

1. נסתכל על קבוצת ההעתקות הפרוייקטיביות מהישר הפרוייקטיבי RP^1 לעצמו אשר שומרות על הקבוצה $\{0,1,\infty\}$ ("ז": לכל $x \in \{0,1,\infty\}$ מתקיים $f(x) \in \{0,1,\infty\}$).
א. לאיזו חבורה איזומורפית קבוצת ההעתקות הנ"ל? הוכיחו איזומורפיזם.

ראשית, ניתן לראות שקבוצת העתקות זו היא חבורה היות והיא תת חבורה של $PGL_2(R)$.
כעת נשים לב כי היות והיא שולחת 3 איברים לעצמם היא בעצם מגדירה עליהם תמורה, לכן קיימת העתקה h מקבוצת ההעתקות הנ"ל ל- Sym_3 . יש להראות שהעתקה זו היא הומומורפיזם ושהיא חח"ע היות ואם- $h(\sigma) = id$ אז ברור ש- $\sigma(x) = x$ לכל $x \in P^1$. על ניתן להראות מסעיף ב'.

ב. כמה העתקות פרוייקטיביות כאלו ישנן? מצא את כולן (כלומר רישמו את צורתן המפורשת):

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

ג. כיתבו את המטריצות המתאימות להעתקות אלו ב $PSL_2(R)$.

$$f(x) = x, \quad 1/x, \quad 1-x, \quad 1/(1-x), \quad (x-1)/x, \quad x/(x-1)$$

בהתאמה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. יהי F שדה סופי עם q איברים.

א. מיצאו את הסדר של $GL_n(F)$.

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

ב. מיצאו את הסדר של $PGL_n(F) := GL_n(F) / Z(GL_n(F))$.

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}) / (q - 1)$$

ג. הוכיחו כי קיים הומומורפיזם $PGL_2(F) \rightarrow Sym_{q+1}$ כאשר Sym_{q+1} היא החבורה

הסימטרית (חבורת התמורות) על $q+1$ איברים. הראו כי הומומ' זה איננו על עבור

$$q > 5.$$

קיימת העתקה כזו מכיוון שכל מטריצה כזו משרה העתקה על $q+1$ הנקודות של הקו הפרוייקטיבי. ניתן להראות בבדיקה ישירה שזהו הומומ' וכמו כן שאיננו על כבר עבור $q > 3$.

ד. הוכיחו שהמומ' זה הוא חז"ע.

ע"פ בדיקת האיברים בגרעין.

3. יהי F שדה עם 3 איברים. הכיחו כי:

א. $PGL_2(F) \cong Sym_4$

לפי השאלה הקודמת קיים מונמ' ביניהן, היות וסידריהן שווים (בשני המיקרים 24) אז המונמ' הוא גם על ובסה"כ איזומ'.

ב. [ת"ח התמורות הווגיות ב - Sym_4] $PSL_2(F) \cong A_4$

הסדר של $PSL_2(F)$ הוא 12, מכיוון שהת"ח הנורמלית היחידה ב Sym_4 מסדר 12 היא A_4 ו $PSL_2(F)$ היא ת"ח נורמלית של $PGL_2(F)$ נקבל את האיזומורפיזם הנדרש.