

## תרגיל 2. תשובות

1. לכל אחד ממד"ר 1-20, יש למיין את הסוגו -

1. מדויקת, גם ליניארית
2. ליניארית
3. הומוגנית
4. הפרדה משתנים, ליניארית בשני משתנים
5. מדויקת, גם ליניארית
6. הפרדה משתנים
7. ברנולי
8. הפרדת משתנים
9. הומוגנית
10. ליניארית
11. ליניארית אם X הוא המשתנה תלוי מ Y
12. הפרדה משתנים
13. מדויקת
14. ליניארית
15. הומוגנית
16. הפרדה משתנים, גם ליניארית
17. ריקטי
18. לא של סדר ראשון
19. הומוגנית
20. מדויקת

2. מצא פתרון הכללי על ידי ההפרדות משתנים:

a)  $\frac{dy}{y^2-2y} = -\frac{dx}{x^2}$

$$\frac{1}{2} \frac{dy}{y-2} - \frac{1}{2} \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y-2}{y}\right) = c_1 + \frac{1}{x}$$

$$= 1 - \frac{2}{y} \rightarrow \frac{y-2}{y} = c_2 e^{2/x}$$

$$\therefore y = \frac{2}{1 - c_2 e^{2/x}}$$

b)  $\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$

$$\sin^{-1}v = \ln x + c$$

$$v = \sin(\ln x + c)$$

c)  $\frac{dy}{(y-1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$

$$-\frac{1}{y-1} = -\frac{1}{x+1} + c$$

$$y = 1 + \frac{x+1}{1-c(x+1)}$$

d)  $\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{dt}{t^2+4}$

$$2\sqrt{1+x} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + c$$

$$\therefore x = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + c \right)^2 - 1$$

3. שיטות למד"ר מסדר ראשון סטנדרטיות.

א. בדוק האם המד"ר הבא מדויק, ומצא את הפתרון הכללי לאלה שמדויקים:

a)  $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \therefore$  מדויקת  
 $f(x,y)?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y \quad \therefore f = x^3 y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + g'(y) = x^3 + y^3 \quad \therefore g = \frac{1}{4} y^4 + c$$

$$f = x^3 y + \frac{1}{4} y^4 + c$$

תשובה:  $\boxed{x^3 y + \frac{y^4}{4} = c_1}$

b)  $\frac{\partial M}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$  לא מדויקת

c)  $\frac{\partial M}{\partial v} = e^{uv} + v e^{uv} = \frac{\partial N}{\partial u}$  מדויקת

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v e^{uv}, \quad \therefore f = e^{uv} + g(v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = u e^{uv} + g'(v) = u e^{uv} \quad \therefore g = c$$

$$f = e^{uv} + c \quad \text{Soln: } e^{uv} = c_1$$

תשובה:  $\boxed{uv = c_1}$

d)  $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$  לא מדויקת

ב. מצא גורם אינטגרציה ופתור:

c) גורם אינטגרציה  $1/t^2$

$$\left(1 + \frac{y}{t^2}\right) dt = \frac{x dt - t dx}{t^2}$$

$$\therefore d\left(t - \frac{y}{t}\right) = d\left(-\frac{x}{t}\right)$$

$$t - \frac{y}{t} = -\frac{x}{t} + C$$

$$\therefore \boxed{x = y - t^2 + ct}$$

d) גורם אינטגרציה  $\frac{1}{u^2+v^2}$

$$\frac{u du + v dv}{u^2+v^2} + \frac{v du - u dv}{u^2+v^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2+v^2) + \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = C$$

$$u=0, v=1; \quad \frac{1}{2} \ln 1 + \tan^{-1}(0) = C \quad \therefore C=0$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln(u^2+v^2) + \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = 0}$$

a) מכפלים ב  $y$  - שני צעדים

$$2xy dx + x^2 dy = 0$$

$$d(x^2 y) = 0 \quad \therefore x^2 y = C$$

$$\boxed{y = C/x^2} \quad \text{תשובה:}$$

b)  $\frac{1}{y^2}$  :

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) - d(\ln y) = 0$$

$$\textcircled{*} \quad \frac{x}{y} - \ln y = C \quad \text{נקח בחשבון -}$$

$$(\cdot x=1, y(1)=1)$$

$$\therefore \frac{1}{1} - \ln 1 = C, \quad C=1$$

$$\therefore x - y \ln y = y$$

$$\boxed{x = y(\ln y + 1)} \quad \text{תשובה:}$$

ג. פתור את המשוואות הומוגניות:  $(y' = f\left(\frac{y}{x}\right))$

a)  $y' = \frac{2y-x}{y+4x}$

b)  $\frac{dw}{du} = \frac{2uw}{u^2-w^2}$

c)  $xy dy - y^2 dx = x\sqrt{x^2-y^2} dx$

a. הצבה  $y(x) = xz(x)$

$$xz' + z = \frac{2z-1}{z+4} \rightarrow \frac{z+4}{(z+1)^2} dz =$$

$$-\frac{dx}{x} \rightarrow \ln(z+1) - \frac{3}{z+1} = -\ln x + C$$

$$z = \frac{y}{x}, \quad y+x = Ce^{\frac{3x}{y+x}} \quad \text{תשובה:}$$

b. הצבה:  $w(u) = uz(u)$

$$uz' + z = \frac{2z}{1-z^2} \rightarrow \ln(z) - \ln(z^2+1) = \ln(u) + C \rightarrow \frac{wu}{w^2+u^2} = Cu$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1} \rightarrow xz' + z = z + \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \rightarrow \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x} \rightarrow \text{c.}$$

$$\frac{(x - y(x))(y(x) + x)}{x\sqrt{x^2 - y(x)^2}} + \ln(x) - C_1 = 0 \quad \text{תשובה}$$