2018 г. сентябрь — октябрь *т. 73, вып. 5 (443)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512.7

Геометрия вербальных уравнений в простых алгебраических группах над специальными полями

Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин

Данная статья содержит обзор последних достижений в исследовании вербальных уравнений в простых матричных группах и полиномиальных уравнений в простых матричных алгебрах (ассоциативных и лиевых), а также некоторые новые результаты относительно образов вербальных отображений на алгебраических группах, определенных над специальными полями: комплексным, вещественным, p-адическими (или близкими к таковым) или конечными.

Библиография: 174 названия.

Ключевые слова: линейная алгебраическая группа, вербальное отображение.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9838

Содержание

Исследования первого автора проводились при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.661.2016/1.4). Исследования второго и третьего авторов проводились при поддержке гранта ISF 1623/16 и Института математики им. Эмми Нётер (Рамат-Ган). Статья была написана во время визита второго автора в Математический институт им. Макса Планка (Бонн). Авторы признательны всем этим учреждениям за поддержку.

Два юноши пришли к мудрецу с вопросом: "Один из нас считает, что, как бы плохи ни были дела, всегда есть свет в конце туннеля; другой же убежден, что даже если дела идут хорошо, в какой-то момент все полетит в пропасть. Кто из нас прав?". "Оба правы, и оба неправы, – ответил мудрец. – Все зависит от того, какой угол наклона выбрал конструктор туннеля".

Ко Бо Женъ[1]

Вероятность того, что наугад выбранное животное – панда, значительно возрастает, если выборка осуществляется в пределах провинции Сычуань.

Б. Горкин-Перельман[2]

1. Введение

Данная статья преследует две основные цели. Во-первых, это краткий обзор последних достижений в исследовании вербальных уравнений в простых матричных группах и полиномиальных уравнений в простых матричных алгебрах (ассоциативных и лиевых). В этом отношении статью можно рассматривать как продолжение работы [87], где была сделана попытка провести параллели между различными постановками задачи, для групп и алгебр.

В центре нашего внимания изучение свойств образа рассматриваемого вербального отображения. А именно, в идеале хотелось бы доказать, что этот образ велик, т. е. отображение *сюръективно* или по меньшей мере *доминантно* (в топологии Зариского или в "естественной" топологии). В последнем случае, если сюръективность неизвестна, нас интересует "тонкая структура" образа.

Как обычно, слишком общая постановка (произвольное вербальное отображение на произвольной группе) редко приводит к содержательным результатам, поэтому стоит ограничиться рассмотрением достаточно широких классов слов и групп. Нас особенно интересуют *линейные алгебраические* группы, где для связных полупростых групп имеется теорема Бореля о доминантности [18]. Далее можно рассматривать специальные классы слов и/или полей определения. Первый подход приводит к впечатляющим результатам, обзор которых можно найти, например, в нашей недавней работе [62].

[1] *Занимательная философия*, изд-во "Железная Пагода", Кайфын, 1923.
[2] *Занимательная зоология*, изд-во "Желтая Река", Кайфын, 1923.

В данной работе мы рассматриваем специальные поля определения: комплексное, вещественное, p-адические, конечные или близкие к таковым. (В работе [62] также содержится обзор некоторых недавних результатов, справедливых в случае алгебраически замкнутого поля определения.)

Стоит также отметить, что случай конечного поля определения, естественно включающий в себя уравнения в конечных группах типа Ли, широко обсуждался в литературе последних лет (см., например, [153]–[155], [125], [7]), в основном вследствие удивительных успехов, связанных с применением алгебро-геометрических методов и решением целого ряда старых задач, таких как проблема Оре [114]). Гораздо меньше известно о матричных уравнениях над числовыми полями и их кольцами целых, так же как и над полями p-адических, вещественных и комплексных чисел (обзор некоторых результатов в этом направлении см. в работах [154], [155], [5], [99]). Тем самым наша статья содержит больше вопросов, чем ответов, что очевидным образом указывает на младенческую (если не эмбриональную) стадию развития данной области исследований.

Другая цель данной работы состоит в более детальном обсуждении некоторых ключевых результатов. При этом в некоторых случаях приводятся усовершенствованные доказательства и, что более важно, определенные обобщения. Особое внимание уделяется, как отмечено выше, изучению тонкой структуры образа, с целью гарантировать наличие в образе некоторых "общих" или "специальных" элементов (регулярных полупростых, унипотентных и т. п.). Эти части статьи читатель, заинтересованный только в общей картине, может опустить.

