

סיכומי הרצאות בקורס:

חשבון אינפיניטסימלי 1

חלק 2

הרצאות 14-26

ההרצאות הועברו בין השנים תשע"ה – תשע"ט במחלקה למדעי המחשב באוניברסיטת בר-אילן (מס' קורס: 89132).

הקורס מבוסס על ספרו של Jerome Keisler:

Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach

(ניתן להורידו בצורה חופשית: <https://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html>)

ההרצאות הועברו ונערכו על-ידי ד"ר לואי ג'ינגס¹.

תאריך עדכון אחרון: 21.9.18

¹ luie@jennings.es

הרצאה מס' 14

משפט הנקודה הקריטית

תהי f פונקציה ממשית הרציפה באינטרוול I , ותהי $c \in I$.

אם יש ל- f מינימום או מקסימום בנקודה c , אזי c היא נקודה קריטית, כלומר, אחד מהבאים מתקיים בהכרח:

1. c היא נקודת קצה של I ;
2. $f'(c)$ אינו מוגדר;
3. $f'(c) = 0$.

הוכחה

נוכיח עבור המקרה שבו יש ל- f מקסימום בנקודה c .

נניח ש- c אינה נקודת קצה ונניח ש- $f'(c)$ מוגדר. נוכיח ש- $f'(c) = 0$.

יהי $0 < \Delta x \approx 0$. אזי:

$$\begin{aligned} f(c + \Delta x) &\leq f(c) & \wedge & & f(c - \Delta x) &\leq f(c) \\ f(c + \Delta x) - f(c) &\leq 0 & \wedge & & f(c - \Delta x) - f(c) &\leq 0 \\ \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &\leq 0 & \wedge & & \frac{f(c - \Delta x) - f(c)}{-\Delta x} &\geq 0 \\ \text{st} \left(\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \right) &\leq 0 & \wedge & & \text{st} \left(\frac{f(c - \Delta x) - f(c)}{-\Delta x} \right) &\geq 0 \\ f'(c) &\leq 0 & \wedge & & f'(c) &\geq 0 \\ \Rightarrow f'(c) &= 0 \end{aligned}$$

מש"ל

הערה

לפי המשפט הנ"ל, קיצון מתקבל רק בנקודות קריטיות, **עם זאת**, לא כל נקודה קריטית היא נקודת קיצון.

למשל:

$$(x=0) \quad f(x) = x^3$$

$$(x=0) \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

- נשים לרגע בצד את מה שקורה בקצוות הקטע, ונעסוק רק בנקודות קריטיות פנימיות.
נציג שני כלים שמאפשרים לקבוע אם נקודה קריטית (פנימית) היא נקודת קיצון או לא.

משפט - המבחן הישיר

תהי f פונקציה ממשיית הרציפה באינטרוול I , ותהי $c \in I$ הנקודה הקריטית-הפנימית היחידה של f ב- I . יהיו $u, v \in I$ המקיימים $u < c < v$.

- אם $f(c) > f(u)$ וגם $f(c) > f(v)$, אז ל- f יש מקסימום מקומי בנקודה c , ורק בה.
- אם $f(c) < f(u)$ וגם $f(c) < f(v)$, אז ל- f יש מינימום מקומי בנקודה c , ורק בה.
- אחרת, אין ל- f קיצון בנקודה c .

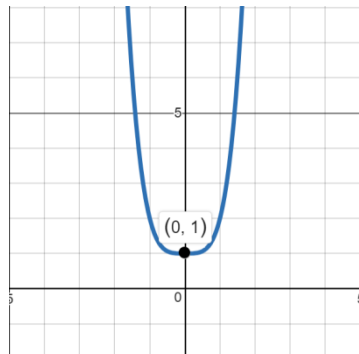
משפט – מבחן הנגזרת השנייה

תהי f פונקציה ממשיית הרציפה באינטרוול I , ותהי $c \in I$ נקודה המקיימת $f'(c) = 0$.

- אם $f''(c) < 0$ אז ל- f יש מקסימום מקומי בנקודה $c \in I$.
- אם $f''(c) > 0$ אז ל- f יש מינימום מקומי בנקודה $c \in I$.

❗ **שימו לב:** אם $f''(c) = 0$ או $f''(c)$ אינו מוגדר, אז המבחן הנ"ל אינו אומר דבר. כלומר, יתכן שיש ל- f קיצון ב- c , ויתכן שלא.

דוגמאות



1. נתבונן בפונקציה $f(x) = x^4 + 1$ בתחום $I = \mathbb{R}$.

נמצא נקודות קריטיות:

מתקיים $f'(x) = 4x^3$ ולכן $x = 0$ היא הנקודה הקריטית

היחידה.

נשתמש במבחן הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = 12x^2$$

מכיוון ש- $f''(0) = 0$, לא ניתן להשתמש במבחן זה, ולכן ניעזר

במבחן הישיר.

מתקיים: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 2$, ולכן הנקודה $(0, 1)$ היא נקודת מינימום

מקומי.

למעשה, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \geq f(0) = 1$ ולכן $(0, 1)$ היא נקודת מינימום

מוחלט.

2. נתבונן בפונקציה $f(x) = x^3 + 3x^2$ בתחום $I = \mathbb{R}$.

נמצא נקודות קריטיות:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

הנקודות הקריטיות הן: $x = 0$, $x = -2$.

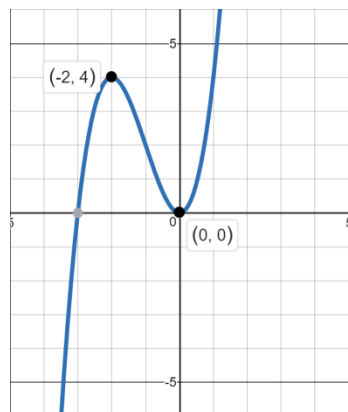
ניעזר במבחן הנגזרת:

מתקיים $f''(x) = 6x + 6$, ומכאן:

$f''(0) > 0$, ולכן הנקודה $(0, 0)$ היא מינימום מקומי.

$f''(-2) < 0$, ולכן בנקודה $(-2, 4)$ יש מקסימום מקומי.

[למעשה, לפונקציה הזאת אין קיצון מוחלט, אך אנו עדיין לא יודעים להראות את זה.]



3. נתבונן בפונקציה $f(x) = 4 - x^{\frac{4}{3}}$ בתחום $I = \mathbb{R}$.

מכיוון ש- $f'(x) = -\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, הנקודה $x = 0$ היא נקודה קריטית יחידה.

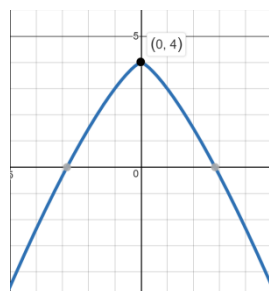
נשתמש במבחן הישיר (מדוע לא במבחן הנגזרת השנייה?).

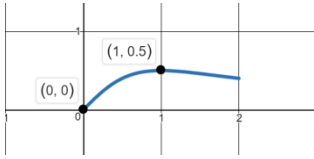
מתקיים: $f(-1) = 3$, $f(0) = 4$, $f(1) = 3$.

לכן בנקודה $(0, 4)$ יש מקסימום מקומי.

למעשה, זהו גם מקסימום מוחלט, שכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x) = 4 - x^{\frac{4}{3}} \leq f(0) = 4$$





4. נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ בתחום $I = [0, 2]$.

יש שתי נקודות קריטיות בקצוות: $x = 0, x = 2$.

נמצא נקודות קריטיות פנימיות:

מכיוון ש- $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, הנקודות הקריטיות הן:

$x = 1, x = -1$. רק $x = 1$ נמצאת בתחום הנתון, וזו גם הנקודה הקריטית-הפנימית

היחידה. נשתמש במבחן הישיר:

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{5}$$

לכן בנקודה $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ יש מקסימום מקומי (וגם מוחלט).

בנוסף, הנקודה $(0, 0)$ היא נקודת מינימום מוחלט (שכן $f(x) \geq 0 = f(0)$ לכל

$$x \in [0, 2]$$

עליה וירידה של פונקציה

הגדרות

1. נאמר ש- f היא פונקציה **קבועה** באינטרוול I אם:
 $\forall x_1, x_2 \in I: f(x_1) = f(x_2)$
2. נאמר ש- f היא פונקציה **עולה** באינטרוול I אם:
 $\forall x_1, x_2 \in I: (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
3. נאמר ש- f היא פונקציה **יורדת** באינטרוול I אם:
 $\forall x_1, x_2 \in I: (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
4. נאמר ש- f היא פונקציה **מונוטונית** באינטרוול I אם f יורדת ב- I או עולה ב- I .

דוגמאות

1. $f(x) = x^3$ היא פונקציה עולה ב- $\mathbb{R}$ ולכן מונוטונית ב- $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2$ היא פונקציה יורדת ב- $(-\infty, 0]$ ועולה ב- $[0, \infty)$. היא מונוטונית בכל אחד מהקטעים הללו, אך היא אינה מונוטונית ב- $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = -x + 2$ היא פונקציה יורדת ב- $\mathbb{R}$ (ולכן מונוטונית שם).

⚡ שימו לב! **עליה וירידה הן תכונות של פונקציה בקטע, ולא תכונות נקודתיות!**
כלומר, הביטוי " f עולה בנקודה a " הוא חסר משמעות!

- כעת ננסח את הקשר בין עליה/ירידה לבין הנגזרת. (נעשה זאת בשני שלבים, כי המשפט השני הוא השימושי יותר, וכדאי לתת לו שם).

טענה

תהי f פונקציה רציפה ב- I ונניח שהיא גזירה בכל נקודה פנימית של I .
אם $f'(x) = 0$ לכל נקודה פנימית של I , אז f קבועה ב- I .

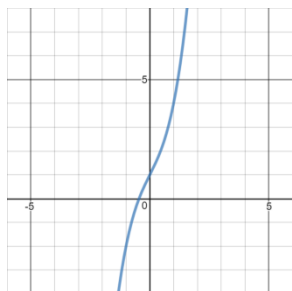
משפט המונוטוניות

תהי f פונקציה רציפה ב- I ונניח שהיא גזירה בכל נקודה פנימית של I .

1. אם $f'(x) > 0$ לכל נקודה פנימית של I , אז f עולה ב- I .
2. אם $f'(x) < 0$ לכל נקודה פנימית של I , אז f יורדת ב- I .

[גם את הטענה וגם את המשפט נוכיח בהמשך, כשיהיה לנו את משפט Lagrange.]

דוגמה



נתבונן בפונקציה $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

מתקיים: $f'(x) = 3x^2 + 2$, ולכן $f'(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

לכן f עולה ב- $\mathbb{R}$.

הערות על המשפט

1. שימו לב לדרישה שהנגזרת תהיה חיובית/שלילית בקטע מסוים. למשל, אם כל מה שאנחנו יודעים זה ש- $f'(a) > 0$ עבור נקודה כלשהי a , אנו לא יכולים להסיק דבר על עליה של הפונקציה בסביבת הנקודה a ! למשל, נתבונן בפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

מתקיים: $f'(0) = 1 > 0$ (בדקו!), ועם זאת, ניתן להראות שאין סביבה של 0

שבה הפונקציה עולה!

2. המשפט מספק תנאי מספיק ולא הכרחי להיות הפונקציה מונוטונית. כלומר, יתכן שפונקציה תהיה עולה בקטע I , ויחד עם זאת לא תקיים את התנאי: $\forall x \in I: f'(x) > 0$.

למשל: $f(x) = x^3$ (כאן הנגזרת מתאפסת ב-0, והפונקציה עולה ב- $\mathbb{R}$).

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (כאן הנגזרת לא קיימת ב-0, והפונקציה עולה ב- $\mathbb{R}$).

למעשה, ניתן להכליל את משפט המונוטויות באופן הבא:

טענה

מסקנת משפט המונוטויות תהיה נכונה גם במקרים בהם הנגזרת מתאפסת או לא מוגדרת במספר כלשהו (סופי או אינסופי) של נקודות מבודדות.

משפט המונוטוניות (המוכלל)²

תהי f פונקציה רציפה ב- I ונניח שהיא גזירה בכל נקודה פנימית של I .

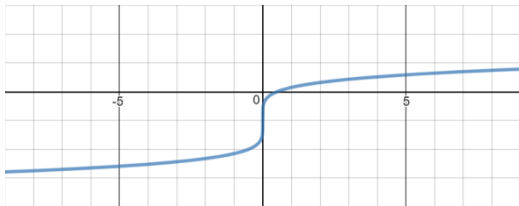
3. אם $f'(x) > 0$ לכל נקודה פנימית של I (פרט אולי למספר כלשהו של נקודות

מבודדות שבהן f' מתאפסת או לא מוגדרת), אז f עולה ב- I .

4. אם $f'(x) < 0$ לכל נקודה פנימית של I (פרט אולי למספר כלשהו של נקודות

מבודדות שבהן f' מתאפסת או לא מוגדרת), אז f יורדת ב- I .

דוגמה



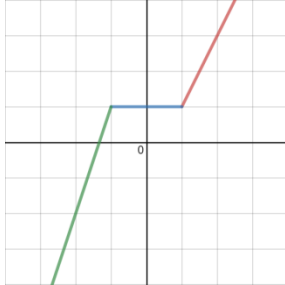
נתבונן בפונקציה $f(x) = (2x)^{\frac{1}{5}} - 1$ בתחום $I = \mathbb{R}$.

מתקיים: $f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(2x)^4}}$, ולכן $f'(x) > 0$ לכל

$x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, וב- 0 הנגזרת לא קיימת.

לכן, לפי משפט המונוטוניות, הפונקציה עולה ב- $\mathbb{R}$.

⚡ שימו לב שמשפט המונוטוניות אינו ישים במקרים שבהם הנגזרת מתאפסת בקטע שלם.



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 3x + 4 & x \leq -1 \end{cases} \quad \text{למשל:}$$

דוגמה למציאת תחומי עליה/ירידה

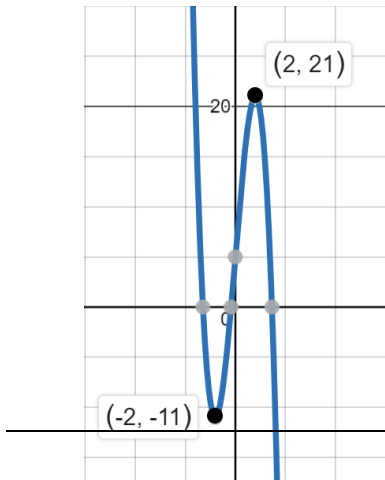
$$f(x) = 5 + 12x - x^3$$

$$f'(x) = 3(4 - x^2)$$

ניתן לראות שהנגזרת חיובית כאשר $-2 \leq x \leq 2$.

