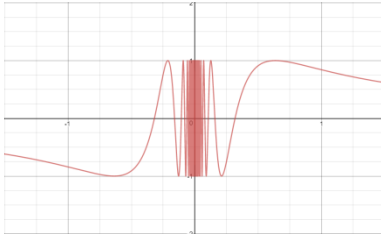
נקודת אי-רציפות שאינה סליקה ואינה ממין ראשון נקראת **נקודת אי-רציפות ממין שני (עיקרית)**.

זה קורה כאשר לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים לא קיים או אינסופי.

[שימו לב: אם גבול חד-צדדי כלשהו לא קיים, אז יתכנו שני מצבים: או שהוא לא קיים בכלל או שהוא אינסופי.]

למשל:

$f(x) = \frac{1}{x}$ (ראינו שבמקרה זה הגבולות החד-צדדיים הם אינסופיים).



$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (נראה בהמשך שכאן הגבולות החד-צדדיים לא קיימים).

- רק אם נשאר זמן: להראות דוגמה לסילוק נקודת אי-רציפות סליקה.

הגדרות שקולות לרציפות

תהי $y = f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה $c \in \mathbb{R}$. התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה ב- c ;
2. $x \approx c \Rightarrow f(x) \approx f(c)$;
3. $st(x) = c \Rightarrow st(f(x)) = f(c)$;
- א: $(st(x) = c \Rightarrow st(f(x)) = f(st(x)))$;
4. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$;
5. $\Delta x \approx 0 \Rightarrow \Delta y \approx 0$ (כאשר $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$).

הוכחה

$$1 \Leftrightarrow 2 \text{ (זו ההגדרה)}$$

$$1 \Leftrightarrow 4 \text{ (לפי משפט שהוכחנו)}$$

$$2 \Leftrightarrow 3 \text{ (טריוויאלי)}$$

$$2 \Leftrightarrow 5 \text{ : נוכיח.}$$

$$5 \Leftarrow 2 \text{ : יהי } \Delta x \approx 0 \text{ ונוכיח ש- } \Delta y \approx 0 \text{ (כאשר } \Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \text{).}$$

אם $\Delta x \approx 0$, אז $c \approx c + \Delta x$ ולכן, לפי 2, $f(c + \Delta x) \approx f(c)$, כלומר:
 $f(c + \Delta x) - f(c) \approx 0$ והוכחנו את הדרוש.

5 $\Leftarrow$ 2: יהי $x \approx c$ ונוכיח ש- $f(x) \approx f(c)$.

אם $x \approx c$, אז קיים $\Delta x \approx 0$ שעבורו $x = c + \Delta x$.

$\Delta x \approx 0$ ולכן, לפי 5, גם $\Delta y \approx 0$. כלומר: $f(c + \Delta x) - f(c) \approx 0$ ומכאן
 $f(c + \Delta x) \approx f(c)$ כנדרש.

מש"ל

הקשר בין גזירות לרציפות

משפט

אם f גזירה בנקודה c אז היא רציפה בנקודה c .

הוכחה

[למעשה, זו מסקנה מידית ממשפט השינוי.]

f גזירה בנקודה c ולכן מוגדרת ב- c .

יהי $\Delta x \approx 0$. לפי משפט השינוי נקבל ש- $\Delta y \approx 0$, ולכן f רציפה בנקודה c .

מש"ל

הערה

רציפות לא גוררת גזירות!

דוגמה

הפונקציה $y = |x|$ לא גזירה ב- $x = 0$ (הוכחנו), אך היא כן רציפה שם.

הוכחה (באמצעות הגדרה שקולה לרציפות):

יהי $\Delta x \approx 0$. מתקיים: $\Delta y = |0 + \Delta x| = |\Delta x| \approx 0$ ולכן $\Delta y \approx 0$ ומכאן נובע שהפונקציה
 רציפה ב- $x = 0$.

דוגמה

הפונקציה $y = x^{\frac{1}{3}}$ רציפה ב- $x = 0$ אך לא גזירה שם.

רציפות:

יהי $\Delta x \approx 0$. מתקיים: $\Delta y = (0 + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}} = (\Delta x)^{\frac{1}{3}} \approx 0$.

אי-גזירות:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(0 + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}} \right) = \text{undefined}$$

מסקנה (מהמשפט האחרון)

הפונקציות הבאות רציפות בכל תחום הגדרתן (זאת מכיוון שכרגע אנו מניחים שהן גזירות, ואת הגזירות שלהן נוכיח בהמשך):

1. $e^x, \sin x, \cos x$ (רציפות בכל $\mathbb{R}$);

2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (רציפה לכל x שבו $\cos x \neq 0$);

3. $\ln x$ (רציפה לכל $x > 0$).