Наше основное послание к читателю закодировано в двух эпиграфах. В переводе на математический язык первый из них гласит, что если мы рассматриваем образ вербального отображения $w\colon G^d \to G$, варьируя w и G, то этот образ можно сделать сколь угодно большим (в рамках ограничений, вытекающих из природы задачи), фиксируя w и увеличивая G, и, наоборот, сколь угодно малым (опять же в рамках некоторых ограничений), фиксируя G и увеличивая w (в статье мы называем такую ситуацию "отрицательно-положительной"). Второй же эпиграф, грубо говоря, интерпретируется следующим образом: при аккуратном определении изучаемого класса групп G случайное слово (если не все слова) имеет большой образ (где понятия "случайный" и "большой" тоже следует аккуратно определить).

Мы пользуемся стандартными обозначениями. Основные понятия, связанные с вербальными отображениями, можно найти в монографии [150].

Начнем с нескольких наивных (и хорошо известных) примеров, которые, как мы надеемся, позволят читателю почувствовать суть рассматриваемых проблем. Сначала займемся извлечением квадратных корней в матричных группах.

Пример 1.1. Всегда ли уравнение $x^2 = g$ разрешимо в группе $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$? Разумеется, ответ "нет". Например, из матрицы

$$g = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

нельзя извлечь квадратный корень в группе G: по теореме Жордана такой корень имел бы два комплексных собственных значения, одно $\pm 2i$, а другое $\pm i/2$. Это невозможно, так как эти значения должны быть сопряжены.

Из этой ситуации есть по меньшей мере два естественных выхода. Во-первых, можно попытаться расширить поле определения и перейти к группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Здесь находится другой контрпример: у матрицы

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

нет квадратных корней в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, поскольку, все по той же теореме Жордана, собственные значения у такого квадратного корня были бы либо оба равны i, либо оба равны $-i$ и определитель матрицы был бы равен -1 (а не 1, как должно быть в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$). Эта трудность легко поправима: надо просто профакторизовать группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ по центру и рассмотреть присоединенную группу $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$: в ней можно уже извлекать корни любых степеней (то же самое можно проделать и в группе $\mathrm{PSL}_m(\mathbb{C})$ для любого $m \geqslant 2$).

Удивительным образом этот выход до какой-то степени может ввести в заблуждение: он не работает для простых групп любого типа, кроме типа A_n. Вот соответствующий результат.

Теорема 1.2 (Р. Стейнберг [163], П. Чаттерджи [31], [32]). *Отображение $x \mapsto x^n$ сюръективно на $\mathscr{G}(K)$ (K – алгебраически замкнутое поле характеристической экспоненты p, $\mathscr{G}$ – связная полупростая алгебраическая K-группа) тогда и только тогда, когда n взаимно просто с prz, где z – порядок центра группы $\mathscr{G}$, а r – произведение “плохих” простых чисел.*

Здесь “плохие” простые числа берутся из множества $\{2,3,5\}$ и зависят от типа схемы Дынкина. Для всех типов, кроме типа A_n, число 2 – плохое, так что квадратные корни извлекаются не всегда. В произвольной связной полупростой группе над $\mathbb{C}$ присоединенного типа корни степени n гарантированно извлекаются тогда и только тогда, когда n и 30 взаимно просты.

Наблюдение 1.3. Еще один выход из ситуации примера 1.1 заключается в следующем. Заменим группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ на ее компактную форму $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Тогда извлечение квадратных корней более не составляет никаких проблем. Более того, с помощью теории Ли можно извлекать корни любой степени в любой связной компактной вещественной группе Ли G, так как для такой группы экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ сюръективно (см., например, [41; следствие 2.1.2]). В самом деле, любой заданный элемент $g \in G$ можно записать в виде $g = \exp(a)$ и для любого целого $n \geqslant 1$ получить $(\exp(a/n))^n = g$.

В более общем контексте это наблюдение можно сформулировать следующим образом: оказывается, сюръективность экспоненциального отображения эквивалентна сюръективности всех отображений возведения в степень $G \to G$, $g \mapsto g^n$, в случае, если G – произвольная связная вещественная [129], [79] или комплексная [31; гл. 6] линейная алгебраическая группа; в вещественном случае детальное описание содержится в работах [40], [173], [34]; p-адический случай исследован в статье [33]. Читателю, интересующемуся историей проблемы сюръективности экспоненциального отображения, восходящей к 19-му веку (Ф. Энгель, Э. Штуди), стоит заглянуть в работу [172]; в статье [38] можно найти обзор современных исследований на эту тему, а в работе [81] – обобщения на случай полугрупп Ли.