לכן f עולה באינטרוול $[-2, 2]$, ויורדת באינטרוולים

$$(-\infty, -2], [2, \infty).$$



²את העמוד הזה לא הספקתי (2017-2018).

הרצאה מס' 15

- תזכורת: בשבוע שעבר הגדרנו קיצון ודיברנו על שני מבחנים שעוזרים להבין אם נקודה קריטית פנימית היא נקודת קיצון או לא (המבחן הישיר ומבחן הנגזרת השנייה). לאחר מכן דיברנו על תחומי עליה וירידה של פונקציה, וכעת נוכל להציג מבחן נוסף.

משפט – מבחן הנגזרת הראשונה

תהי c נקודה קריטית של f המוכלת בקטע פתוח כלשהו (a, b) . נניח ש- f רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) (פרט אולי לנקודה c עצמה). אזי:

- אם במעבר מצד שמאל של c לצד ימין של c הנגזרת f' משנה את סימנה מחיובי לשלילי, אזי c היא נקודת מקסימום מקומי.
- אם במעבר מצד שמאל של c לצד ימין של c הנגזרת f' משנה את סימנה משלילי לחיובי, אזי c היא נקודת מינימום מקומי.
- אם במעבר מצד שמאל של c לצד ימין של c הנגזרת f' לא משנה את סימנה, אזי c אינה נקודת קיצון מקומי.

[הוכחה: באמצעות משפט המונטוניות, אך לא נראה שיהיה לי זמן לעשות זאת, ולכן נסתפק בהסבר אינטואיטיבי.]

- לפני שנמשיך לפונקציות מסובכות יותר, נכיר את הטענה הבאה אשר תעזור לנו לזהות בקלות תחומי עליה וירידה של פונקציות.

טענה³

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) . אם f' מחליפה סימן ב- (a, b) , אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ שעבורה $f'(c) = 0$.

דוגמה

נמצא תחומי עליה/ירידה וקיצון מקומי של הפונקציה $f(x) = x\sqrt[3]{(1-x)^2}$ בתחום $I = \mathbb{R}$.

שימו לב שתחילה יש לבדוק רציפות (כי הדרישה לרציפות מופיעה בכל המבחנים שלמדנו).

ואמנם, f רציפה כהרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות.

$$\text{נמצא נקודות קריטיות: } f'(x) = \frac{3-5x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}}$$

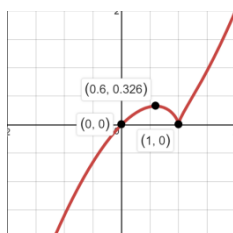
³למעשה, זו מסקנה ישירה ממשפט Darboux, שאותו לא נציג בקורס זה מפאת חוסר זמן.

יש שתי נקודות קריטיות: $x = 1$, $x = 0.6$.

בבנה טבלה שתעזור לנו לרכז את המידע על עליה וירידה.

שימו לב שיש לבדוק את הסימן של הנגזרת בכל אחד מהאינטרוולים $(-\infty, 0.6)$, $(0.6, 1)$, $(1, \infty)$. בכל אחד מהקטעים הללו הפונקציה גזירה, ולכן, לפי טענה קודמת, מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת בנקודה אחת בתוך כל קטע. שכן, אם הסימן של הנגזרת היה משתנה בתוך הקטע, אז לפי הטענה הייתה צריכה להיות נקודה בתוך הקטע הזה שבו הנגזרת מתאפסת, וזה לא המצב.

x	$x < 0.6$	$x = 0.6$	$0.6 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	לא קיים	+
$f(x)$	$\nearrow$	0.326	$\searrow$	0	$\nearrow$



לפי הטבלה רואים כי הפונקציה עולה בקטעים: $[-\infty, 0.6]$, $[1, \infty)$, ויורדת בקטע $[0.6, 1]$.

יש נקודת מינימום מקומי ב- $(1, 0)$ ונקודת מקסימום מקומי ב- $(0.6, 0.326)$.

• נסיים את הפרק "עליה וירידה" במשפט הבא⁴:

משפט

תהי f פונקציה רציפה בקטע I . אם ל- f יש קיצון מקומי יחיד ב- I , אז הוא גם קיצון מוחלט ב- I .

דוגמה

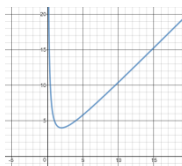
$$f(x) = x + \frac{4}{x} \quad \text{בקטע } (0, \infty).$$

הפונקציה רציפה בקטע הנתון ולכן אם יש לה קיצון מקומי יחיד, הוא גם קיצון מוחלט.

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2} \quad \text{ולכן יש נקודה קריטית יחידה בקטע הנתון: } x = 2.$$

⁴את המשפט הזה לא נוכיח, בעיקר בגלל שאני לא אוהבת אותו, אך גם בגלל ההוכחה (הטרחנית!) שלו שמשתמשת במשפטים שעוד לא למדנו.

x	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$



הנקודה $(2, 4)$ היא נקודת מינימום מקומי, וזהו הקיצון המקומי היחיד, ולכן $(2, 4)$ היא נקודת מינימום מוחלט של f ב- $(0, \infty)$.

קעירות וקמירות

הגדרה

תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 .

- נאמר ש- f **קמורה ב- x_0** אם קיים קטע פתוח המכיל את x_0 שבו הגרף של f נמצא מעל למשיק בנקודה x_0 .
- נאמר ש- f **קעורה ב- x_0** אם קיים קטע פתוח המכיל את x_0 שבו הגרף של f נמצא מתחת למשיק בנקודה x_0 .



[להראות בציור ולהסביר את החשיבות של פונקציות קמורות].

הערות

- שימו לב שקמירות וקעירות הן תכונות נקודתיות (השוו עם עליה וירידה).
- יש הגדרה של קמירות וקעירות שאינה משתמשת בגזירות, אך לצרכי הקורס הנוכחי נסתפק בהגדרה הנ"ל.

הגדרה

נאמר ש- f **קמורה בקטע I** (קעורה בקטע I) אם f קמורה (קעורה, בהתאמה) בכל נקודה של I .

למשל: x^2 , $\sqrt{x}$...

משפט – מבחן קעירות וקמירות

תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע I .

1. אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in I$, אז f קמורה ב- I .

2. אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in I$, אז f קעורה ב- I .

[לתת הסבר גיאומטרי למשפט (עליה וירידה של הנגזרת).]

דוגמה

נמצא תחומי קעירות וקמירות של $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

$$\text{מתקיים: } f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

לכל $x > 0$: $f''(x) < 0$ ולכן הפונקציה קעורה בתחום $(0, \infty)$.

לכל $x < 0$: $f''(x) > 0$ ולכן הפונקציה קמורה בתחום $(-\infty, 0)$.

? שאלה: מה קורה בנקודה $x = 0$ בדוגמה הקודמת?

הגדרה

תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח המכיל את x_0 . אם בנקודה x_0 הפונקציה הופכת מקעורה לקמורה או להיפך, אז הנקודה $(x_0, f(x_0))$ נקראת **נקודת פיתול של f** .

דוגמה

נמצא נקודות פיתול של $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

$$\text{מתקיים: } f''(x) = 6x - 6$$

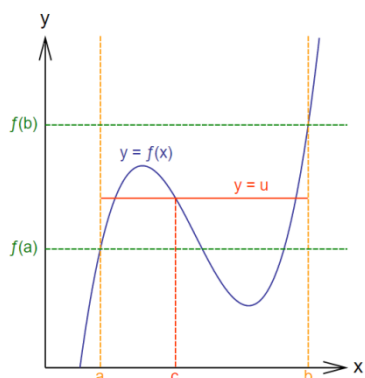
אם $x > 1$ אז $f''(x) > 0$ ולכן הפונקציה קמורה.

אם $x < 1$ אז $f''(x) < 0$ ולכן הפונקציה קעורה.

כלומר, בנקודה $(1, -1)$ יש ל- f נקודת פיתול.

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

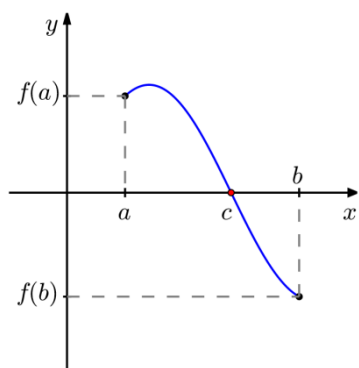
משפט ערך הביניים (Intermediate value theorem)



תהי f פונקציה ממשיית הרציפה בקטע סגור $[a, b]$. אזי f מקבלת את כל הערכים בין $f(a)$ ל- $f(b)$. כלומר, אם u נמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$, אז קיים $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = u$.

למסקנה המיידית הבאה, קוראים לפעמים באותו השם "משפט ערך הביניים":

מסקנה



תהי f פונקציה ממשיית הרציפה בקטע סגור $[a, b]$. אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אזי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = 0$. כלומר, אם הפונקציה חיובית בקצה אחד של קטע ושלילית בקצה השני, קיימת נקודה בתוך הקטע שבה הפונקציה מתאפסת.

הגדרה

נקודה $c \in \mathbb{R}$ נקראת **אפס של פונקציה** f אם $f(c) = 0$.

(לפעמים **אפס** נקרא גם **שורש**).

דוגמה

הוכיחו שלפונקציה $f(x) = e^x - \frac{1}{1+x^2} - 2$ יש אפס ב- $\mathbb{R}$ (אחד לפחות).

קודם כל, הפונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$.

$$\text{מתקיים: } f(0) = -2, f(10) = e^{10} - \frac{1}{101} - 2.$$

כעת, הפונקציה רציפה בקטע $[0,10]$ וכן $f(0) \cdot f(10) < 0$ ולכן, לפי משפט ערך הביניים (להלן: מעה"ב), קיימת נקודה $c \in (0,10)$ שעבורה $f(c) = 0$.

דוגמה

נוכיח לשמשוואה $\sin x = x - 1$ יש פתרון ממשי (אחד לפחות).

נגדיר פונקציה $f(x) = \sin x - x + 1$ ונוכיח שיש ל- f לפחות אפס אחד.

נשים לב שהפונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ ולכן גם בכל תת-קטע שלו. נתבונן בתת-קטע $[0, \pi]$. מתקיים: $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -\pi + 1 < 0$. לכן, לפי מעה"ב, לפונקציה f יש לפחות אפס אחד בקטע $(0, \pi)$. ולכן למשוואה הנתונה יש לפחות פתרון ממשי אחד.

- כדוגמה נוספת לשימוש במשפט ערך הביניים, נוכיח את המשפט הבא (אם נשאר זמן; אם לא – לתת כתרגיל בשיעורי הבית).

משפט

תהי f פונקציה רציפה בקטע I ונניח ש- $f(x) \neq 0$ לכל $x \in I$.

1. אם קיים $a \in I$ שעבורו $f(a) > 0$, אזי $f(x) > 0$ לכל $x \in I$.
2. אם קיים $a \in I$ שעבורו $f(a) < 0$, אזי $f(x) < 0$ לכל $x \in I$.

הוכחה

נוכיח רק את 1.

נניח בשלילה שקיימת נקודה $b \in I$ שעבורה $f(b) < 0$. לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה c בין a ל- b שעבורה $f(c) = 0$ וזו סתירה לנתון.

מש"ל

הרצאה מס' 16

משפט הערך הקיצון של Weierstrass (Extreme Value Theorem)

אם f היא פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, אז f מקבלת מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע זה.

שימו לב: המשפט אינו מבטיח קיום של קיצון מוחלט עבור פונקציות שהן לא רציפות, וגם לא עבור פונקציות רציפות בקטע פתוח! למשל:

$$f(x) = x \text{ בקטע } (0,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ בקטע } (0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ בקטע } [0,1]$$

מציאת קיצון מוחלט:

תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור. לפי משפט וירשטראס, היא צריכה לקבל מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע זה. לפי משפט הנקודה הקריטית ידוע שקיצון מתקבל בנקודה קריטית, ולכן כל מה שצריך לעשות זה למצוא את כל הנקודות הקריטיות ולהשוות בין הערכים של הפונקציה בנקודות אלה.

דוגמה

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x - 1) \text{ בקטע } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \text{ נמצא את הקיצון המוחלט של}$$

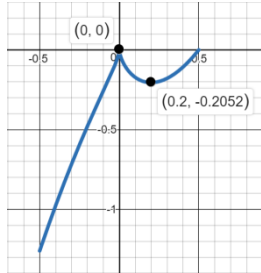
תחילה נשים לב שאכן מדובר בפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן, לפי משפט וירשטראס, היא צריכה לקבל מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע.

$$\text{מתקיים: } f'(x) = \frac{10x - 2}{3x^{\frac{1}{3}}} \text{ ולכן יש שתי נקודות קריטיות פנימיות בתחום: } x = \frac{1}{5}, x = 0.$$

(לא לשכוח שתי נקודות קריטיות בקצוות).

נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקריטיות:

קטנה).
 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.26, f(0) = 0, f\left(\frac{1}{5}\right) = -0.2, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
 (בכיתה כדאי לסדר בטבלה)



מהשוואת הערכים ניתן לראות כי יש מינימום מוחלט בנקודה $(-0.5, -1.26)$, ויש שתי נקודות מקסימום מוחלט בנקודות $(0, 0), (0.5, 0)$.

משפט Rolle

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a, b) . אם $f(a) = f(b)$ אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

הוכחה

מכיוון ש- f רציפה ב- $[a, b]$, היא מקבלת שם את ערכה המקסימלי M ואת ערכה המינימלי m (לפי משפט ויירשטראס).

נתבונן בשני מקרים אפשריים:

1. $M = m$: במקרה זה הפונקציה היא קבועה ולכן לכל $c \in (a, b)$ מתקיים $f'(c) = 0$.

2. $M > m$: במקרה זה אחת הנקודות שבהן מתקבל קיצון היא נקודה פנימית (שכן בקצוות מתקיים $f(a) = f(b)$). נניח בלי הגבלת הכלליות שהמקסימום מתקבל בנקודה פנימית. כלומר, קיימת $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = M$. לפי משפט הנקודה הקריטית חייב להתקיים אחד מהשניים: $f'(c) = 0$ או $f'(c)$ לא קיימת. מכיוון שהפונקציה גזירה ב- (a, b) , נקבל $f'(c) = 0$ כנדרש.

מש"ל

• התנאי של הגזירות חשוב! (למשל: $f(x) = |x|$ בקטע $[-2, 2]$).

דוגמה

נתבונן בפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 1$ בקטע $[-1, 3]$. f רציפה ב- $[-1, 3]$ וגזירה ב- $(-1, 3)$. כמו כן: $f(-1) = f(3) = 2$. לכן, לפי משפט Rolle, קיימת נקודה $c \in (-1, 3)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

דוגמה

נתבונן ב- $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$ בקטע $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. הפונקציה רציפה ב- $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ וגזירה ב- $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. מתקיים: $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$ ולכן, לפי משפט Rolle, קיימת נקודה $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ עבור $f'(c) = 0$.