שימוש ברציפות לחישוב גבולות וחלק סטנדרטי

שימו לב שאם פונקציה רציפה בנקודה c , אז הגבול שלה ב- c שווה לערך שלה בנקודה זו. נוכל להשתמש בטענה זו על מנת לחשב גבולות ביתר קלות.

למשל, מכיוון שהפונקציה $\frac{5x-1}{2-x}$ רציפה בנקודה $x = 1$, נקבל ש-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{2-x} = \frac{5 \cdot 1 - 1}{2 - 1} = 4$$

כלומר, אם יודעים שהפונקציה רציפה בנקודה מסוימת, אפשר פשוט להציב את הנקודה בפונקציה.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x-1} = -1 \text{ למשל:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \text{ למשל:}$$

אפשר להסתכל על הנושא הזה גם מנקודת מבטה של הגדרה שקולה מס' 3:

ראינו שרציפות בנקודה c שקולה לתנאי הבא:

$$\text{st}(x) = c \Rightarrow \text{st}(f(x)) = f(\text{st}(x))$$

למשל:

נתבונן ב- $f(x) = e^x$. זו פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ ולכן לכל x מתקיים:

$$\text{st}(f(x)) = f(\text{st}(x)) = e^{\text{st}(x)}$$

לכן, אפשר לעשות דברים כמו:

$$\text{st}(e^{1+\Delta x}) = e^{\text{st}(1+\Delta x)} = e$$

$$\text{st}(\cos(\Delta x)) = \cos(\text{st}(\Delta x)) = \cos 0 = 1 \text{ באופן דומה:}$$

$$\bullet \text{ שאלה: מה לגבי } \text{st}\left(e^{\frac{2x-1}{x+1}}\right) \text{ האם מתקיים } \text{st}\left(e^{\frac{2\Delta x-1}{\Delta x+1}}\right) = e^{\text{st}\left(\frac{2\Delta x-1}{\Delta x+1}\right)} ?$$

$$\text{האם } \lim_{x \rightarrow 1} \sin\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right)$$

[התשובה במשפט הבא.]

משפט – הרכבה של פונקציות רציפות

תהי f פונקציה רציפה בנקודה c , ותהי h פונקציה רציפה ב- $f(c)$. אזי הפונקציה

$$g(x) = h(f(x)) \text{ רציפה בנקודה } c.$$

כלומר: הרכבה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.

הוכחה

ברור ש- g מוגדרת בנקודה c . יהי $x \approx c$ ונראה ש- $g(x) \approx g(c)$.

ואמנם:

f רציפה ב- c ולכן: $x \approx c \Leftarrow f(x) \approx f(c)$.

h רציפה ב- $f(c)$ ולכן: $f(c) \approx f(x) \Leftarrow h(f(c)) \approx h(f(x))$.

מש"ל

למשל, הפונקציות הבאות הן רציפות בכל תחום הגדרתן:

$$e^{\sin x}, \ln(x^2 - 1), e^{1 - \frac{\cos(x^2 + 1)}{2}} \dots$$

מסקנה (למעשה, זו מסקנה מהגדרת הרציפות).

אם $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ואם h רציפה ב- L אזי: $\lim_{x \rightarrow c} h(f(x)) = h\left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)$.

למשל: $\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}\right) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\right)$

- בנוסף, הספקתי להגדיר אינטרוולים, ולהסביר אילו נקודות מעניינות אותנו כאשר ממיינים נקודות אי-רציפות:

רצפות על אינטרוואלים

הצגות:

$$y \in \mathbb{R}.$$

(אינטרוואל) (חסגור):

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

(אינטרוואל) (פתוח):

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

• באופן דוגמה מצגות סוגים
ננסים של אינטרוואלים

$$[a, b], (a, b]$$

$$(-\infty, a), (-\infty, a]$$

$$[a, \infty), (a, \infty)$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

• הסימן " ∞ " אומר שיש לקטע

דבר חסגור; (סימן) " $-\infty$ " אומר

שיש לקטע דבר פתוח.

• (תורה) על נק' אי-רצפות:

בוסר ממינים נק' אי-רצפות,

אנ מצוינים בן פתוחות

$c \in \mathbb{R}$ שצוקים קיים קטע

פסוקי: (a, c) או (c, b)

שבו הפונקציה מוגדרת.

משפט:

$\sqrt{x}$: הנק' (-1) אינה מצטננת

ואילו 0 ו p .

$\frac{1}{x}$: הנק' 0 אינה מצטננת או תנ.