Разумеется, следует выйти за рамки этих примеров и обсуждать более общие матричные уравнения. В данной статье мы ограничимся вербальными уравнениями в группе G вида

$$w(x_1, \dots, x_d) = g, \tag{1.1}$$

где w – элемент свободной группы с d образующими (групповое слово от d букв), и полиномиальными уравнениями в алгебре $\mathscr{A}$ вида

$$P(X_1, \dots, X_d) = a, \tag{1.2}$$

где P – элемент свободной ассоциативной или лиевой алгебры с d образующими над полем k (ассоциативный многочлен или многочлен Ли, коэффициенты которого суть *скаляры* из поля k). В обоих случаях правая часть уравнения фиксируется, а решения ищутся среди наборов d элементов группы G (соответственно алгебры $\mathscr{A}$).

Это означает, что если, скажем, $\mathscr{A}$ – матричная алгебра, то мы рассматриваем уравнения вида

$$XY - YX = C,$$

но *не вида*

$$BX - XB = C \quad \text{или} \quad AX^2 + BX + C = 0.$$

Последние уравнения гораздо труднее, и заинтересованному читателю стоит прочесть, например, работы [53], [156]. Что касается вербальных уравнений с константами, см. [60]–[62], [96] и приведенные в этих работах ссылки. См. также краткий обзор в п. 7.6.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что в нашей постановке решения уравнения (1.1) ищутся *в самой группе* G, *а не в большей группе, содержащей* G. Такая постановка является весьма распространенной, начиная с работ БернардаНоймана [135]; см. введение к статье [96], обзор [148] и ссылки в этих работах.

2. Вербальные уравнения в группах: сюръективность

Пусть $w(x_1, \dots, x_d)$ – групповое слово от d букв, не представимое в виде нетривиальной степени другого слова. Для любой группы G обозначим той же буквой отображение подстановки

$$\tilde{w} \colon G^d \to G, \tag{2.1}$$

определенное подстановкой набора $(g_1, \dots, g_d)$ вместо $(x_1, \dots, x_d)$ и последующим вычислением значения $w(g_1, \dots, g_d)$. Назовем $\tilde{w}$ вербальным отображением, индуцированным словом w. Пример 1.1 приводит к следующим естественным вопросам.

Вопрос 2.1. Пусть $G = \mathscr{G}(K)$, где $\mathscr{G}$ – связная полупростая алгебраическая группа. Является ли отображение $\tilde{w}$ сюръективным в случае, если

(i) $K = \mathbb{C}$ и $\mathscr{G}$ – группа присоединенного типа;

(i′) $K = \mathbb{R}$ и $\mathscr{G}$ – расщепимая K-группа присоединенного типа;

(ii) $K = \mathbb{R}$ и $\mathscr{G}$ – компактная группа?

Удивительным образом вопросы 2.1, (i), (i′), являются открытыми, даже в простейшем случае $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, даже для слов в алфавите из двух букв. Наивные попытки использовать теорию Ли не приводят к успеху даже в тех случаях, когда экспоненциальное отображение сюръективно. Скажем, отображение $\mathfrak{g}\times\cdots\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, индуцированное лиевским многочленом, может оказаться несюръективным, тогда как "то же самое" слово (где каждая скобка Ли $[X_i, X_j]$ заменена на групповой коммутатор $[x_i, x_j] = x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$) может индуцировать сюръективное отображение $G^d \to G$. Вот конкретный пример такой ситуации: отображение

$$P = [[[X, Y], X], [[X, Y], Y]] \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

не является сюръективным [8], тогда как соответствующее отображение

$$(x, y) \mapsto [[[x, y], x], [[x, y], y]]$$

сюръективно на $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (вычисления в пакете `МАГМА` в [10; разд. 9].