כלומר, ראינו שבין שני אפסים של הפונקציה, יש אפס של הנגזרת.

למעשה, האבחנה האחרונה נכונה לכל פונקציה גזירה.

שימושים של משפט Rolle - מציאת מספר אפסים של פונקציה

תהי f פונקציה גזירה בקטע פתוח כלשהו. ניתן להשתמש במשפט Rolle על מנת למצוא חסם (מלמעלה) על מספר האפסים של f בקטע זה (כלומר, כמה אפסים יש ל- f לכל היותר).

מקרה פרטי של משפט Rolle

אם f פונקציה גזירה בקטע פתוח I , אז בין כל שני אפסים של f יש אפס של f' .

מסקנות:

1. אם $f'(x) \neq 0$ לכל $x \in I$, אזי ל- f יש לכל היותר אפס אחד ב- I .

2. אם ל- f' יש k אפסים, אז ל- f יש לכל היותר $k+1$ אפסים.

דוגמה

נוכיח שלפולינום $f(x) = 4x^6 + 3x^2 - 1$ יש בדיוק שני שורשים ממשיים.

תחילה נשים לב ש- f רציפה וגזירה ב- $\mathbb{R}$.

- לפחות שני שורשים: נמצא שני קטעים שבהם מתקיימים תנאי מעה"ב. מתקיים: $f(-1) = 6 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 6 > 0$ ולכן, לפי מעה"ב, קימות שתי נקודות $c_1 \in (-1, 0)$, $c_2 \in (0, 1)$ כך ש- $f(c_1) = 0$, $f(c_2) = 0$. כלומר, הוכחנו שלפולינום הנתון יש לפחות שני שורשים ממשיים.
- לכל היותר שני שורשים: נשתמש במסקנה של משפט Rolle. מתקיים: $f'(x) = 6x(4x^4 + 1)$.

הנגזרת מתאפסת פעם אחת בלבד, ולכן לפונקציה יש לכל היותר שני שורשים.
לסיכום, ל- f יש בדיוק שני שורשים ממשיים.

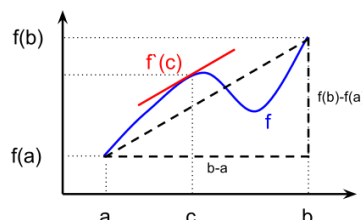
- כעת נשתמש במשפט Rolle על מנת להוכיח את המשפט השימושי הבא:

משפט הערך הממוצע של Lagrange

תהי f פונקציה ממשיה הרציפה על הקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a, b) .

אזי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

משמעות גיאומטרית



הוכחה

תהי f פונקציה ממשיה הרציפה על קטע סגור $[a, b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a, b) .
נסמן ב- $l(x)$ את הישר המחבר את הנקודות $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. נמצא את משוואת

הישר $l(x)$. מתקיים: $l(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. נסמן: $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ונקבל:
 $l(x) = m(x - a) + f(a)$.

כעת נגדיר פונקציה $h(x) = l(x) - f(x)$ ונשים לב שהיא רציפה על $[a, b]$ וגזירה על (a, b) כהפרש של שתי פונקציות רציפות וגזירות. מתקיים:

$$h(a) = l(a) - f(a) = 0, \quad h(b) = l(b) - f(b) = 0$$

לכן, לפי משפט Rolle, קיימת נקודה $c \in (a, b)$ המקיימת $h'(c) = 0$, כלומר

$l'(c) - f'(c) = 0$, ולכן $f'(c) = l'(c)$. לסיכום נקבל $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ כנדרש.

מש"ל

הערה

שימו לב שבמקרה בו $f(a) = f(b)$, משפט הערך הממוצע הופך למשפט רול, שכן:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

דוגמה

$$\text{נוכיח שלכל } 0 < a < b \text{ מתקיים: } \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}$$

נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ בקטע $[a, b]$.

f רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) . לכן, לפי משפט Lagrange, קיימת נקודה $c \in (a, b)$

$$\text{שעבורה מתקיים: } f'(c) = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a}, \text{ כלומר: } \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a}$$

$$\text{כעת, } a < c < b \Rightarrow 2\sqrt{a} < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{b} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\cdot \frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

אם נכפיל הכל ב- $b - a$ (ושימו לב ש- $b - a > 0$), אז נקבל את הדרוש.

- כעת נשתמש במשפט Lagrange על מנת להוכיח את משפט המונוטוניות:

משפט המונוטוניות

תהי f פונקציה רציפה ב- I ונניח שהיא גזירה בכל נקודה פנימית של I .

1. אם $f'(x) > 0$ לכל נקודה פנימית של I , אז f עולה ב- I .

2. אם $f'(x) < 0$ לכל נקודה פנימית של I , אז f יורדת ב- I .

הוכחה

(נוכיח רק את 1.)

יהיו $x_1, x_2 \in I$ המקיימים $x_1 < x_2$. נרצה להוכיח ש- $f(x_1) < f(x_2)$.

נתבונן בקטע $[x_1, x_2]$. לפי משפט Lagrange קיימת נקודה $c \in (x_1, x_2)$ שעבורה מתקיים:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

מכיון ש- c היא נקודה פנימית של I מתקיים $f'(c) > 0$ ולכן

$$0 < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ומקבלים $f(x_2) > f(x_1)$ כנדרש.

מש"ל

אם נשאר זמן (אחרת לתרגול או לתרגיל בית):

הוכחת טורי סינוס וקוסנוס:

④ הוכחת טורי סינוס וקוסנוס: $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: $|\sin x| \leq |x|$

הוכחה:

אחת, שקוף: $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$, שקוף: $-1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

יהי $x \in \mathbb{R}$ נתון ונבטא בסינוס וקוסנוס: $f(t) = \sin t$

נחלק נגזרת:

$x=0$: הטענה טריוויה.

$x > 0$: נתון בסינוס וקוסנוס: $f'(t) = \cos t$. נבטא בסינוס וקוסנוס: $\exists c \in (0, x)$ נקודה פנימית: $\cos c = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$

אכיון: $-1 \leq \cos c \leq 1$, נקודה פנימית.

$x < 0$: נתון בסינוס וקוסנוס: $\dots [x, 0]$

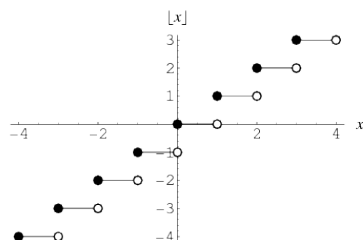
$\exists c \in (x, 0)$: $\cos c = \frac{\sin 0 - \sin x}{0 - x} = \frac{\sin x}{x}$

אכיון: $-1 \leq \cos c \leq 1$, נקודה פנימית.

הרצאה מס' 17

הגדרה

הערך השלם של x הוא המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל- x . כלומר:



$$[x] = \max \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

(סימון נוסף, קצת ישן יותר: $\lfloor x \rfloor$).

למשל: $[8.9] = 8, [5.4] = 5, [0.1] = 0$

הערה: שימו לב ש- $x \in \mathbb{R}$ הוא שלם אמ"מ $[x] = x$.

כאשר מרחיבים את פונקציית הערך השלם $f(x) = [x]$ לכל $x \in \mathbb{R}^*$, מקבלים:

הגדרות

1. מספר **היפר-שלם** הוא מספר $x \in \mathbb{R}^*$ המקיים $[x] = x$. נסמן את קבוצת המספרים ההיפר-שלמים ב- $\mathbb{Z}^*$.
2. מספר **היפר-טבעי** הוא מספר היפר-שלם חיובי. נסמן את קבוצת המספרים ההיפר-טבעיים ב- $\mathbb{N}^*$.

גבולות אינסופיים

תזכורת:

למדנו עד עכשיו שני סוגים של גבולות.

1. גבול בנקודה:
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ אמ"מ לכל $x \in \mathbb{R}^*$ מתקיים: אם $x \approx c \wedge x \neq c$, אז $f(x) \approx L$.
2. גבול חד צדדי בנקודה, למשל:
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ אמ"מ לכל $x \in \mathbb{R}^*$ מתקיים: אם $x \approx c \wedge x > c$, אז $f(x) \approx L$.

היום נלמד שני סוגים חדשים.

הגדרות

יהיו $c, L \in \mathbb{R}$.

1. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם"מ לכל $H \in \mathbb{R}^*$ מתקיים: אם H אינסופי חיובי, אז $f(H) \approx L$.
2. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ אם"מ לכל $x \in \mathbb{R}^*$ מתקיים: אם $x \approx c \wedge x \neq c$, אז $f(x)$ אינסופי חיובי.

- באופן דומה ניתן להגדיר גם את הגבולות הבאים:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$
 [להגדיר שניים מהם לדוגמה.]

דוגמאות

נחשב את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)$
 יהי H אינסופי חיובי. אזי $H^2 + 1$ הוא אינסופי חיובי ולכן $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1) = \infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$
 יהי H אינסופי חיובי. אזי $\frac{1}{H}$ הוא אינפי' ולכן $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$
 יהי $0 \neq \Delta x \approx 0$. מה ניתן להגיד על $\frac{1}{\Delta x}$? התשובה תלויה בסימן של Δx ולכן הגבול אינו קיים.
 ואכן: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. כלומר, הגבולות החד-צדדיים לא קיימים.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$
 יהי $0 \neq \Delta x \approx 0$. אזי $\frac{1}{(\Delta x)^4}$ הוא אינסופי חיובי ולכן $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty$.

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^6}{3 + x^6}$$

יהי H אינסופי חיובי. מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^6}{3 + x^6} = \text{st}_{0 < H \text{ infinite}} \left(\frac{2H^4 - 5H^6}{3 + H^6} \right) = \text{st}_{0 < H \text{ infinite}} \left(\frac{\frac{2}{H^4} - 5}{\frac{3}{H^6} + 1} \right) = -5$$

הערה על אי-קיום גבול

כאשר אומרים שהגבול $\lim f$ בנקודה כלשהי (או באינסוף) אינו קיים, מתכוונים לאחד מהמצבים הבאים:

1. הגבול הוא אינסופי (חיובי או שלילי);
2. הגבול אינו אינסופי ולא קיים $L \in \mathbb{R}$ עבורו $\lim f = L$.

דוגמאות

1. הגבול $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 2x)$ אינו קיים, שכן:

אם H אינסופי שלילי, אז $H^5 - 2H = H(H^4 - 2)$ הוא אינסופי שלילי. כלומר,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 2x) = -\infty$$

2. הגבול $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{x+1}$ אינו קיים. ואכן:

$$\text{הביטוי } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{x+1} = \text{st}_{0 \neq \Delta x \approx 0} \left(\frac{-2}{\Delta x} \right) \text{ תלוי ב-} \Delta x \text{ ולכן הגבול אינו קיים.}$$

3. (דוגמה נוספת למצב השני) הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ אינו קיים.

יהי H אינסופי חיובי. מה ניתן לומר על $\sin(H)$?

אם $H = 2\pi K$ עבור $K \in \mathbb{N}^*$ אינסופי, אזי $\sin(H) = 0$.

אם $H = 2\pi K + \frac{\pi}{2}$ עבור $K \in \mathbb{N}^*$ אינסופי, אזי $\sin(H) = 1$.

מקבלים חלק סטנדרטי שונה עבור H אינסופיים (חיוביים) שונים, ולכן הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ אינו קיים.

כלל לופיטל (l'Hôpital)

הגדרות

1. יהי $c \in \mathbb{R}$. **סביבה של c** היא קטע פתוח המכיל את c .
2. תהי I סביבה של c . אזי $I \setminus \{c\}$ נקראת **סביבה מנוקבת של c** .

למשל: ...

- במשפט הבא הסימון $\lim$ מסמן כל אחד מהגבולות $\lim_{x \rightarrow c}$, $\lim_{x \rightarrow c^\pm}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$.

$\frac{0}{0}$ כלל לופיטל עבור

תהינה f, g שתי פונקציות ממשיות ויהי $c \in \mathbb{R}$. נניח שקיימת סביבה מנוקבת של c בה הנגזרות $f'(x), g'(x)$ קיימות ו- $g'(x) \neq 0$.

נניח ש- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ וגם $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$.

אם $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (או אינסופי), אז גם $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים (אינסופי) ומתקיים

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

דוגמאות

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 4x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 2}$$

[להסביר מדוע מתקיימים כל תנאי משפט לופיטל.]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 4x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{20x^3 - 8x}{3x^2 + 2x} = \frac{12}{5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{x - 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2 + x^3} \quad 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2 + x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\sin(3x)}{2x + 3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9\cos(3x)}{2 + 6x} = -\frac{9}{2}$$

• במשפט הבא הסימון $\lim$ מסמן כל אחד מהגבולות $\lim_{x \rightarrow c}$, $\lim_{x \rightarrow c^\pm}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$.

כלל לופיטל עבור $\frac{\infty}{\infty}$

תהינה f, g שתי פונקציות ממשיות ויהי $c \in \mathbb{R}$. נניח שקיימת סביבה מנוקבת של c בה הנגזרות $f'(x), g'(x)$ קיימות ו- $g'(x) \neq 0$.

נניח שהגבולות $\lim f(x)$ ו- $\lim g(x)$ הם אינסופיים.

אם $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (או אינסופי), אז גם $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים (אינסופי) ומתקיים

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

דוגמאות

נחשב את הגבולות הבאים:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{1-x}} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{1-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{1-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{1-x}} = 0$$

דוגמאות נוספות

נחשב את הגבולות הבאים:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \text{DNE}$$

לכן בתרגיל זה לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל, ויש לפתור בשיטה אחרת (נראה איך פותרים את הגבול הזה בהמשך הקורס).

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \sin x) = \text{DNE}$$

לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל. דרך אחרת:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right) = 1$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \underset{0 < H \text{ infinite}}{\text{st}} \left(\frac{\sin H}{H} \right) = 0$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 + 2x^2}}{3x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 + 2x^2}}{3x - 2} = \underset{0 < H \text{ infinite}}{\text{st}} \left(\frac{\sqrt{5 + 2H^2}}{3H - 2} \right) = \underset{0 < H \text{ infinite}}{\text{st}} \left(\frac{|H| \sqrt{\frac{5}{H^2} + 2}}{H \left(3 - \frac{2}{H}\right)} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

הרצאה מס' 18

כל ההרצאה היום מתרחשת בשדה הממשי. כל הגדלים שיופיעו על הלוח יהיו ממשיים (גם ε ו- δ).

הגדרת הגבול במונחים ממשיים

הגדרה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$. **המרחק בין** a ל- b מוגדר להיות $|a - b|$.

דוגמה

יהיו $x, c, \delta \in \mathbb{R}$. אם המרחק בין x ל- c הוא קטן מ- δ , אז נוכל לרשום: $|x - c| < \delta$.