הרצאה מס' 13

[להזכיר תנאים שקולים לרציפות.]

רציפות על אינטרולים

עד עכשיו דיברנו על רציפות (וגזירות) בנקודה כלשהי, וכעת נרצה להכליל את המושג הזה.

הגדרה

1. נאמר ש- f **רציפה באינטרוול הפתוח** I אם f רציפה בכל נקודה $c \in I$.
2. נאמר ש- f **גזירה באינטרוול הפתוח** I אם f גזירה בכל נקודה $c \in I$.

למשל:

הפונקציה $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$ רציפה וגזירה באינטרוול $(4,8)$.

הפונקציה $f(x) = |x|$ גזירה ב- $(0,15)$.

- לפני שנוכל להגדיר רציפות בקטע סגור, נצטרך שתי הגדרות נוספות:

הגדרה

1. נאמר ש- f **רציפה מימין** בנקודה c אם $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$.
2. נאמר ש- f **רציפה משמאל** בנקודה c אם $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$.

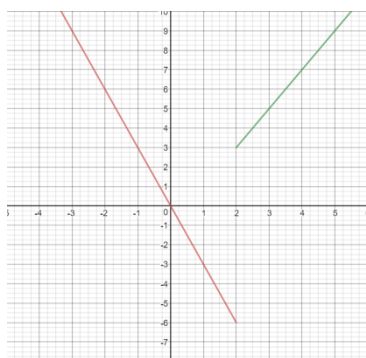
דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 2 \\ -3x & x < 2 \end{cases}$$

מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-1) = 3 = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x) = -6 \neq f(2)$$



טענה

f רציפה בנקודה c אם ורק אם f רציפה מימין ב- c וגם f רציפה משמאל ב- c .

למשל, הפונקציה בדוגמה האחרונה לא רציפה ב-2.

- באותו אופן בו ניסחנו תנאים שקולים לרציפות, ניתן לנסח תנאים שקולים לרציפות מימין/משמאל. למשל, נראה את התנאים לרציפות מימין:

משפט - הגדרות שקולות לרציפות מימין

תהי $y = f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה $c \in \mathbb{R}$. התנאים הבאים שקולים:

6. f רציפה מימין ב- c ;
7. $c < x \approx c \Rightarrow f(x) \approx f(c)$;
8. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$;
9. $0 < \Delta x \approx 0 \Rightarrow \Delta y \approx 0$ (כאשר $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$).

- כעת נוכל להגדיר רציפות באינטרוול סגור.

הגדרה

נאמר ש- f **רציפה באינטרוול הסגור** $[a, b]$ אם:

1. f רציפה באינטרוול הפתוח (a, b) ;
2. f רציפה מימין ב- a ;
3. f רציפה משמאל ב- b .

דוגמה

נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $[-1, 1]$ (זהו למעשה תחום ההגדרה של הפונקציה). נראה שהיא רציפה בקטע זה.

1. f רציפה באינטרוול הפתוח $(-1, 1)$ כשורש של פונקציה רציפה (וחיובית).
2. נבדוק רציפות מימין ב- (-1) :

יהי $0 < \Delta x \approx 0$. מתקיים:

$$\Delta y = \sqrt{1 - (-1 + \Delta x)^2} - \sqrt{1 - (-1)^2} = \sqrt{\Delta x(2 - \Delta x)} \approx 0$$

לכן f רציפה מימין ב- (-1) .

3. נבדוק רציפות משמאל ב-1:

$$\Delta y = \sqrt{1 - (1 + \Delta x)^2} - \sqrt{1 - 1^2} = \sqrt{-\Delta x(2 + \Delta x)} \approx 0 \text{ מתקיים: } 0 > \Delta x \approx 0$$

לכן f רציפה משמאל ב-1. (בהרצאה עשיתי את זה לפי בגדרת בגבול, לגיוון.)

לסיכום, f רציפה ב- $[-1, 1]$.

- שימו לב: כאן היינו חייבים לבדוק רציפות בקצוות הקטע לפי ההגדרה, וזאת משום שהקטע $[-1, 1]$ הוא בדיוק תחום ההגדרה של f .
כעת נראה דוגמה שבה ניתן לוותר על בדיקה לפי ההגדרה (בקצוות הקטע).

דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2} & x > 0 \end{cases} \quad \text{נחקור את רציפות הפונקציה } f(x) \text{ בקטע } [-1, 8].$$

איפה יש לבדוק רציפות?