Для некоторых конкретных слов имеются положительные результаты. Из классических работ [141], [146] известно, что в предположениях вопроса 2.1 коммутаторное отображение сюръективно. В той же постановке образ любого энгелева слова

$$w = [[x, y], y, \dots, y]$$

содержит все полупростые и все унипотентные элементы [59]. Из этого следует, что такие слова сюръективны на $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (есть и другие доказательства этого факта, см. [6], [95], [10], [62]). Некоторые другие классы слов от двух переменных, для которых вербальное отображение сюръективно на $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, были обнаружены в работе [10], см. также [60]–[62].

Что же касается вопроса 2.1, (ii), тут ситуация абсолютно иная.

2.1. Отрицательно-положительные результаты для компактных вещественных групп. В предположениях вопроса 2.1, (ii), большинство известных к настоящему времени результатов могут быть названы отрицательно-положительными. Отрицательные результаты получаются, когда фиксируется группа и варьируется слово, а положительные результаты получаются, когда фиксируется слово и увеличивается группа (см. первый эпиграф к статье).

Основной отрицательно-положительный результат для анизотропных форм простых алгебраических групп над полем вещественных чисел, т. е. для связных компактных простых групп Ли [169; гл. 5.2] – это следующая теорема.

Теорема 2.2. (i) *Пусть $\mathscr{G}$ – анизотропная форма простой линейной алгебраической группы над вещественным полем $\mathbb{R}$, и пусть $G = \mathscr{G}(\mathbb{R})$. Тогда на* *группе G существует нетривиальная метрика $d(x, y)$ такая, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ найдется слово $w \in F_2$ такое, что*

$$d(1, \tilde{w}(g_1, g_2)) < \varepsilon$$

для всех $(g_1, g_2) \in G^2$.

(ii) *Пусть*

$$1 \neq w_1(x_1, \ldots, x_n) \in F_n, \qquad 1 \neq w_2(y_1, \ldots, y_m) \in F_m, \qquad w = w_1 w_2.$$

Тогда существует $c = c(w_1, w_2)$ такое, что для любой простой линейной алгебраической группы $\mathscr{G}$ лиева ранга $> c$ и для $G = \mathscr{G}(\mathbb{R})$ вербальное отображение

$$\tilde{w}\colon G^{n+m} \to G$$

сюръективно.

Утверждение (i) – это теорема А. Тома [165]. На самом деле Том рассматривал группу $G = \mathrm{SU}_m(\mathbb{C})$, слово $w \in F_2$ и метрику $d(x, y) = \|x - y\|$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма на унитарной группе. Однако для любой компактной группы $G = \mathscr{G}(\mathbb{R})$ можно зафиксировать ее точное представление $\rho\colon G \to \mathrm{SU}_m(\mathbb{C})$ и рассмотреть ограничение метрики $d(x, y)$ на группу $\rho(G)$. Тогда соответствующий результат для $\rho(G) \approx G$ получится, если мы рассмотрим ограничение отображения

$$\tilde{w}\colon\ \mathrm{SU}_m(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_m(\mathbb{C}) \to \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$$

на $\rho(G)$. Также вместо операторной нормы можно рассмотреть любую унитарно инвариантную норму, скажем, норму Фробениуса на пространстве квадратных матриц

$$M_m(\mathbb{C}) \geqslant \mathrm{SU}_m(\mathbb{C}) \geqslant G,$$

определенную формулой

$$\|x_{ij}\}\| = \sqrt{\sum_{i,j} |x_{ij}|^2}$$

(она инвариантна относительно левого и правого умножения на матрицы из группы $\mathrm{SU}_m(\mathbb{C})$).

Ниже мы приводим немного отличное доказательство утверждения (i), большей частью основанное на идеях работы [165].

Доказательство утверждения (i). Пусть $\|\cdot\|$ – унитарно инвариантная норма на G. Обозначим через d индуцированную метрику. Для любого $g \in G$ положим

$$l(g) := d(1, g).$$

Тогда $l(g) \leqslant c$ для любого $g \in G$, где $c \in \mathbb{R}$ – константа (так как G – компактная группа). Из стандартных свойств метрики вытекает, что

$$l(hgh^{-1}) = l(g) \quad \text{и} \quad l([g, h]) \leqslant 2l(g)l(h)$$

для всех $g, h \in G$ (детали см. в лемме 2.1 работы [165]).

Следующее наблюдение является ключевым в доказательстве Тома. Для группы G заданного лиева ранга r и для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ можно найти $q = q(r, \varepsilon)$ такое, что для любого элемента $g \in G$ выполняется неравенство

$$l(g^m) < \varepsilon \tag{2.2}$$

при некотором $1 \leqslant m = m(g) \leqslant q$.