אם בנוסף $x \neq c$, אז נוכל לרשום: $0 < |x - c| < \delta$.

הערה

שימו לב ש- $|x - c| < \delta$ אמ"מ $c - \delta < x < c + \delta$.

[להדגים הכל בציורים].

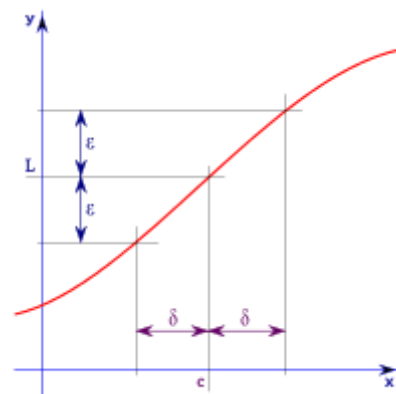
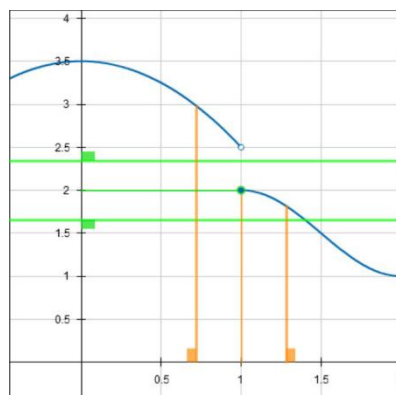
הגדרה

יהיו $c, L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ אם:

לכל מס' ממשי $\varepsilon > 0$, קיים מס' ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

אם $0 < |x - c| < \delta$ אז $|f(x) - L| < \varepsilon$.

כלומר: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$.



דוגמה

נוכיח שמתקיים $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 7$.

יהי $\varepsilon > 0$, נמצא מס' ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים:

$$0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |(4x - 1) - 7| < \varepsilon$$

טיוטה

נתחיל מהסוף, וננסה לבודד את הגורם $|x - 2|$.

$$|(4x - 1) - 7| = |4x - 8| = 4|x - 2|$$

אנו רוצים: $|x - 2| < \varepsilon$ ולכן נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < |x - 2| < \delta$ אז

$$|(4x - 1) - 7| = |4x - 8| = 4|x - 2| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

דוגמה

נוכיח שמתקיים $\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 2x) = 3$.

יהי $\varepsilon > 0$, נמצא מס' ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים:

$$0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |(5 - 2x) - 3| < \varepsilon$$

טיוטה

נתחיל מהסוף, וננסה לבודד את הגורם $|x - 1|$.

$$|(5 - 2x) - 3| = |2 - 2x| = 2|x - 1|$$

אנו רוצים: $|x - 1| < \varepsilon$ ולכן נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < |x - 1| < \delta$ אז

$$|(5 - 2x) - 3| = |2 - 2x| = 2|x - 1| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

דוגמה

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4 \text{ נוכיח שמתקיים}$$

יהי $\varepsilon > 0$, נמצא מס' ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים:

$$0 < |x + 2| < \delta \rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} + 4 \right| < \varepsilon$$

טיוטה

נתחיל מהסוף, וננסה לבודד את הגורם $|x + 2|$.

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} + 4 \right| = |(x - 2) + 4| = |x + 2| \text{ (להזכיר מדוע אפשר לצמצם).}$$

אנו רוצים: $|x + 2| < \varepsilon$ ולכן נבחר $\delta = \varepsilon$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \varepsilon$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < |x + 2| < \delta$ אז

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} + 4 \right| = |(x - 2) + 4| = |x + 2| < \varepsilon$$

דוגמה

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - x + 1) = 7 \text{ נוכיח שמתקיים}$$

יהי $\varepsilon > 0$, נמצא מס' ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים:

$$0 < |x - 2| < \delta \rightarrow \left| (2x^2 - x + 1) - 7 \right| < \varepsilon$$

טיוטה

נתחיל מהסוף, וננסה לבודד את הגורם $|x - 2|$.

$$\left| (2x^2 - x + 1) - 7 \right| = \left| 2x^2 - x - 6 \right| = |x - 2| |2x + 3|$$

אנו רוצים שיתקיים: $|x - 2| |2x + 3| < \varepsilon$, ולשם כך יש "להיפטר" מהגורם $|2x + 3|$, ונעשה זאת באמצעות חסימה.

נניח ש- $\delta \leq 1$ (מדוע אפשר לעשות את ההנחה הזאת?). אם $|x - 2| < \delta$ אזי $|x - 2| < 1$, כלומר $-1 < x - 2 < 1$ ולכן $5 < 2x + 3 < 9$.

זאת אומרת שעבור $\delta \leq 1$ מתקיים $|2x + 3| = 2x + 3 < 9$.

$$\text{חזרה לטיוטה: } \left| (2x^2 - x + 1) - 7 \right| = \left| 2x^2 - x - 6 \right| = |x - 2| |2x + 3| < 9|x - 2|$$

כעת, נרצה שיתקיים $|x - 2| < \varepsilon$ ולכן נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{9} \right\}$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < |x - 2| < \delta$ אז

$$\left| (2x^2 - x + 1) - 7 \right| = \left| 2x^2 - x - 6 \right| = |x - 2| |2x + 3| \underset{\substack{\delta \leq 1 \\ 2x+3 < 9}}{<} 9|x - 2| < 9 \cdot \frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon$$

דוגמה

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x + 5} = \frac{1}{2}$$

נוכיח שמתקיים

יהי $\varepsilon > 0$, נמצא מס' ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים:

$$0 < |x - 1| < \delta \rightarrow \left| \frac{3x}{x + 5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

טיוטה

$$\left| \frac{3x}{x+5} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5x-5}{2(x+5)} \right| = \frac{5}{2} |x-1| \cdot \frac{1}{|x+5|}$$

אנו רוצים שיתקיים: $\frac{5}{2} |x-1| \cdot \frac{1}{|x+5|} < \varepsilon$, ולשם כך יש "להיפטר" מהגורם $\frac{1}{|x+5|}$, ונעשה זאת באמצעות חסימה.

נניח ש- $\delta \leq 1$. אם $|x-1| < \delta$ אזי $|x-1| < 1$, כלומר $-1 < x-1 < 1$ ולכן $6 < x+5 < 8$.

זאת אומרת שעבור $\delta \leq 1$ מתקיים $\frac{1}{8} < \frac{1}{x+5} < \frac{1}{6}$.

$$\left| \frac{3x}{x+5} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5x-5}{2(x+5)} \right| = \frac{5}{2} |x-1| \cdot \frac{1}{|x+5|} < \frac{5}{2 \cdot 6} |x-1|$$

חזרה לטיוטה: $|x-1| < \frac{5}{2 \cdot 6} |x-1|$

כעת, נרצה שיתקיים $\frac{5}{12} |x-1| < \varepsilon$ ולכן נבחר $\delta = \frac{12\varepsilon}{5}$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \min \left\{ 1, \frac{12\varepsilon}{5} \right\}$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < |x-1| < \delta$ אז

$$\left| \frac{3x}{x+5} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5x-5}{2(x+5)} \right| = \frac{5}{2} |x-1| \cdot \frac{1}{|x+5|} \stackrel{\delta \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x+5|} < \frac{1}{6}}{<} \frac{5}{2 \cdot 6} |x-1| < \frac{5}{12} \cdot \frac{12\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

סוגים נוספים של גבולות

הגדרות

יהיו $c, L \in \mathbb{R}$.

1. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ אם:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < x - c < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

2. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(x > B \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

3. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ אם:

$$(\forall A > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - c| < \delta \rightarrow f(x) > A)$$

מההגדרות הנ"ל אפשר להסיק הגדרות נוספות, למשל:

נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ אם: $(\forall A > 0)(\exists B < 0)(\forall x \in \mathbb{R})(x < B \rightarrow f(x) > A)$.

דוגמה

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = 0 \text{ נוכיח שמתקיים}$$

יהי $\varepsilon > 0$, נמצא מס' ממשי $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים:

$$0 < x - 3 < \delta \rightarrow |\sqrt{x^2 - 9} - 0| < \varepsilon$$

טיוטה

$$|\sqrt{x^2 - 9} - 0| = |\sqrt{(x-3)(x+3)}| = \sqrt{(x-3)(x+3)}$$

נחסום את הגורם $x + 3$.

נניח ש- $\delta \leq 1$. אם $0 < x - 3 < \delta$ אזי $0 < x - 3 < 1$, כלומר $6 < x + 3 < 7$ ולכן.

$$|\sqrt{x^2 - 9} - 0| = |\sqrt{(x-3)(x+3)}| = \sqrt{(x-3)(x+3)} < \sqrt{7(x-3)}$$

רוצים שיתקיים $\sqrt{7(x-3)} < \varepsilon$ ולכן נבחר $\delta = \frac{\varepsilon^2}{7}$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon^2}{7} \right\}$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $0 < x - 3 < \delta$ אז

$$\left| \sqrt{x^2 - 9} - 0 \right| = \left| \sqrt{(x-3)(x+3)} \right| = \sqrt{(x-3)(x+3)} < \sqrt{7(x-3)} < \sqrt{7 \cdot \frac{\varepsilon^2}{7}} = \varepsilon$$

דוגמה

נוכיח שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \infty$

יהי $A > 0$ ונמצא $B > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים: $x > B \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} > A$

טיוטה

$$\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} > x \quad x > 0 \rightarrow \frac{1}{x} > 0$$

רוצים שיתקיים $x > A$ ולכן נבחר $B = A$.

הוכחה

יהי $A > 0$ ונבחר $B = A$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: אם $x > B$ אז

$$\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} > x > B = A \quad x > 0 \rightarrow \frac{1}{x} > 0$$

הרצאה מס' 19

הערה/תזכורת

① תרי (ע"א) נק' על מעגל היחידה שנקבע
כמרחק θ מהנקודה (1,0) (נגד כיוון השעון).

אז: $x = \cos \theta, y = \sin \theta$

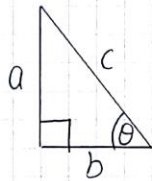
② קאשקש ישר זוית:

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$

$$\cot \theta = \frac{b}{a}$$



תכונות

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad ①$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1, -1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad ②$$

$$\sin \theta, \cos \theta \text{ הן פונקציות מחזוריות} \quad ③$$

עם מחזור 2π :

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \sin(\theta + 2\pi n) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$$

סמכות, $\cot \theta$ מחזוריות עם מחזור π .
④ (הקטנות) (הקטנים) אינם קיימים:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \cos \theta$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \sin \theta$$

הרצאה מס' 19

פונקציות טריגונומטריות

• נקודת המפגש של המעגל היא נקודת

$$\text{היחידה } x^2 + y^2 = 1 \text{ שמרכז}$$

בראשית הצירים ורדיוסו 1.

• עקיר שתי נק' P, Q על מעגל

היחידה נסמן:

$\widehat{PQ}$ - קשת שמחזירה ב- P

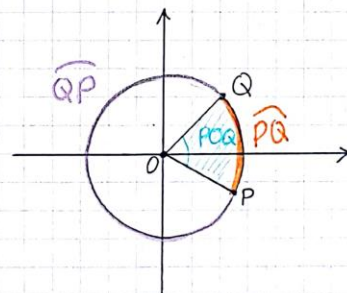
ומסתיימת ב- Q (נגד כיוון השעון)

$\angle POQ$ - זווית

$\angle POQ$ - ג'ג'קד: השטח החסום בין

הקשת $\widehat{PQ}$ לבין שני הרדיוסים

OP, OQ .



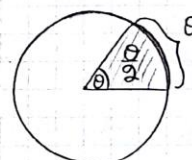
הערה

① גודל (זווית) $\angle POQ$ (רדיוס)

הוא אורך הקשת $\widehat{PQ}$.

② אורך: הקשת $\widehat{PQ}$ שווה $2A$

כאשר A זה שטח (הצורה) POQ .



$$\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{מקיים}$$

$$[(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]$$

$$0 \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq \frac{\Delta S}{\Delta y}$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \Delta S \leq \frac{1}{2} \Delta \theta$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \Delta S \leq \Delta \theta \quad \text{אז}$$

ΔS אינר'.

$$\text{מקיים } 0 \leq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \leq (\Delta S)^2 \quad \text{אז}$$

$\Delta x, \Delta y$ אינר'.

נ"ל

• בעת הנטרה היא זכוכית שהפועק' הנ"ל
גזירות, אד' רשע' כן נבטד' את הטענה
הנכונה:

טענה

$$① \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$② \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

שימו' שכל נע' לזכור את הנכונות
הנכונה באמצעות כל' Hospital,
שכן כל יום שימו' הנכונות של
הטענה, ואילו אינ' נשמע' הנכונות הנ"ל
כל מנע' לזכור שהטענה הנכונה נא להגדירות.

⊙

טענות שיש להוכיח

$$① \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$② \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$③ \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$④ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$⑤ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$⑥ \sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

$$⑦ \cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$⑧ \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$⑨ \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

גזירות וזכירות

משפט

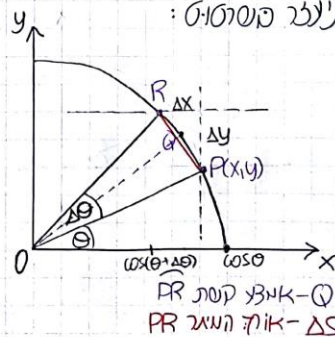
הגזירות והזכירות $y = \sin \theta$, $x = \cos \theta$
גזירות לכל $\theta \in \mathbb{R}$.

אם נע' הוחר' באומות עבוד
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

הוכחה

יהי θ אינר' ונראה ש-
 $\Delta x, \Delta y$ הם גם אינר'.

נע' בסרטוט:



(2) יהי $0 \neq \Delta\theta \approx 0$

$$\text{st}\left(\frac{\cos(\Delta\theta)-1}{\Delta\theta}\right) =$$

$$\text{st}\left(\frac{\cos^2\Delta\theta-1}{\Delta\theta(\cos\Delta\theta+1)}\right) =$$

$$\text{st}\left(\frac{-\sin^2\Delta\theta}{\Delta\theta(\cos\Delta\theta+1)}\right) =$$

$$-\text{st}\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right) \cdot \text{st}\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\cos\Delta\theta+1}\right) =$$

$$-1 \cdot \frac{0}{2} = 0.$$

סגור

דבר
 ופונקציות $y = \sin\theta$, $x = \cos\theta$ זוגות
 $\theta \in \mathbb{R}$ ו/או $\theta \in \mathbb{R}$ זוגות:

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \cos\theta$$

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$$

הוכחה

נניח עבור $\sin\theta$ ויהי $0 \neq \Delta\theta \approx 0$ אז:

$$\frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \text{st}\left(\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}\right) =$$

$$\text{st}\left(\frac{\sin\theta\cos\Delta\theta + \sin\Delta\theta\cos\theta - \sin\theta}{\Delta\theta}\right) =$$

$$\text{st}\left(\frac{\sin\theta(\cos\Delta\theta-1)}{\Delta\theta} + \frac{\sin\Delta\theta\cos\theta}{\Delta\theta}\right) =$$

$$= \sin\theta \cdot \text{st}\left(\frac{\cos\Delta\theta-1}{\Delta\theta}\right) + \cos\theta \cdot \text{st}\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right) =$$

$$\sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1 = \cos\theta.$$

אתונהגות של $x = \cos\theta$ נשאיר כהנהגה.

