Approximation

1. קירוב פולינומיאלי במרחב עם מכפלה סקלרי :

מצא את **הקירוב הטוב ביותר** ($p_1^*(x) = b.a.\ of\ f(x)$) במקרים הבאים:

א). לפונקציה $f(x) = sign(x-1/2)$ במרחב $X = L_2(-1,1)$ על-ידי פונקציה ליניארי:

$p_1^*(x) = \alpha + \beta x \in A = P_1$

תשובה:

$$\langle f(x),1\rangle := \int_{-1}^{1} sign(x-1/2)dx, \quad \langle f(x),x\rangle = \int_{-1}^{1} sign(x-1/2)xdx,$$

$$p_1^*(x) = \alpha + \beta x = \frac{\langle f(x),1\rangle}{\langle 1,1\rangle} + \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} x$$

```
quad(@(x)sign(x-0.5),-1,1)/ quad(@(x)1,-1,1)

ans =

  -0.5000

>> quad(@(x)x.*sign(x-0.5),-1,1)/ quad(@(x)x.*x,-1,1)

ans =

   1.1250
```

$$p_1^*(x) = -0.5 + 1.125x$$

ב). כמו בסייף א). אבל לפונקציה $f(x) = sign(x)$

```
quad(@(x)sign(x),-1,1)/ quad(@(x)1,-1,1)

ans =

  0.0000

>> quad(@(x)x.*sign(x),-1,1)/ quad(@(x)x.*x,-1,1)

ans =

   1. 5000
```

$$p_1^*(x) = \frac{3}{2}x$$

ג). כמו בסייף א. אבל במרחב $X = L_{2,\mu(x)}(-1,1)$ **עם משקל** $\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

```
>> quad(@(x)sign(x-0.5)./sqrt(1-x.^2),-1,1)/quad(@(x)1./sqrt(1-x.^2),-1,1)
   quad(@(x)sign(x-0.5)./sqrt(1-x.^2).*x,-1,1)/quad(@(x)x.^2./sqrt(1-x.^2),-1,1)

ans =

  -0.3333

ans =

   1.1027
```

$p_1^*(x) = -0.3333 + 1.1027 * x$

הוראה: $sign\,(x-a) = \begin{cases} 1, & x > a \\ -1, & x < a \end{cases}$ (בנקודה $x = a$ ערך של פונקציה הוא לא חשוב כי זות קבוצה במידת אפס)

p_1^* $is\ b.a.\ of\ f(x)$ במרחב $X = L_{2,\mu(x)}[-1,1]$ אם התנאים הבאים מקיימים:

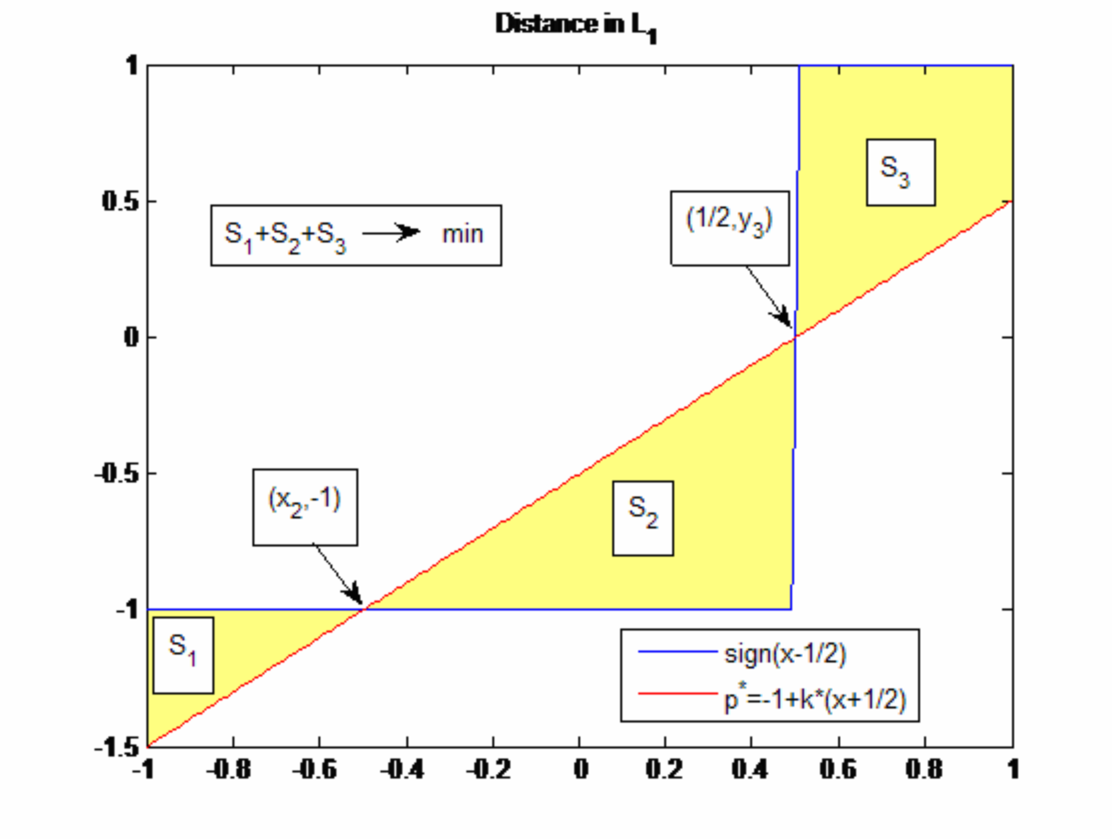
$$dist(f, P_1\ ; L_{2,\mu(x)}[-1,1]) = \| f - p_1^* \|_{L_{2,\mu(x)}[-1,1]} = \inf_{p_1 \in P_1} \sqrt{\int_{-1}^{1} (f(x) - p_1(x))^2\ \ \mu(x)\, dx}$$

