תרגיל # 4 (עם תשובות)

אלגברה ליניארי

1. פתרון של מערכת משוואות

יש לבצע כול מהאלגוריתמים הבאים

א).	פרוק LU	[L D U]=lu(A)	http://en.wikipedia.org/wiki/LU_decomposition
ב).	שיטת חילוץ של GAUSS	B=rref(A)	http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss-Jordan_elimination

ג).	שיטה איטרתיבי של JACOBI	`function [x,J,c] = jacobi(A,b,n,z)`
		`if nargin <=3, z=0*b; end`
		`if nargin <=2, n=20; end`
		`D = diag(diag(A));`
		`J = D\(D - A);`
		`c = D\b;`
		`x=z;`
		`for k = 1:n`
		`x = J*x + c;`
		`end`
			http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_method

לפתרון בעיות הנתונות בטבלה 1., מקרים .a).- e) :

טבלה 1.

	Type I	Type II	הערות
a).	Ax=b, b=[1;2;3] A=[10 11 12; 20 21 22; 30 31 32]	Ax=b, b=[0;1;2] A=[10 11 12; 20 21 22; 30 31 32]	det(A)=0 Type I x=[0.1+t; -2*t; t] Type II x=[-1.1+t; 1-2*t; t]
b).	Ax=b, b=[1;2;3] A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]	Ax=b, b=[1;2;3] A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 8.8]	Type I det(A)=0 x=[-0.33+t; 0.67-2*t; t] Type II cond(A)=522.4833
c).	Ax=b, b=[5;3;7;3] A=[1 2 -1 3; 1 2 -2 2; 1 2 0 4; 0 0 2 1]	Ax=b, b=[5;3;7;3] A=[1 2 -1 3; 1 2 -2 2; 1 2 0 4; 0 0 2 1.1]	det(A)=0 Type I cond(A)=4.7022e+016 x=[1+t; 1-2*t; 1; 1+t] Type II

cond(A)=6.5834e+016

d).	$3x + 2y = 0$ $6.001x + 4y = 1$	$3x + 2y = 0$ $6.0001x + 4y = 1$	Type I cond(A)= 3.2506e+004 Type II cond(A)= 3.2501e+005
e).	$10^\wedge(-100)x + 2y = 0$ $x + 10^\wedge(-100)y = 1$	$10^\wedge(100)x + 2y = 0$ $x + 10^\wedge(100)y = 1$	Type I cond(A)= 2 Type II cond(A)= 1
f).	$7x + 10y = 1$ $5x + 7y = 0.7$	$7x + 10y = 1.01$ $5x + 7y = 0.69$	cond(A)= 222.9955 Type I x=0,y=0.1 Type II x=-0.17, y=0.22

א). לאיזה פריטים בטבלה אפשר לבצע האלגוריתמים א).-ג). ולאיזה כדאי לממש שיטת PIVOTING?

תשובה: במקרה e(I). נדרש PIVOTING

ב). לאיזו מטריצות יש תנאי חולה ואיזו מכם סינגולריים?

ג). נא להשוות תוצאות על פי סוג (Type I, Type II)

תשובה: cond(a(I))=cond(a(II)) = inf, cond(d(I))<cond(d(II)), cond(e(I))~cond(e(II)),

מקרים a, c, f -לא ניתן להשוואת לפי מספרים

2. נורמות של מטריצות

א). למטריצות נתונות בטבלה 1. יש למצוא נורמות norm(A), norm(A,1) ו-norm(A,inf) ולסדר אותם לפי גודל

ב). למטריצות נתונות בטבלה 1. יש למצוא מספרי התנאי cond(A), cond(A,1) ו- cond(A,inf) ולסדר אותם לפי גודל

ג). מה הן המסקנות?