סגור

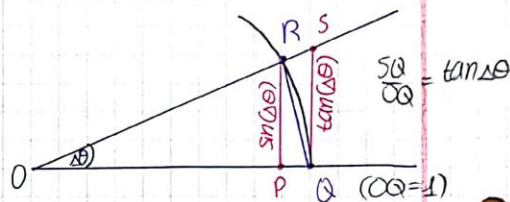
3

הוכחה

(4) נראה של $0 \neq \Delta\theta \approx 0$ מתקיים

$$\text{st}\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right) = 1$$

נניח כהנהגה $0 < \Delta\theta < \frac{\pi}{2}$ (וההוכחה
 $\Delta\theta < 0$ מוכנה באופן דומה).
 נרשום כהנהגה ונראה:



מתקיים:

משפט השני $\angle QOR < \angle ROR < \angle QOR$

זכור:

$$\frac{\sin\Delta\theta}{2} < \frac{\Delta\theta}{2} < \frac{\tan\Delta\theta}{2}$$

נחלק את אי-השוויון ב- $\sin\Delta\theta$

(שמוציא $0 < \Delta\theta < \frac{\pi}{2}$ וזכור)

משפט חידושי.

$$1 < \frac{\Delta\theta}{\sin\Delta\theta} < \frac{1}{\cos\Delta\theta}$$

$$1 > \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} > \cos\Delta\theta$$

$$\text{st}(1) \geq \text{st}\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right) \geq \text{st}(\cos\Delta\theta)$$

$\cos\theta$ יש פונקציה רציפה וזכור
 $\cos\Delta\theta \approx 1$

$$\text{st}\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right) = 1 \quad \text{זכור}$$

7.11.2018

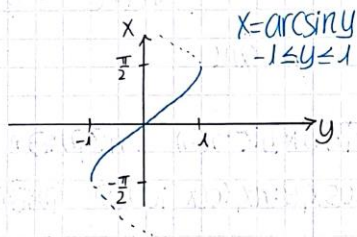
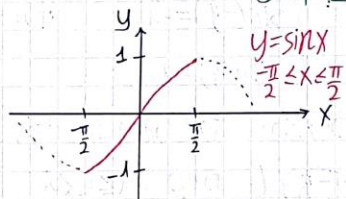
$$\frac{d(\tan \theta)}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{d(\cot \theta)}{d\theta} = \frac{-1}{\sin^2 \theta}$$

MS or PC PNN 3 NK JICIT

ציור - $\sin x$

הפונקציה $y = \sin x: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ אינה חתך, שם (לא שם) $\sin 0 = \sin \pi$ עם טעות, בסך הכל $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ הפונקציה $y = \sin x$ עולה (כי הנגזרת שלה חיובית שם) ולכן הפונקציה המבוטאת $\sin x: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ קיימת הפונקציה הפסיבית שנקראת ארכסינוס.



הערה

אומרת שהפונקציה המבוטאת הפסיבית (כדף) (הסתמנה על המשפט (האחרון) אק: במשפט אחת הברישות היא ש- y יהיה התמונה של f , אני יודעים ש- $-1 \leq \sin x \leq 1$, אף האם היא אכן מקבלת כל ערך ב- $[-1, 1]$?

פונקציות טריגונומטריות והפונקציות

ספרת הנכחי, פויטר נותן

$\gamma: X \rightarrow Y$ נתון ארץ ש-

X הוא תחום ההגדרה של f

!- γ הוא התמונה של f

(כל הערכים של f מקבלת).

תכונות:

$\gamma: X \rightarrow Y$ היא חתך אומ"א

$x_1 \neq x_2 \in X$ מתקיים $f(x_1) \neq f(x_2)$

משפט

$\gamma: X \rightarrow Y$ הפסיב אומ"א

f חתך.

מסקנה

אם f עולה או יורדת על X ,

אזי f הפסיב.

הוכחה

יהיו $x_1 \neq x_2 \in X$. נניח סתם כי $x_1 < x_2$.

אזי אם f עולה מתקיים

$f(x_1) < f(x_2)$, ואם היא יורדת

מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$, וכל

מקרה $f(x_1) \neq f(x_2)$.

מש"ל

שינוי: ♥

תחום ההגדרה של f שווה לתחום של f' .

פונקציה, אם $\cos x: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
אז $\arccos y: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

• כעת נזכיר (בדיוק) שונה) את המשפט הבא:

משפט-הנצירה של הפונקציה ההפוכה

רעיון $y=f(x)$ פונקציה ממשית

הנצירה I אינטרוואל פתוח

על f הפיכה וההפיכה שלה

היא $g(x=g(y))$

רעיון $x \in I$ נקודה שבה $f'(x) \neq 0$ אז:

$$(1) \quad g'(y) \text{ קיימת}$$

$$(2) \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

• כהנצירות קבוצות נוספות את המשפט
באופן שבו (1) הוא אחד התנאים,
אז לא נעשה כל משהו שאפשר להוכיח
(לא נעשה זאת).

• המשפט אומר שהפונקציות הטריגונומטריות
ההפוכות הן גזירות, ונגזרת נחשבת את
הנגזרת שלהן.

טענה

התמונה של $y=\sin x$ היא

הקטע $[-1, 1]$.

הוכחה

יהי $c \in [-1, 1]$ ונמצא $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ שכיים

$$\sin x = c$$

הפונקציה $y=\sin x$ רציפה ב- $\mathbb{R}$

ולכן, כפוט, רציפה ב- $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{cases} \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

ולכן, לפי המשפט צייד הפערים,

לכל $-1 \leq c \leq 1$ קיים $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin x = c$$

אנחנו

שאר הפונקציות הטריגונומטריות

למשל $\cos x, \tan x, \cot x$

אינם חלוצ בתחום הגדרתם, אז

לכל כמקרה שכן נמצינו את

התחום ולקבל פונקציות הפוכות.

הפונקציה $y=f(x)$	תמונה של y	תחום בו y הפיכה	ההפיכה $x=f(y)$
$y=\sin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x=\arcsin y$
$y=\cos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$x=\arccos y$
$y=\tan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$x=\arctan y$
$y=\cot x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$	$x=\text{arccot } y$

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} =$$

$$1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$\hookrightarrow$ "SIN

(*) יבול אריות שמוסוף נש
תחצאה תכאור יעבור
סמחצאה 20

סבסN

$$① \frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$$

$$② \frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d(\operatorname{arccot} x)}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

דומה

עכור עכור $\arcsin x$ $\arctan x$

$$y = \arcsin x$$

$$\begin{cases} x = \sin y & \text{חוקים} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} & \text{(קטע פתיח)} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos y}$$

וכעת (קטע) את $\cos y$ קאנציות
x

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$0 < \cos y < 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \text{נ"ן}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctan x : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = \tan y & \text{חוקים} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

הרצאה מס' 20

הפונקציה המעריכית

המטרה: להגדיר ביטויים כמו $2^{\sqrt{3}}$.

הגדרה

נגדיר את קבוצת המספרים **ההיפר-רציונאליים**: $\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}^*, b \neq 0 \right\}$.

טענה

לכל $r \in \mathbb{R}$ קיים מספר היפר-רציונאלי $q \in \mathbb{Q}^*$ כך ש- $q \approx r$.

הוכחה

יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי $H \in \mathbb{N}^*$ אינסופי כלשהו. נגדיר: $K = \lfloor Hr \rfloor$ ונשים לב ש- $K \in \mathbb{Z}^*$.

מתקיים $K \leq Hr < K+1$ ולכן $\frac{K}{H} \leq r < \frac{K}{H} + \frac{1}{H}$. מכיוון ש- $\frac{K}{H} \approx \frac{K}{H} + \frac{1}{H}$ נקבל ש- $r \approx \frac{K}{H}$ [מדוע?]. נבחר $q = \frac{K}{H}$ ונקבל את הדרוש.

מש"ל

• כעת ניתן להוכיח את הטענה הבאה:

טענה (מוגדרות החזקה)

יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ ויהי $r \in \mathbb{R}$.

1. קיים מספר היפר-רציונאלי $\frac{H}{K}$ שקרוב אינסופית ל- r .

2. החזקה $a^{\frac{H}{K}}$ מוגדרת וסופית.

3. אם $\frac{L}{M}$ הוא מספר היפר-רציונאלי נוסף שקרוב אינסופית ל- r , אזי

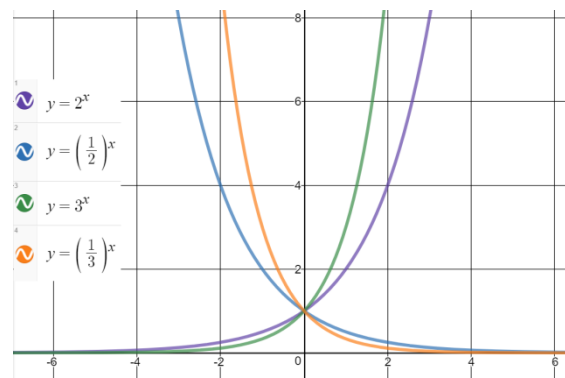
$$\text{st} \left(a^{\frac{H}{K}} \right) = \text{st} \left(a^{\frac{L}{M}} \right)$$

- הטענה הזאת מאפשרת את ההגדרה הבאה:

הגדרה

יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ ויהי $r \in \mathbb{R}$. אזי $a^r = \text{st} \left(a^{\frac{H}{K}} \right)$ כאשר $\frac{H}{K}$ הוא היפר-רציונאלי (כלשהו) שקרוב אינסופית ל- r .

ההגדרה הנ"ל מאפשרת להגדיר את הפונקציה המעריכית עם בסיס a :
 $y = a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$



טענה

$y = a^x$ היא פונקציה עולה עבור $a > 1$ ויורדת עבור $0 < a < 1$.

למשל:

אם $a < b$, אז מתקיים: $e^a < e^b$ ו- $0.5^a > 0.5^b$.

גבולות שצריך להכיר

אם $a > 1$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

אם $0 < a < 1$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$.

למשל: נחשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3^x}{5^{x+1}}$

[להסביר למה לא כדאי לופיטל.]

יהי H אינסופי חיובי. מתקיים: $0 \approx \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^H - 3^H}{5^{H+1}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^H - \left(\frac{3}{5}\right)^H}{5}$, ולכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3^x}{5^{x+1}} = 0$$

משפט

יהי $0 < a \in \mathbb{R}$. הפונקציה $y = a^x$ רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכחה

(נוכיח עבור המקרה $a > 1$.)

תהי $c \in \mathbb{R}$ נקודה כלשהי, ונוכיח רציפות ב- c . יהי $x \approx c$ ונוכיח $a^x \approx a^c$.

בלי הגבלת הכלליות נניח ש- $x < c$.

יהי $r_1 \in \mathbb{Q}^*$ המקיים $x \approx r_1$, ויהי $r_2 \in \mathbb{Q}^*$ המקיים $c \approx r_2$.

כלומר $r_1 < x < c < r_2$ ומתקיים $r_1 \approx x \approx c \approx r_2$.

מכיוון שהפונקציה $y = a^x$ עולה, נקבל: $a^{r_1} < a^x < a^c < a^{r_2}$ ולכן

$$\text{st}(a^{r_1}) \leq \text{st}(a^x) \leq \text{st}(a^c) \leq \text{st}(a^{r_2})$$

לפי טענה (מוגדרות החזקה) מתקיים $\text{st}(a^{r_1}) = \text{st}(a^{r_2})$ ולכן $\text{st}(a^x) = \text{st}(a^c)$ כנדרש.

מש"ל

פונקצית הלוגריתם

יהי $0 < a \in \mathbb{R}, a \neq 1$. הפונקציה $y = a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ היא הפיכה [מדוע?] וההפוכית

שלה היא פונקציית הלוגריתם עם בסיס a : $x = \log_a y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

כלומר: $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$.

למשל: $\log_a 1 = 0$ שכן $a^0 = 1$.

הערה: מסמנים $\log_e x = \ln x$.

הערה על תחום הגדרה

שימו לב שבמקרים הבאים הביטוי $\log_a y$ אינו מוגדר:

1. $y \leq 0$

2. $a = 1$

3. $a \leq 0$

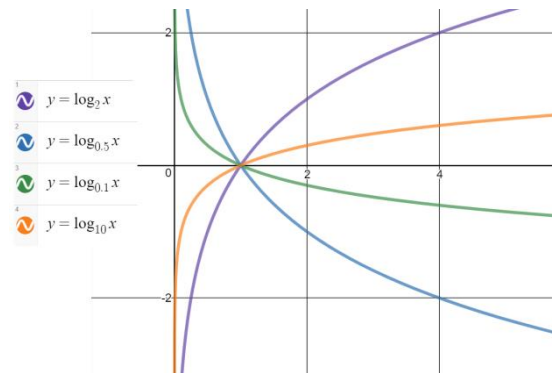
למשל: תחום ההגדרה של $f(x) = \log_{x-2}(2x+5)$ הוא:

$(3 \neq x > 2)$ (כלומר: $2x+5 > 0 \wedge x-2 > 0 \wedge x-2 \neq 1$)

ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט

יהי $0 < a \in \mathbb{R}, a \neq 1$. הפונקציה $y = \log_a x$ רציפה לכל $x \in (0, \infty)$.



משפט

יהי $0 < a \in \mathbb{R}, a \neq 1$. הפונקציה $y = \log_a x$ עולה עבור $a > 1$ ויורדת עבור $0 < a < 1$.

[נובע כמסקנה מעליה/ירידה של $y = a^x$]

גבולות שצריך להכיר

אם $a > 1$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$.

אם $0 < a < 1$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$.

נוכיח את אחד הגבולות:

יהי $a \in \mathbb{R}$, $1 < a$ ונוכיח ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$.

יהי H אינסופי חיובי ונראה ש- $\log_a H$ אינסופי חיובי.

מכיוון ש- $H > 1$ ו- $\log_a x$ עולה, מתקיים $\log_a H > \log_a 1$ ולכן $\log_a H > 0$.

נניח בשלילה ש- $\log_a H$ סופי, כלומר קיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש- $\log_a H < r$. מכיוון שהפונקציה $y = a^x$ היא עולה, נקבל ש- $a^{\log_a H} < a^r$, כלומר $H < a^r$ וזו סתירה לכך ש- H אינסופי חיובי.