В самом деле, зафиксируем G и предположим, что для всякого положительного целого q неравенство $l(g^k) \geqslant \varepsilon$ выполняется для некоторого элемента $g \in G$ и для всех $k \leqslant q$. Пусть $e < f \leqslant q$. Поскольку $\|gx\| = \|x\|$ для всех $g \in G$ и $x \in M_m(\mathbb{C})$, получим

$$d(g^e, g^f) = \|g^e - g^f\| = \|g^e(1 - g^{f-e})\| = \|1 - g^{f-e}\| \geqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

Положим

$$V_{t,\varepsilon} := \left\{ x \in G \;\middle|\; d(x, g^t) < \frac{1}{2}\varepsilon \right\}. \tag{2.4}$$

Это измеримое множество относительно меры Хаара μ на группе G, и для каждого $t = 1, \dots, q$ имеем

$$\mu(V_{t,\varepsilon}) = \mu(V_{1,\varepsilon}) > 0.$$

Из формул (2.4) и (2.3) вытекает, что множества $\mu(V_{t,\varepsilon})$ не пересекаются. Следовательно, для объединения $V_{q,\varepsilon} = \bigcup\limits_t V_{t,\varepsilon} \subset G$ имеем

$$\mu(V_{q,\varepsilon}) = \sum_{t=1}^{q} \mu(V_{t,\varepsilon}) = q\mu(V_{1,\varepsilon}). \tag{2.5}$$

Шар радиуса $\varepsilon/2$ – множество положительной меры, зависящей от ε. Тем самым, из формулы (2.5) следует, что при достаточно большом q подмножество $V_{q,\varepsilon} \subset G$ будет иметь меру, превосходящую любое наперед заданное положительное число. Это противоречит компактности группы G.

Зададим последовательность слов в F_2 формулами

$$\begin{gathered} w_0 = [x, y], \quad w_1 = [w_0, x], \quad w_2 = [w_1, y w_1 y^{-1}], \quad \dots, \\ w_{2i-1} = [w_{2i-2}, x^i], \quad w_{2i} = [w_{2i-1}, y w_{2i-1} y^{-1}], \quad \dots . \end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что эта последовательность не содержит тривиальных слов.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется постоянная $C > 1$ такая, что $l(g) \leqslant C$ для любого $g \in G$ (так как G компактна). Можно предположить, что $\varepsilon < 1/(4C)$. Найдется целое положительное $q = q(r, \varepsilon/C)$ со следующим свойством: для любого $g \in G$ существует целое положительное $m = m(g) \leqslant q$ такое, что

$$l(g^m) < \frac{\varepsilon}{2C}$$

(см. формулу (2.2)). Тогда для любого $h \in G$ имеем

$$\begin{aligned} l(w_{2m-1}(g,h)) &= l([w_{2m-2}(g,h), g^m]) \leqslant 2\,\underbrace{l(w_{2m-2}(g,h))}_{\leqslant C}\;\underbrace{l(g^m)}_{<\varepsilon/(2C)} < \varepsilon, \\ l(w_{2m}(g,h)) &= l([w_{2m-1}(g,h), h w_{2m-1}(g,h) h^{-1}]) \\ &\leqslant 2 l(w_{2m-1}(g,h))^2 < 2\varepsilon^2 < \varepsilon \frac{2}{4C} = \frac{\varepsilon}{2C}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $l(w_{2k}(g,h)) < \varepsilon/(2C)$ для некоторого $k \geqslant m$. Тогда

$$\begin{aligned} l(w_{2(k+1)-1}(g,h)) &= l([w_{2k}(g,h), g^{k+1}]) \leqslant 2\,\underbrace{l(w_{2k}(g,h))}_{<\varepsilon/(2C)}\,\underbrace{l(g^{k+1})}_{\leqslant C} < \varepsilon, \\ l(w_{2(k+1)}(g,h)) &= l([w_{2(k+1)-1}(g,h), hw_{2(k+1)-1}(g,h)h^{-1}]) \\ &\leqslant 2l(w_{2(k+1)-1}(g,h))^2 < 2\varepsilon^2 < \frac{\varepsilon}{2C}. \end{aligned}$$

Таким образом, по индукции получим $l(w_{2k}(g,h)) < \varepsilon/(2C)$ для всех $g, h \in G$ и всех $k \geqslant q$. Утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) – это теорема Хуи–Ларсена–Шалева [82]. Его следует рассматривать как важный шаг в направлении гипотезы Ларсена (которая, согласно работе [149], была сформулирована в его докладе 2008 г. на заседании Американского математического общества) о том, что любое вербальное отображение на связной компактной простой вещественной линейной алгебраической группе G достаточно большого ранга является сюръективным. Для некоторых слов эта гипотеза (в более слабой форме) была доказана в работе [45] для унитарных групп.