2. קירוב פולינומיאלי במרחב נורמי (אך בלי מכפלה סקלרי) :

מצה את ה**קירוב הטוב ביותר** ($p_1^*(x) = b.a.\ of\ f(x)$) במקרים הבאים:

א). לפונקציה $f(x) = sign(x - 1/2)$ במרחב $X = L_1(-1,1)$ על-ידי פונקציה ליניארי:

$p_1^*(x) = \alpha + \beta\, x \in A = P_1$



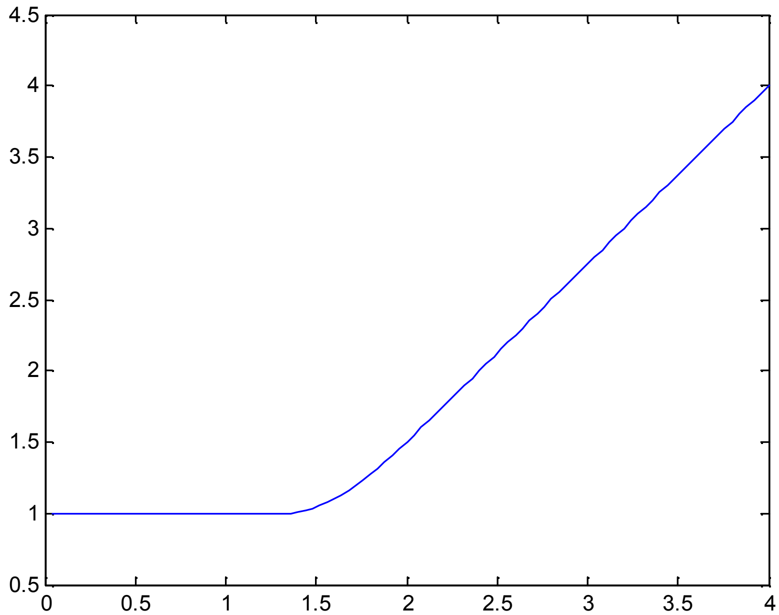

```
syms k x2; y1=-1+k*(-1-x2); y2=-1; y3=-1+k*(1/2-x2); y4=-1+k*(1-x2); x1=-1; x3=1/2; x4=1;
S=simplify((x2+1)*(-1-y1)/2+(1/2-x2)*(y3+1)/2+1/4*(1-y4+1-y3))
solve(diff(S,x2),x2)
for i=1:100
K(i)=i/25;
Y(i)=quadl(@(x)abs(-1+K(i)*(x+1/2)-sign(x-1/2)),-1,1);
end
plot(K,Y)
```

```
S =

k*x2^2+k*x2+1/4*k+1

ans =

-1/2
```



תשובה: $p_1^*(x) = -1 + k*(x+1/2)$ לכל $a \approx 1.4$, $0 \le k \le a$ במקרה הזה

$$dist(f,P_1\,; L_1[-1,1]) = \| f - p_1^* \|_{L_1[-1,1]} = \inf_{p_1 \in P_1} \int_{-1}^{1} | f(x) - p_1(x) | \, dx = 1$$

ב). כמו בסייף א). אבל לפונקציה $f(x) = sign(x)$

תשובה: (פועלים בצורה
אנלוגית אך יותר פשוט כי $p_1^*(x) = k*x$)

ג). צייר את התוצאות בשתי המקרים.

הוראה:

p_1^* הוא הקירוב הטוב ביותר ל $f(x)$ במרחב $X = L_1(-1,1)$ (p_1^* *is b.a. of* $f(x)$)
אם התנאים הבאים מקיימים:

$$dist(f,P_1\,; L_1[-1,1]) = \| f - p_1^* \|_{L_1[-1,1]} = \inf_{p_1 \in P_1} \int_{-1}^{1} | f(x) - p_1(x) | \, dx$$

3. קירוב ב C[0,1]:

יש לבנות את **הקירוב הטוב ביותר** ליניארי $p_1^* \in P_1 = \{ax+b\}$ בקטע $0 \le x \le 1$
לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

הוראה:

אם התנאים הבאים מקיימים: $p_1^* \; is \; b.a. \; of \; f(x)$

$$dist(f, P_1 \; ; C[0,1]) = \| f - p_1^* \|_{C[0,1]} = \inf_{p_1 \in P_1} \max_{x \in [0,1]} | f(x) - p_1(x) |$$

תשובה: $p_1^*(x) = k * x + b$ במקרה הזה בונים אלטרננס של צ'בצ'ב:

$x = \sqrt{\frac{k}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(k * x + b - x^3\right) = 0$ אז נקודות של צ'בצ'ב הן $x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{k}{3}}, \quad x_3 = 1$

פורים משוואות: $i = 1, 2, 3 \quad kx_i + b - x_i^3 = \left(-1\right)^i \varepsilon, \quad \Leftarrow$

$$\begin{cases} b = -\varepsilon \\ k * \sqrt{\frac{k}{3}} + b - \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^3 = \varepsilon \\ k + b - 1 = -\varepsilon \end{cases}$$

או $b = -\varepsilon, \quad k = -1, \quad \frac{1}{3\sqrt{3}} = \varepsilon$

$p_1^*(x) = x - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ במרחק

$$dist(f, P_1 \; ; C[0,1]) = \| f - p_1^* \|_{C[0,1]} = \inf_{p_1 \in P_1} \max_{0 \le x \le 1} \left| f(x) - p_1(x) \right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

בהצלחה!