מש"ל

חוקי לוגריתמים

יהיו $0 < a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a, b \neq 1$ ויהיו $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

$$1. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$2. \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$3. r \in \mathbb{R} \text{ לכל } r \cdot \log_a x = \log_a x^r$$

$$4. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

נגזרות

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

הרצאה מס' 21

הערה על מספר אוילר

המספר e הוא קבוע מתמטי שערכו בערך $2.71828\dots$. ניתן להגדיר אותו בכל אחת משתי הדרכים הבאות:

$$1. \quad e \text{ הוא המספר הממשי היחיד שמקיים } \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

$$2. \quad e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$\text{כלומר: } e = \text{st} \left(1 + \frac{1}{H}\right)^H \text{ לכל } H \text{ אינסופי חיובי.}$$

דוגמה

$$\text{נחשב את הגבול הבא: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x.$$

יהי H אינסופי חיובי. מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x = \text{st} \left(\left(1 + \frac{2}{H+1}\right)^H \right) = \text{st} \left(\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{H+1}{2}\right)}\right)^{\frac{H+1}{2}} \right)^{\frac{2H}{H+1}} = \text{st} \left(e^{\frac{2H}{H+1}} \right) = e^2$$

סדרות

באופן אינטואיטיבי, סדרה היא רשימה של מספרים. למשל: $-2, 0, 1, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, \dots$.

הגדרה

סדרה אינסופית היא פונקציה $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

הערכים $a(1), a(2), a(3), \dots$ נקראים "איברי הסדרה" ואנו נסמן אותם ב- $a_1, a_2, a_3, \dots$.

האיבר a_n נקרא **האיבר הכללי** או **האיבר ה-n-י** של הסדרה.

למשל: נתבונן בסדרה שנוצרת על-ידי הפונקציה $a(n) = \frac{1}{n}$. האיבר הכללי הוא $a_n = \frac{1}{n}$.

ואיברי הסדרה הם: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$.

למשל: $a_1 = 1, a_4 = \frac{1}{4}$.

סימון

אנחנו נסמן את הסדרה באמצעות סוגריים עגולים: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$.

למשל:

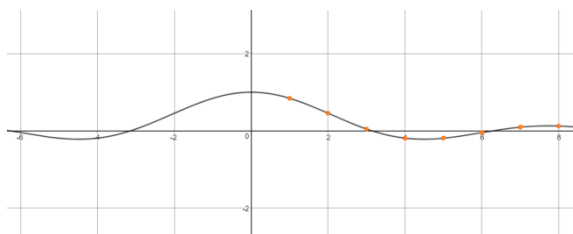
$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \quad \left(\frac{1}{n}\right)_{n=5}^{\infty} = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

דוגמאות לסדרות [עם ציורים מתאימים].

1. הסדרה שמתאימה לאיבר הכללי $a_n = 1$ היא: $1, 1, 1, \dots$.

2. הסדרה שמתאימה לאיבר הכללי $a_n = n$ היא: $1, 2, 3, \dots$.

3. $(-2n)_{n=1}^{\infty} = -2, -4, -6, \dots$.



$$\left(\frac{n}{n-3}\right)_{n=4}^{\infty} = 4, \frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \dots \quad 4.$$

$$\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \sin(1), \frac{\sin(2)}{2}, \frac{\sin(3)}{3}, \dots \quad 5.$$

סדרה עם סימנים מתחלפים

$$a_n = (-1)^n, -1, 1, -1, 1, \dots$$

מתקיים: $a_{2n} = 1, a_{2n-1} = -1$.

עצרת

הביטוי $n!$ מוגדר להיות המכפלה של n הטבעיים הראשונים. כלומר: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots$.

$$(n!)_{n \in \mathbb{N}} = 1!, 2!, 3!, 4!, \dots = 1, 2, 6, 24, \dots$$

[בנוסף, מגדירים $0! = 1$.]

הערה

שימו לב ש- $a_{n+1} \neq a_n + 1$!

$$\text{למשל, אם } a_n = \frac{1}{n}, \text{ אז } a_n + 1 = \frac{1}{n} + 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

[הקדמה כללית להגדרה הבאה.]

הגדרה

1. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **מתכנסת לגבול** $L \in \mathbb{R}$ אם לכל מספר היפר-טבעי

$$a_H \approx L \text{ מתקיים } H \text{ אינסופי}^5.$$

L נקרא **הגבול של הסדרה** ומסמנים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, או בקיצור $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

⁵**הערה למתרגלים:** אשמח אם תכניסו לשיעורי הבית תרגיל שבו הם מתבקשים להוכיח שאם סדרה מתכנסת, אז הגבול שלה הוא יחיד. זה די פשוט עבורם, לא? במיוחד עם אינפיניטסימלים...

2. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **מתבדרת** אם היא אינה מתכנסת לאף מספר ממשי.

כלומר, אם לא קיים $L \in \mathbb{R}$ שעבורו $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

• ישנם שני סוגים מיוחדים של התבדרות:

א. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **מתבדרת לאינסוף** אם לכל מספר היפר-טבעי

אינסופי H מתקיים ש- a_H אינסופי חיובי.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

ב. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **מתבדרת למינוס אינסוף** אם לכל מספר היפר-

טבעי אינסופי H מתקיים ש- a_H אינסופי שלילי.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

דוגמאות

1. הסדרה המוגדרת על-ידי $a_n = 2$ מתכנסת ל-2. ואמנם, לכל H היפר-טבעי

אינסופי מתקיים: $a_H = 2 \approx 2$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

2. הסדרה $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת ל-1. ואמנם, לכל H היפר-טבעי אינסופי מתקיים:

$$a_H = \frac{H+1}{H} = \frac{1 + \frac{1}{H}}{1} \approx 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

3. הסדרה $a_n = n - 2$ מתבדרת לאינסוף. ואמנם, לכל H היפר-טבעי אינסופי

מתקיים: $a_H = H - 2$ הוא אינסופי חיובי.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 2) = \infty$$

4. הסדרה $a_n = 1 - 5n$ מתבדרת למינוס אינסוף. ואמנם, לכל H היפר-טבעי אינסופי

מתקיים: $a_H = 1 - 5H$ הוא אינסופי שלילי.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 5n) = -\infty$$

5. נוכיח שהסדרה $a_n = (-1)^{n+1}$ מתבדרת.

נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת מתכנסת ל- $L \in \mathbb{R}$ כלשהו. אזי, לכל H היפר-

טבעי אינסופי מתקיים: $a_H \approx L$.

יהי K היפר-טבעי אינסופי כלשהו. אזי: $a_{2K} = -1, a_{2K+1} = 1$, בסתירה לכך ש-

$$a_{2K} \approx L \wedge a_{2K+1} \approx L$$

6. הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת לאפס. ואמנם, יהי H היפר-טבעי אינסופי. מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \text{st} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$$

הערה

שימו לב שכאשר מדברים על גבול של סדרה, תמיד מדברים על גבול באינסוף!
[להסביר למה לא מעניין לשאול על גבול בנקודה.]

הערה

מעכשיו אם H הוא היפר-טבעי אינסופי, נכתוב $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

טענה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$$

הוכחה

יהי $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ ונוכיח ש- $H!$ הוא אינסופי חיובי.

לכל $n > 1$ מתקיים $n > n!$, ולכן $H! > H$ ומכאן נקבל ש- $H!$ אינסופי חיובי.

מש"ל

קשר בין סדרות לפונקציות

טענה

תהי f פונקציה ממשית ונניח ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ הביטוי $f(n)$ מוגדר, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$.

- הטענה נכונה גם במקרים בהם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$.
- משמעות הטענה: אם סדרה כלשהי "נולדה" מפונקציה שאת גבולה באינסוף אנו כבר יודעים, אז אפשר להסיק את הגבול של הסדרה.
- אזהרה: אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ אינו קיים, לא ניתן להסיק כלום על $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.

דוגמאות

1. הוכחנו ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty$.
2. נניח שאנו רוצים לחשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n^2}{2n^2}$. דרך אחת לעשות זאת היא לחשב את הגבול המתאים: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{2x^2}$. מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{2x^2} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$.
לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$.
3. ראינו ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ובשיעורי הבית תוכיחו ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$. לכן:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \text{לכל } a \in \mathbb{R}.$$
4. דוגמה למצב שבו הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ לא קיים:
הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(2\pi x)$ לא קיים (מדוע?). עם זאת, מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0$.

הרצאה מס' 22 - סדרות (המשך)

בשבוע שעבר סיימנו את ההרצאה בטענה הבאה:

טענה

תהי f פונקציה ממשית ונניח ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ הביטוי $f(n)$ מוגדר, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$.

בשיעורי הבית השבוע אתם מוכיחים ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$. מכיוון שהביטוי $x^{\frac{1}{n}}$ מוגדר לכל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

כעת נראה איך אפשר להיעזר בסדרות על מנת להוכיח משהו על גבול של פונקציה.

קריטריון Heine להתכנסות

נאמר ש- L הוא הגבול של f בנקודה c אם **לכל** סדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ ו- $a_n \neq c$ (לכל $n \in \mathbb{N}$) מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$.

(הטענה נכונה גם כאשר מחליפים את L ב- ∞ או ב- $-\infty$).

• הקריטריון שימושי במיוחד כאשר רוצים להוכיח שגבול כלשהו לא קיים.

דוגמה

נתבונן בפונקצית דיריכלה: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. נוכיח שהגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ לא קיים.

ניקח שתי סדרות שמתכנסות לאפס: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{\pi}{n}$. מתקיים:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\pi}{n}\right) = -1$ ומצד שני $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. ולכן הגבול לא קיים.

✚ כעת המטרה היא ללמוד לחשב גבולות כמו $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!}{2^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^{200}}$ (להסביר מדוע

במקרה הראשון לא משתלם להשתמש בפונקציות, ובמקרה השני להסביר מדוע אין בכלל פונקציה מתאימה שבה אפשר להשתמש).

משפט (סדרי גודל)

1. כל אחת מהסדרות הבאות מתבדרת לאינסוף:

$$a_n = n!$$

$$a_n = b^n, b > 1$$

$$a_n = n^c, c > 0$$

$$a_n = \ln(n)$$

2. כל סדרה ברשימה גדלה מהר יותר מהסדרה שמתחתיה ומתקיים:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b^n} = \infty \quad (b > 1)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n^c} = \infty \quad (b > 1, c > 0)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^c}{\ln(n)} = \infty \quad (c > 0)$$

לפני שנוכיח את המשפט, נוכיח טענת עזר שימושית.

למה

לכל K אינסופי חיובי מתקיים: $\frac{\ln(K)}{K} \approx 0$. במילים אחרות: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

הוכחה

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \stackrel{\text{Hopital}}{=} 0$$

מש"ל

הוכחת המשפט

את חלק 1. כבר הוכחנו (בצורה כזאת או אחרת) ולכן נוכיח רק את חלק 2.

יש, למעשה, להראות שעבור $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ הביטויים $\frac{H!}{b^H}, \frac{b^H}{H^c}, \frac{H^c}{\ln(H)}$ הם אינסופיים

חיוביים. אנחנו נראה, במקום זאת, שהביטויים $\ln\left(\frac{H!}{b^H}\right), \ln\left(\frac{b^H}{H^c}\right), \ln\left(\frac{H^c}{\ln(H)}\right)$ הם אינסופיים חיוביים.

[ואכן, נשים לב ש- x אינסופי חיובי אם ורק אם $\ln(x)$ אינסופי חיובי, וזאת כיוון ש-
 $[. x = e^{\ln x}$

(a) יהי $m > b$ מספר שלם סופי כלשהו. מתקיים:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{H!}{b^H}\right) &= \ln(H!) - \ln(b^H) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m + \dots + \ln H - H \ln b \\ &> \ln m + \dots + \ln H - H \ln b > \ln m + \dots + \ln m - H \ln b \\ &= (H - m) \ln m - H \ln b \\ &= H \ln m - H \ln b - m \ln m \\ &= H(\ln m - \ln b) - m \ln m\end{aligned}$$

מכיוון ש- $m > b$, נקבל ש- $\ln m > \ln b$ ולכן $\ln\left(\frac{H!}{b^H}\right)$ הוא אינסופי חיובי.

$$\ln\left(\frac{b^H}{H^c}\right) = \ln(b^H) - \ln(H^c) = H \ln b - c \ln H = H \left(\ln b - c \frac{\ln H}{H} \right) \quad (b)$$

נתון ש- $b > 1$ ולכן $\ln b > 0$. כמו כן $c \frac{\ln H}{H}$ הוא אינפי' ולכן הביטוי $\ln b - c \frac{\ln H}{H}$

הוא משמעותי חיובי, ולכן $\ln\left(\frac{b^H}{H^c}\right)$ הוא אינסופי חיובי.

(c) נסמן $K = \ln(H)$ ונקבל:

$$\ln\left(\frac{H^c}{\ln(H)}\right) = \ln(H^c) - \ln K = c \ln H - \ln K = cK - \ln K = K \left(c - \frac{\ln K}{K} \right)$$

נתון ש- $c > 0$ וכן $\frac{\ln K}{K}$ הוא אינפי', ולכן $c - \frac{\ln K}{K}$ הוא משמעותי חיובי ומכאן

$\ln\left(\frac{H^c}{\ln(H)}\right)$ הוא אינסופי חיובי, כנדרש.

מש"ל

דוגמאות

הסדרות הבאות מתבררות לאינסוף:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

$$a_n = \frac{2^n}{n^{100}}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$$

[להסביר שיש עוד המון גבולות שמקבלים מהמשפט הזה, למשל: מכיוון ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b^n} = \infty$,

נקבל שגם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^c} = \infty$ וכו' וכד'.]

טענה

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

הסבר

לכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, הביטוי a_H הוא אינסופי ולכן הביטוי $\frac{1}{a_H}$ הוא אינפי.

מסקנה

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \quad (b > 1)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^c}{b^n} = 0 \quad (b > 1, c > 0)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^c} = 0 \quad (c > 0)$$

(וכל שאר השילובים המתאימים).

משפט – אריתמטיקה של גבולות

תהינה $(a_n), (b_n)$ שתי סדרות מתכנסות ונניח ש- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. אז:

1. הסדרה $(a_n + b_n)$ מתכנסת ומתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.
2. הסדרה $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת ומתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = ab$.
3. הסדרה (ka_n) מתכנסת ומתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = ka$ (לכל $k \in \mathbb{R}$).
4. אם $b \neq 0$ אז הסדרה $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ומתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

🔗 כעת נלמד מושג חדש, שעיקר שימושו (עבורנו) הוא להוכיח שסדרה אינה מתכנסת.

הגדרה

נאמר שסדרה (a_n) היא **סדרת Cauchy** אם לכל שני מספרים $H, K \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים: $a_H \approx a_K$.