תשובה מטריצה **סימטרית ואורטוגנלי** A תמיד מקיימת תנאים

$$cond(A) \le cond(A,1), \quad cond(A) \le cond(A,\infty)$$

הערה:

Definition: A function $\| x \| : R^n \to R_+$ is called a ***vector norm*** and $V = (R^n, \| x \|)$ is called a ***vector space*** if

(1) $\| v \| \ge 0$ | for all v with $\|v\| = 0$ if and only if $v = 0$;

(2) $\| \alpha v \| = | \alpha | \| v \|$;

(3) $\| v_1 + v_2 \| \le \| v_1 \| + \| v_2 \|$.

Here, (1) is a ***positivity*** condition; (2) says that the norm is ***homogeneous*** of degree 1; and (3) is the ***triangle inequality***. Both candidates for vector norms have these properties.

If you have a vector norm ||v|| in $V = (R^n, \| x \|)$, there is an associated ***matrix norm*** on *n* by *n* matrices *M* defined by

$$\| M \| = \sup_{\|v\| \ne 0} \frac{\| Mv \|}{\| v \|}$$

for ***all*** nonzero vectors v. Because of positivity and homogeneity, this is equivalent to the ***least upper bound*** of

$$\| M \| = \sup \{ \| Mv \| : \| v \| = 1 \}$$

In particular, the ***2-norm*** of matrix (norm(M) in MATLAB) is equal to its ***spectral radius:***

$$\| M \|_2 = \rho, \quad \rho := \max_i \sqrt{\lambda_i (MM^T)}$$

where all $\lambda_i (MM^T)$ are the eigenvalues of matrix MM^T and M^T is conjugate to *M*.

3. פירוק של מטריצות

תהי A מטריצה 4×4 של HILBERT עם הרכיבים $a_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$.

פקודה בMATLAB hilb(4)

1.0000	0.5000	0.3333	0.2500
0.5000	0.3333	0.2500	0.2000
0.3333	0.2500	0.2000	0.1667
0.2500	0.2000	0.1667	0.1429

א). חשב פירוק LU הכי חסכוני עבור מטריצה זו.

```
[L U ]=lu(hilb(4))
cond(L )
cond(U)

L =

    1.0000         0         0         0
    0.5000    1.0000    1.0000         0
    0.3333    1.0000         0         0
    0.2500    0.9000   -0.6000    1.0000


U =

    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500
         0    0.0833    0.0889    0.0833
         0         0   -0.0056   -0.0083
         0         0         0    0.0004


ans =

    4.6370


ans =

  6.3679e+003
```

בגלל שמטריצה hilb(n) היא המטריצה **סימטרית ומוגדרת חיובית** לכן אפשר להשתמש בשיטת Cholesky (A=LL') במקום LU :

```
R=chol(hilb(4))
R'*R-hilb(4)
cond(R)

R =

    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500
```

```
     0    0.2887    0.2887    0.2598
     0         0    0.0745    0.1118
     0         0         0    0.0189


ans =

     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0


ans =

  124.5542
```

שים לב, שמספר התנאי הוא חרבה יותר פחות!

ב). רשום את אלגוריתם. (של CHOLESKY)
ג). חשב שוב לפי 4 ספורות במנטיסה בבסיס עשרוני

```
A=hilb(4);
B=chop(hilb(4),4);
 norm(A-B)

ans =

  6.5657e-005

norm(inv(A)-inv(B))

ans =

  2.8628e+003
```

4. היפוך של מטריצות

נתונה מטריצה M המחולקת לבלוקים : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ כאשר כל מטריצות ריבועיות , A - הפיכה

א). חשב M^{-1} .
ב). רשום את אלגוריתם.
ג). חשב לפי צורת הבלוקים ב M^{-1}
תשובה:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}, \quad S = (D - CA^{-1}B)^{-1},$$

$$Q = -A^{-1}BS,\ R = -SCA^{-1},\ P = A^{-1} - A^{-1}BR = A^{-1} - QBA^{-1}$$

בהצלחה!