- בנקודה $x = -1$ (רציפות מימין)
- בנקודה $x = 0$ (רציפות לפי ההגדרה)
- בנקודה $x = 8$ (רציפות משמאל)
- באינטרוול $(-1, 0)$
- באינטרוול $(0, 8)$

נתחיל עם נקודות הקצה:

$$x = -1:$$

מכיוון שהפונקציה $e^{\frac{1}{x}}$ רציפה לכל $x \neq 0$, נקבל שהיא רציפה בנקודה $x = -1$ ובפרט, רציפה שם מימין.

$$: x = 8$$

מכיוון שהפונקציה $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}$ רציפה בנקודה $x = 8$, היא רציפה בה משמאל.

נעבור לרציפות באינטרוולים:

באינטרוול $(-1, 0)$ הפונקציה $e^{\frac{1}{x}}$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.

באינטרוול $(0, 8)$ הפונקציה $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}$ רציפה כסכום, מנה ושורש של פונקציות רציפות.

נשארה רק נקודת הפיצול:

$$: x = 0$$

נבדוק גבול מימין וגבול משמאל. אם שניהם קיימים ושווים – נבדוק אם הם שווים לערך של הפונקציה בנקודה.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2} \right) = \dots = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \text{st}_{0 > \Delta x \approx 0} \left(e^{\frac{1}{\Delta x}} \right) = \text{st}_{0 > \Delta x \approx 0} \left(\frac{1}{e^{-\frac{1}{\Delta x}}} \right) = 0$$

מכיוון שהגבולות הח"צ קיימים ושווים מתקיים: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ומכיוון ש- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

נקבל ש- f רציפה ב- $x = 0$.

לסיכום: f רציפה ב- $[-1, 8]$.

נקודות קיצון

הגדרות

תהי f פונקציה ממשית הרציפה באינטרוול I . יהי $c \in I$.

1. נאמר שֶל־ f יש **מקסימום מוחלט** בנקודה c אם $f(c) \geq f(x)$ לכל $x \in I$.
2. נאמר שֶל־ f יש **מינימום מוחלט** בנקודה c אם $f(c) \leq f(x)$ לכל $x \in I$.
3. נאמר שֶל־ f יש **מקסימום מקומי** בנקודה c אם קיים קטע פתוח (a, b) כך ש־ $c \in (a, b) \subseteq I$ שעבורו מתקיים: $f(c) \geq f(x)$ לכל $x \in (a, b)$.
4. נאמר שֶל־ f יש **מינימום מקומי** בנקודה c אם קיים קטע פתוח (a, b) כך ש־ $c \in (a, b) \subseteq I$ שעבורו מתקיים: $f(c) \leq f(x)$ לכל $x \in (a, b)$.
5. נקודות מינימום ומקסימום נקראת גם **נקודות קיצון** (קיצון מוחלט/קיצון מקומי).

❗ **שימו לב:** קיצון זו תכונה שתלויה בקטע שבו עובדים!

דוגמאות

1. לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $I = \mathbb{R}$ אין מקסימום (לא מקומי ולא מוחלט), ויש מינימום (שהוא גם מינימום מקומי וגם מינימום מוחלט).
2. לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $I = (0, 2)$ אין נקודות קיצון בכלל.
3. לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $I = [1, 5]$ יש מינימום מוחלט ויש מקסימום מוחלט, אבל אין קיצון מקומי.
4. בפונקציה $f(x) = 5$ בקטע $I = \mathbb{R}$ כל נקודה היא גם קיצון מקומי וגם קיצון מוחלט.
5. בפונקציה $f(x) = 2x - 1$ בקטע $I = \mathbb{R}$ אין קיצון (לא מקומי ולא מוחלט).
6. לפונקציה $f(x) = \sin x$ בקטע $I = \mathbb{R}$ יש מקסימום מוחלט (ומקומי) בנקודות מהצורה $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, ומינימום מוחלט (ומקומי) בנקודות מהצורה $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

- שימו לב: למרות שיש אינסוף נקודות בהן מתקבל מקסימום מוחלט, הערך המקסימלי הוא יחיד!

- כעת נרצה לפתח כלים למציאת נקודות קיצון.

הגדרה

תהי f פונקציה ממשית הרציפה באינטרוול I . נקודה $c \in I$ נקראת **נקודה קריטית** אם מתקיים אחד מהבאים:

1. c היא נקודת קצה של I ;
2. $f'(c)$ אינו מוגדר;
3. $f'(c) = 0$.

דוגמה

נמצא נקודות קריטיות של $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ בקטע $(-1, 2]$.

קודם כל, נקודת הקצה $x = 2$ היא נקודה קריטית.

$$\text{כעת: } f'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

הביטוי $f'(0)$ אינו מוגדר, ולכן $x = 0$ היא נקודה קריטית.