למשל: הסדרה $a_n = n$ היא אינה סדרת Cauchy, ואילו $a_n = \frac{1}{n}$ היא כן סדרת Cauchy.

משפט – קריטריון Cauchy להתכנסות

תהי (a_n) סדרה כלשהי. אזי (a_n) מתכנסת אם ורק אם (a_n) היא סדרת Cauchy.
[אם אין זמן, אז במקום הוכחה לתת להם הסבר אינטואיטיבי.]

מסקנה

על מנת להוכיח שסדרה לא מתכנסת, מספיק למצוא שני מספרים $H_1, H_2 \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ שעבורם מתקיים: $a_{H_1} \not\approx a_{H_2}$.

דוגמה

נוכיח שהסדרה $a_n = \cos(\pi n)$ לא מתכנסת.

גבול של סדרה – הגדרה ממשית

ניתן לנסח את ההגדרה של התכנסות סדרה במונחים ממשיים בלבד. עד סוף השיעור כל המספרים והמשתנים הם **ממשיים**!

הגדרות

1. נאמר ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אם $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|a_n - L| < \varepsilon)$.

2. נאמר ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ אם $(\forall B > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(a_n > B)$.

דוגמאות

1. תהי $a_n = \frac{2n+4}{n+1}$ ונוכיח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

יהי $\varepsilon > 0$. נמצא $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ יתקיים: $\left| \frac{2n+4}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$.

נתחיל מהסוף: $\left| \frac{2n+4}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$.

כעת, מספיק שיתקיים $\frac{2}{n} < \varepsilon$, כלומר $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

נבחר $N = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (שימו לב שמתקיים: $\left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2}{\varepsilon} < \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 2$).

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$ ונבחר $N = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. אזי לכל $n > N$ מתקיים: $n > \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ ולכן

$$\left| \frac{2n+4}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

2. תהי $a_n = \sqrt{n}$ ונוכיח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

יהי $B > 0$ ונמצא $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ יתקיים: $\sqrt{n} > B$.

נתחיל מהסוף: $\sqrt{n} > B \Leftrightarrow n > B^2$. נבחר $N = \left\lfloor B^2 \right\rfloor + 1$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$ ונבחר $N = \left\lfloor B^2 \right\rfloor + 1$. אזי לכל $n > N$ מתקיים: $n > \left\lfloor B^2 \right\rfloor + 1 > B^2$ ולכן

$$\sqrt{n} > B$$

הרצאה מס' 23 - סדרות (המשך)

סדרות מונוטוניות וחסומות

הגדרות

א. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא **עולה** אם $a_{n+1} \geq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, או באופן שקול, אם

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{לכל } n \in \mathbb{N}.$$

ב. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא **יורדת** אם $a_{n+1} \leq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, או באופן שקול, אם

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \text{לכל } n \in \mathbb{N}.$$

ג. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא **מונוטונית** אם היא עולה או יורדת.

[להעיר על כך שיכול להיות שסדרה תהיה עולה או יורדת החל ממקום מסוים, וזה יהיה מספיק טוב לצרכים העתידיים שלנו.]

בדיקת מונוטוניות

נשתמש באחת משלוש השיטות:

1. באמצעות ההגדרה (כלומר בעזרת ההפרש $a_{n+1} - a_n$).
2. באמצעות תנאי שקול להגדרה (כלומר בעזרת המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$).
3. באמצעות חקירת מונוטוניות של הפונקציה המתאימה.

דוגמאות

נבדוק את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

$$1. \quad a_n = n^2$$

מתקיים: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} > 1$ ולכן $a_{n+1} \geq a_n$ והסדרה עולה.

$$2. \quad a_n = \frac{1}{n^3}$$

ניעזר בפונקציה המתאימה: $f(x) = \frac{1}{x^3}$. מתקיים: $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0$ ולכן

הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה. בפרט, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$n < n+1 \Rightarrow f(n) > f(n+1) \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

3. הסדרה $a_n = (-1)^n$ לא מונוטונית.

$$4. a_n = \frac{10^n}{n!} \text{ [שימו לב שכאן אין פונקציה מתאימה!]}$$

$$\text{מתקיים: } a_{n+1} - a_n = \frac{10^n(9-n)}{n!(n+1)} \text{ ולכן לכל } n \geq 9 \text{ מתקיים } a_{n+1} - a_n \leq 0 \text{ ולכן}$$

הסדרה יורדת החל מ-9.

הגדרות

א. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא **חסומה מלעיל** (אפשר גם: **חסומה מלמעלה**) אם קיים

$$M \in \mathbb{R} \text{ כך ש-} a_n \leq M \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

למשל:

- הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ חסומה מלעיל שכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq 1$.

- הסדרה $a_n = n$ אינה חסומה מלעיל.

ב. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא **חסומה מלרע** (אפשר גם: **חסומה מלמטה**) אם קיים

$$m \in \mathbb{R} \text{ כך ש-} a_n \geq m \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

למשל:

- הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ חסומה מלרע שכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq 0$. כמו כן היא

חסומה מלרע על-ידי -1 (למשל).

- הסדרה $a_n = -n - 15$ אינה חסומה מלרע.

ג. נאמר שסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא **חסומה** אם היא חסומה גם מלעיל וגם מלרע. קל לבדוק

$$\text{ש-} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ חסומה אם ורק אם קיים } M \in \mathbb{R} \text{ עבורו לכל } n \in \mathbb{N} \text{ מתקיים } |a_n| \leq M.$$

למשל:

- הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ חסומה.

- הסדרה $a_n = (-1)^{n+1}$ חסומה.

ד. במונחי אינפיניטסימלים:

סדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא **חסומה** אם ורק אם לכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ המספר a_H הוא סופי.
למשל:

- הסדרה $a_n = \frac{10^n}{n!}$ חסומה. נראה שלכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ הביטוי $\frac{10^H}{H!}$ הוא סופי.
אם $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ אז $\frac{10^H}{H!} \approx 0$ (שכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} = 0$) ולכן סופי.
- הסדרה $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ אינה חסומה.

משפטים חשובים

1. אם $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת אזי היא חסומה.
הוכחה

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, אז לכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים $a_H \approx L$ ולכן a_H סופי.

➤ שימו לב שהכיוון ההפוך אינו נכון (למשל, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

2. תהי $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה מונוטונית. אם היא חסומה אזי היא מתכנסת, אחרת מתבדרת.
לאינסוף (אם היא עולה) או למינוס אינסוף (אם היא יורדת).
(יש הוכחה אצל Goldblatt, בעמוד 63.)

המשפט הבא הוא עוד כלי שימושי להוכחת התכנסות של סדרה.

משפט הסנדוויץ'

תהיינה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ שלוש סדרות. אם:

1. קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $a_n \leq b_n \leq c_n$, וגם

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$,

אז הסדרה $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

הוכחה

יהי $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ ונרצה להראות ש- $b_H \approx L$. מהנתון השני ידוע כי $a_H \approx L \wedge c_H \approx L$ ומהנתון הראשון נסיק כי $st(a_H) \leq st(b_H) \leq st(c_H)$ ולכן $st(b_H) = L$, כנדרש.

מש"ל

דוגמאות

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \text{ נחשב את הגבול}$$

ידוע כי $-1 \leq \sin n \leq 1$ ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ ולכן לפי

$$\text{משפט הסנדוויץ' } \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \text{ נוכיח שמתקיים}$$

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{n}$$

נבחר $a_n = 0, c_n = \frac{1}{n}$ ולפי משפט הסנדוויץ' נקבל הדרוש.

תת-סדרות

תת-סדרה של $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא סדרה שאיבריה נבחרים (באופן מסוים) מתוך האיברים של $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

הגדרה

תהי $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה ותהי $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ סדרה עולה ממש של אינדקסים (כלומר $n_{k+1} > n_k$). אזי $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ היא **תת-סדרה** של $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

למשל:

מכיוון שהסדרות $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}, (2n+1)_{n \in \mathbb{N}}, (2n)_{n \in \mathbb{N}}$ הן סדרות עולות ממש, הסדרות

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ הן תת-סדרות של } a_{2n} = \frac{1}{2n}, a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}, a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

הערה

תת-סדרות יורשות לא מעט תכונות מן הסדרה המקורית:

1. אם $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת, אז כל תת-סדרה שלה מתכנסת ולאותו הגבול של הסדרה המקורית;
2. אם $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ חסומה אז כל תת-סדרה שלה חסומה גם כן;

3. אם $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מונוטונית אז כל תת-סדרה שלה גם היא מונוטונית.

הגדרה

נאמר ש- L הוא **גבול חלקי** של $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ אם קיימת תת-סדרה של $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ המתכנסת ל- L .

(דוגמאות כמו $a_n = (-1)^n$.)

משפטים

1. בולצנו-וויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.
 2. סדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת אם ורק אם כל הגבולות החלקיים שווים.
- המשפט השני הוא שימושי במיוחד, כאשר רוצים להוכיח שסדרה לא מתכנסת.

דוגמה

נתבונן בסדרה $a_n = \cos(\pi n)$, ובשתי תת-סדרות שלה:

$$a_{2n} = \cos(2\pi n), \quad a_{2n+1} = \cos(2\pi n + \pi). \quad \text{מתקיים:}$$

$$a_{2n} \rightarrow 1, \quad a_{2n+1} \rightarrow -1 \quad \text{ולכן } a_n \text{ לא מתכנסת.}$$

טורים

טור הוא למעשה סכום של סדרה אינסופית.

לפני שנתחיל לדבר על סכומים אינסופיים, נתבונן בדוגמה של סכום סופי.

הגדרה

סדרה הנדסית (סופית) היא סדרה מהצורה $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$. האיבר הראשון הוא a , ו- q נקרא **מנה** של הסדרה.

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

ניתן להראות שסכום הסדרה הזאת הוא

$$\text{למשל: } 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^n = \frac{3(1-2^{n+1})}{1-2} = 3(2^{n+1} - 1)$$

הגדרות

1. בהינתן סדרה אינסופית $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, הסכום האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ נקרא

טור אינסופי.

2. סכום m האיברים הראשונים נקרא **הסכום החלקי ה- m** , ומסומן ב- S_m .

$$\text{כלומר: } S_m = \sum_{n=1}^m a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

3. הסדרה $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ נקראת **סדרת הסכומים החלקיים** של הטור (סס"ח).

דוגמה

נתבונן בסדרה $a_n = \frac{1}{2^n}$. איבריה הראשונים הם $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots$.

$$\text{סכום הסדרה הזו הוא הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

סדרת הסכומים החלקיים של הטור הנ"ל היא הסדרה הבאה:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$$

⋮

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

במקרה הזה, לכל $n \in \mathbb{N}$, S_n היא סדרה הנדסית סופית, ולכן ניתן לחשב את סכומה:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^1} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

הערה

שימו לב שלכל טור מתאימות שתי סדרות:

1. a_n - הסדרה שמגדירה את הטור;
2. S_n - סדרת הסכומים החלקיים של הטור.

הרצאה מס' 24 – טורים (המשך)

להזכיר תחילה את ההגדרות מסוף שיעור שעבר:

הגדרות

4. בהינתן סדרה אינסופית $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, הסכום האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ נקרא **טור**

אינסופי.

5. סכום m האיברים הראשונים נקרא **הסכום החלקי ה- m -י**, ומסומן ב- S_m . כלומר:

$$S_m = \sum_{n=1}^m a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

6. הסדרה $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ נקראת **סדרת הסכומים החלקיים** של הטור (סס"ח).

הגדרות

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור אינסופי ונסמן ב- $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ את סדרת הסכומים החלקיים שלו.

1. אם הסדרה $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ מתכנסת לגבול S , אז S נקרא **הגבול של הטור האינסופי**

(או: **הערך של הטור**) ונאמר ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס** ל- S .

כלומר, אם ערכו של הטור סופי, אז ניתן לכתוב $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \text{st}(S_H)$ עבור

$$H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$$

2. אם הסדרה $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ מתבדרת או מתבדרת לפלוס/מינוס אינסוף, נאמר שהטור

מתבדר או **מתבדר לפלוס/מינוס אינסוף**, בהתאמה.

דוגמה

הסדרה $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ יוצרת את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

טור זה נקרא **טור טלסקופי**.

הטור יוצר את סדרת הסכומים החלקיים:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

⋮

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

⋮

$$\text{כלומר, } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{מתקיים: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \text{ ולכן הטור מתכנס ונוכל לכתוב } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

דוגמה

נתבונן בסדרה $a_n = 1$ היוצרת את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$. הטור יוצר את סדרת

הסכומים החלקיים: $S_1 = 1, S_2 = 2, \dots, S_n = n, \dots$.

מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ולכן הטור מתבדר.

הערה

באופן כללי, זה מאוד לא פשוט למצוא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים החלקיים, ולכן נצטרך לפתח כלים לבדיקת התכנסות של טור.

הערה

שימו לב שניתן לשחק די בחופשיות עם האידקסים של הטור, במובן הבא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} = \sum_{n=5}^{\infty} a_{n-5}$$

הגדרה

יהיו $a, q \in \mathbb{R}$ ונניח $a \neq 0$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$ נקרא **טור גיאומטרי**.

דוגמה

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = 3 + 3 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5^2} + \dots$$

כאן $a = 3, q = \frac{1}{5}$.

2. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n$ גם הוא טור גיאומטרי. נתאים את הכתיבה שלו לפורמט של

$$\text{ההגדרה: } \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

כאן $a = 3, q = \frac{1}{4}$.

3. גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n$ הוא טור גיאומטרי. נתאים אותו לצורת הכתיבה של ההגדרה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1}$$

כאן $a = \frac{1}{7}, q = \frac{1}{7}$.

משפט

נתבונן בטור הגיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$

$$1. \text{ אם } |q| < 1 \text{ אז הטור מתכנס ומתקיים } \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

2. אם $|q| \geq 1$ אז הטור מתבדר.

הוכחה

1. נניח ש- $|q| < 1$ ונתבונן בסדרת הסכומים החלקיים. מתקיים: $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

יהי $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, אזי $S_H = \frac{a(1-q^H)}{1-q}$. מכיוון ש- $|q| < 1$, המספר q^H הוא אינפיניטסימלי, ולכן

$$\text{st}(S_H) = \frac{a}{1-q}$$

2. נניח ש- $|q| > 1$. אזי q^H הוא אינסופי ולכן $S_H = \frac{a(1-q^H)}{1-q}$ אינסופי, והטור מתבדר.

3. נניח ש- $q = 1$. אזי הטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + a + a + \dots$ ומכאן $S_n = na$. לכל

$$S_H = Ha, H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$$

4. נניח ש- $q = -1$. אזי הטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a - a + a - a \dots$ וסדרת הסכומים

החלקיים מתבדרת (מדוע?). לכן הטור מתבדר.

מש"ל

דוגמאות

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס. נחשב את סכומו. תחילה נתאים את

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{לכן } a = 2, q = \frac{2}{3} \text{ והסכום הוא } \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} = 6, \text{ כלומר: } \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 6$$

2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$ הוא טור גיאומטרי מתכנס. סכומו

$$\text{הוא } \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

3. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{5}{4}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתבדר.

➤ כעת נחזור לטורים כלליים.

ראינו שסדרה מתכנסת אמ"מ היא סדרת Cauchy. תנאי Cauchy מקבל צורה מיוחדת ושימושית כאשר מדובר בסדרת סכומים חלקיים של טור.

יהיו $H, K \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, ונניח בה"כ $H < K$. אם S_n היא סדרת Cauchy, אז $S_H \approx S_K$. כלומר, אם $a_{H+1} + a_{H+2} + \dots + a_K \approx 0$.

תנאי Cauchy להתכנסות טור

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ לכל $H < K \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים $a_{H+1} + a_{H+2} + \dots + a_K \approx 0$.

מתנאי זה מקבלים מסקנה מאוד חשובה:

תנאי הכרחי להתכנסות טור

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. כלומר, לכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ המספר a_H הוא אינפי.

הוכחה

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי לפי תנאי Cauchy מתקיים $S_H \approx S_{H-1}$ לכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. לכן $a_H \approx 0$ ומכאן $a_1 + a_2 + \dots + a_{H-1} \approx a_1 + a_2 + \dots + a_{H-1} + a_H$.

מש"ל

💡 שימו לב! זהו תנאי הכרחי ואינו מספיק! כלומר, יתכן ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

מתבדר.

דוגמה

הטורים הבאים אינם מקיימים את התנאי ההכרחי, ולכן מתבדרים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

הגדרה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$ נקרא **הטור ההרמוני**.

משפט (ללא הוכחה בשלב זה)

הטור ההרמוני מתבדר.

➤ שימו לב שקיבלנו דוגמה לטור שהאיבר הכללי שלו שואף לאפס, והוא בכל זאת מתבדר.

משפט

נניח שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים. אזי:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לכל $c \in \mathbb{R}$;

2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ מתכנס ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

3. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq b_n$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

❗ שימו לב! החלק הראשון של המשפט נכון גם עבור טורים מתבדרים, ואילו החלק השני – לא בהכרח! כלומר:

מסקנות/הערות

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז לכל $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ מתבדר.

ואמנם, אם נניח בשלילה כי $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ מתכנס, נקבל לפי המשפט שגם

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c} \cdot ca_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנס, בסתירה להנחה.

2. יתכן ששני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדרים, ואילו הסכום/הפרש שלהם מתכנס.

למשל: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$.

ניתן לתת דוגמה יותר מעניינת: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$. סכום שני

הטורים האלה הוא טור טלסקופי, וראינו שהוא מתכנס ל-1. (רק שחסר כרגע

ההסבר לכך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.)

3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואילו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר. אחרת, אם היה מתכנס, היינו מקבלים שגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, לפי החלק השני של המשפט.

- כעת נראה שהתכנסות טור אינה תלויה באיברים הראשונים שלו.

הגדרה

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו. אזי הטור $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} \dots$ נקרא **הזנב של הטור** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

משפט

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס לכל $m \in \mathbb{N}$.

(שימו לב שהסכום של הטור עלול להשתנות כאשר משמיטים ממנו איברים!)

מסקנה

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי הוא ישאר טור מתכנס גם לאחר הוספה/הסרה/שינוי של מספר סופי של איברים.

למשל: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ מתכנס ולכן גם $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ מתכנס.

הרצאה מס' 25 – טורים (המשך)

טורים חיוביים

הגדרה

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא **טור חיובי** אם כל איבריו הם אי-שליליים. כלומר, אם $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

- מה מיוחד בטורים חיוביים? תחילה נשים לב, שסדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא סדרה עולה. כלומר, לכל $m < n$ מתקיים $S_m \leq S_n$.
ראינו משפט שאומר שאם סדרה היא עולה, אז יש לה שני מצבים:
א. אם היא חסומה אז היא מתכנסת;
ב. אם היא אינה חסומה, אז היא מתבדרת לאינסוף.

זה הופך את הטורים החיוביים לקצת יותר קלים מבחינת חקירת התכנסות, ויש להם, למעשה, רק שני מצבים: התכנסות או התבדרות לאינסוף.

כלומר:

על מנת לבדוק אם טור חיובי מתכנס, מספיק להסתכל על S_H כלשהו, ולבדוק אם הוא סופי (ואז הסדרה חסומה והטור מתכנס) או אינסופי (ואז הסדרה לא חסומה והטור מתבדר).

דוגמה לטורים חיוביים

א. הטור ההרמוני מתבדר ל- ∞ .

ב. הטור הגיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ עבור $a, q > 0$ הוא:

מתכנס עבור $0 < q < 1$, ומתבדר ל- ∞ עבור $q \geq 1$.

- יתרון נוסף של טורים חיוביים הוא אפשרות השוואה ביניהם.

מבחן השאווה לטורים חיוביים

יהי $0 < c \in \mathbb{R}$ ויהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים. נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ החל ממקום

מסוים מתקיים $a_n \leq c \cdot b_n$. אז:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס;

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n + 1}$.

אינטואיטיבית, האיבר הכללי מתנהג כמו $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ ולכן נרצה להשוות עם הטור הגיאומטרי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \text{ מתקיים: } \frac{3^n}{5^n + 1} \leq \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

הטור הגיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ מתכנס, ולכן, לפי מבחן ההשוואה, גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n + 1}$ מתכנס.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n}{2 \cdot 5^n - 1}$.

ניתן לראות כי האיבר הכללי מתנהג בערך כמו $\left(\frac{4}{5}\right)^n$, ואכן: $\frac{3 \cdot 4^n}{2 \cdot 5^n - 1} \leq \frac{3 \cdot 4^n}{\frac{9}{5} \cdot 5^n} = \frac{5}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$[\text{הסבר לאי-שוויון: } 2 \cdot 5^n - 1 = 5^n \left(2 - \frac{1}{5^n}\right) \geq 5^n \left(2 - \frac{1}{5}\right)]$$

הטור הגיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ מתכנס ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n}{2 \cdot 5^n - 1}$ מתכנס, לפי מבחן ההשוואה.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 8}$.

ניתן לראות כי האיבר הכללי מתנהג כמו $\frac{1}{n}$ ולכן נשווה עם הטור ההרמוני:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{4n^2} \leq \frac{n}{3n^2 + 8}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ מתבדר (כפולה של הטור ההרמוני המתבדר), ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 8}$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

מבחן ההשוואה הגבולי (לטורים חיוביים)

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים ויהי $c \in \mathbb{R}, 0 < c$. נניח שלכל $K \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים $a_K \leq c \cdot b_K$. אזי:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס;

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

דוגמה חשובה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ עבור $p \in \mathbb{R}, 0 < p$. ננסה להשוות אותו עם הטור ההרמוני.

[להתחיל מטייטה: רוצים שיתקיים $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{(\ln n)^p}$... שקול ל... $\ln n \leq n^{\frac{1}{p}}$... $1 \leq \frac{n^{\frac{1}{p}}}{\ln n}$ זוהי כבר מזכיר גבול מוכר...]

יהי $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. כשדיברנו על סדרות, ראינו שהמספר $\frac{H^b}{\ln H}$ הוא אינסופי, לכל $b > 0$. לכן, $1 < \frac{H^b}{\ln H}$, ובפרט $\ln H < H^{\frac{1}{p}}$ ומכאן $(\ln H)^p < H$.

כלומר $\frac{1}{(\ln H)^p} > \frac{1}{H}$. לכן, לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם הטור ההרמוני, הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ מתבדר.

➤ כעת נכיר משפחה נוספת של טורים אשר יעזרו לנו במבחני ההשוואה: טורי p .

משפט (ללא הוכחה בשלב זה)

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \leq 1$.

דוגמאות לטורי p

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ הוא טור מתכנס, שכן $\frac{3}{2} > 1$.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר, שכן $\frac{1}{2} < 1$.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

יהי $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. לכל $0 < c \in \mathbb{R}$ מתקיים $\ln H \leq H^c$ (מדוע? הסבר באמצעות משפט סדרי גודל), ולכן: $\frac{\ln H}{H^2} \leq \frac{H^c}{H^2} = \frac{1}{H^{2-c}}$. נבחר $c = \frac{1}{2}$ ונקבל $\frac{\ln H}{H^2} \leq \frac{1}{H^{\frac{3}{2}}}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס ולכן, לפי מבחן ההשוואה הגבולי, גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ מתכנס.

טורים עם סימנים מתחלפים

הגדרה

תהי $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה המקיימת $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי כל אחד מהטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

נקרא **טור עם סימנים מתחלפים**.

• למשל: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^2 + \ln n), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$

מבחן Leibniz – התכנסות טור עם סימנים מתחלפים (ללא הוכחה בשלב זה)

בניח ש:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור עם סימנים מתחלפים;

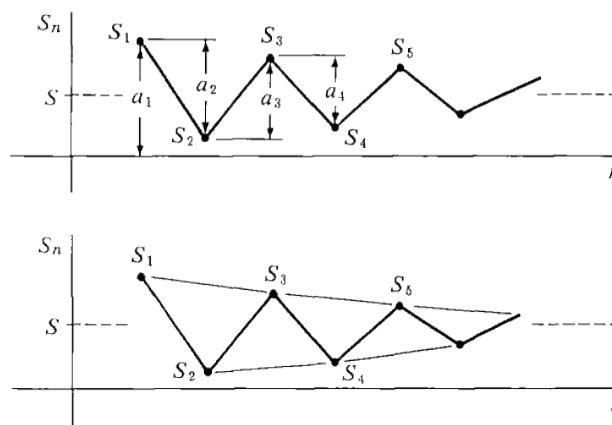
2. הסדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ יורדת: $a_1 \geq a_2 \geq \dots$;

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

אזי:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס;

ב. הסכום S של הטור מקיים $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.



דוגמה

נתבונן בטור ההרמוני עם סימנים מתחלפים: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

הסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ יורדת ומתכנסת לאפס. כלומר הטור מקיים את תנאי משפט לייבניץ, ולכן הטור מתכנס.

סכום הטור מקיים, למשל: $S_4 = \frac{7}{12} \leq S \leq \frac{47}{60} = S_5$

למעשה, הסכום המדויק הוא $S = \ln 2$.

דוגמה

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$

הסדרה $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ אמנם יורדת, אך לא שואפת לאפס, ולכן הטור אינו מקיים את תנאי משפט לייבניץ.

ניתן לראות שהטור מתבדר, שכן האיבר הכללי שלו $(-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$ אינו שואף לאפס.

הרצאה מס' 26 – טורים המשר

התכנסות בתנאי והתכנסות בהחלט

בהינתן טור כלשהו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ניתן לדבר על טור הערכים המוחלטים שלו, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. זהו טור חיובי, וטורים חיוביים נוחים יותר לחקירה.

הגדרה

נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס בהחלט** אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. טור שמתכנס אבל לא מתכנס בהחלט, נקרא **מתכנס בתנאי**⁶.

משפט

טור מתכנס בהחלט הוא מתכנס.

דוגמה

טור הסימנים המתחלפים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ מתכנס בהחלט, שכן טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

דוגמה

הטור ההרמוני עם סימנים מתחלפים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס בתנאי, שכן: הוא מתכנס לפי לייבניץ, וטור הערכים המוחלטים שלו הוא הטור ההרמוני המתבדר. [כלומר, קיבלנו דוגמה לטור $\sum a_n$ מתכנס כך שהטור $\sum |a_n|$ לא מתכנס.]

⁶ כלומר, מתכנס בתנאי שלא שמים עליו ערך מוחלט.

מבחני התכנסות

מבחני ההשוואה לטורים חיוביים נותנים לנו שני מבחני התכנסות בהחלט.

מבחן ההשוואה

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים, ונניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ החל ממקום מסוים מתקיים:

$|a_n| \leq c|b_n|$ עבור $0 < c \in \mathbb{R}$ כלשהו. אזי, אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט, גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

⚠ אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ יכול להתכנס בתנאי או להתבדר!

מבחן ההשוואה הגבולי

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים, ויהי $0 < c \in \mathbb{R}$. נניח שלכל $K \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים

$|a_K| \leq c|b_K|$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

⚠ שימו לב ששני המבחנים הנ"ל אינם מדברים על התכנסות בתנאי!

כעת נכיר שלושה מבחנים נוספים עבור התכנסות בהחלט, ואלה מבחנים שניתן להפעיל גם לבדיקת התכנסות של טור חיובי.

מבחן המנה (D'Alembert's test)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו. נניח שהגבול של המנה $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ קיים או אינסופי. כלומר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty \vee \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in \mathbb{R}$$

א. אם $L < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט;

ב. אם $L > 1$ או הגבול אינסופי, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר;

ג. אם $L = 1$, לא ניתן לקבוע.

❗ זהו מבחן שימושי במיוחד בטורים המערבים ביטויים כמו a^n , $n!$.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

$$\text{מתקיים: } 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\frac{1}{n!}}.$$

לכן, לפי מבחן המנה, הטור מתכנס.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n!}$.

$$\text{מתקיים: } e > 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{n^n}{n!}}.$$

לכן, לפי מבחן המנה, הטור מתבדר.

(שימו לב שניתן לראות זאת גם לפי התנאי ההכרחי.)

דוגמה

מקרים בהם לא ניתן להכריע לפי מבחן המנה כוללים, למשל, את הטורים המוכרים לנו

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(אם יש זמן – להראות את הגבול.)

מבחן השורש (Cauchy's test)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו. נניח שהגבול של $\sqrt[n]{|a_n|}$ קיים או אינסופי. כלומר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad \vee \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R}$$

א. אם $L < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט;

ב. אם $L > 1$ או הגבול אינסופי, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר;

ג. אם $L = 1$, לא ניתן לקבוע.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$.

מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^n}{3^{1+2n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^{\frac{1+2n}{n}}} = \infty$. לכן, לפי מבחן השורש, הטור מתבדר.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2} \right)^n$.

מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2} \right| = \frac{3}{7} < 1$

לכן, לפי מבחן השורש, הטור מתכנס בהחלט.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$.

מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2n}{3^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$

לכן, לפי מבחן השורש, הטור מתכנס.

מבחן העיבוי (Cauchy's condensation test)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו. ונניח ש- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ היא סדרה יורדת של מספרים חיוביים. כלומר:
 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ מתכנס.

דוגמה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנס אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ מתכנס.

דוגמה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס אם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ מתכנס.

דוגמה

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

הסדרה $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ היא חיובית ויורדת, ולכן הטור הנתון מתכנס אם הטור

$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתכנס. אבל $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ זהו טור מתבדר.