Приведем набросок доказательства утверждения (ii), следуя работе [82].

Доказательство утверждения (ii). Каждый элемент группы G содержится в $T = \mathscr{T}(\mathbb{R})$, где $\mathscr{T}$ – максимальный тор в $\mathscr{G}$ (напомним, что группа $\mathscr{G}$ анизотропна и потому G не содержит унипотентных элементов). Обозначим через $N_G(T)$ нормализатор T в G. Имеем

$$N_G(T)/T \approx W,$$

где W – группа Вейля группы $\mathscr{G}$ (см. [66; 6.5.9]). Обозначим через $\dot{w}_{\mathrm{c}} \in N_G(T)$ прообраз элемента Кокстера.

Напомним, что если R – неприводимая система корней и

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset R$$

– фиксированный набор простых корней, то элемент Кокстера группы W – это любое произведение отражений $w_{\mathrm{c}} = \prod_i w_{\alpha_i}$, где каждый корень $\alpha_i \in \Pi$ появляется ровно один раз (отражения w_{α_i} в таком произведении можно записывать в любом порядке); подробное описание см. в [23; V.6].

Имеем $\dot{w}_{\mathrm{c}}^{-1} = \sigma \dot{w}_{\mathrm{c}} \sigma^{-1} t_0$ для некоторых $\sigma \in G$ и $t_0 \in T$. Можно показать, что любой элемент $t \in T$ можно записать в виде

$$t = \dot{w}_{\mathrm{c}}(s\dot{w}_{\mathrm{c}}^{-1}s^{-1})$$

для некоторого $s \in T$ (см., например, [62]). Следовательно, любой элемент $Tt_0^{-1} = T$ содержится в квадрате класса сопряженности элемента $\dot{w}_{\mathrm{c}}$. Заметим, что образ вербального отображения инвариантен относительно сопряжений. Тем самым, чтобы доказать утверждение (ii), надо показать, что $\dot{w}_{\mathrm{c}} \in \operatorname{Im}\tilde{w}'$ для любого нетривиального слова $w' \in F_n$ и соответствующего вербального отображения $\tilde{w}'\colon G^n \to G$ при условии, что лиев ранг группы $\mathscr{G}$ достаточно велик относительно фиксированного слова w'.

Достаточно рассмотреть случаи, когда $\mathscr{G}$ – группа одного из классических типов A_r, B_r, C_r, D_r. Поскольку система корней D_r является подсистемой и в B_r, и в C_r, в любой группе $\mathscr{G} = \mathscr{G}(\mathbb{C})$ типа B_r или C_r есть подгруппа $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G}_1(\mathbb{C})$ типа D_r. Более того, максимальная компактная подгруппа Ли $\mathscr{K}_1 \leqslant \mathscr{G}_1$ является также компактной подгруппой Ли в группе $\mathscr{G}$ и потому содержится в максимальной компактной подгруппе Ли $\mathscr{K}$ группы $\mathscr{G}$. Пусть T – максимальный тор в $\mathscr{K}_1$. Заметим, что T совпадает с некоторым максимальным тором в $\mathscr{K}$, поскольку группы $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}_1$ имеют одинаковый лиев ранг. Любой элемент $\mathscr{K}$ сопряжен с элементом T, который является максимальным тором в $\mathscr{K}_1$. Поэтому, доказав сюръективность отображения $\tilde{w}\colon \mathscr{K}_1^{n+m} \to \mathscr{K}_1$, мы докажем сюръективность отображения $\tilde{w}\colon \mathscr{K}^{n+m} \to \mathscr{K}$. Следовательно, достаточно рассмотреть типы A_r, D_r.

Пусть $\mathscr{G}$ – простая односвязная группа типа A_r. Тогда

$$G = \mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C}).$$

Рассмотрим вербальное отображение

$$\tilde{w}\colon \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})^n \to \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$$

для произвольного нетривиального слова $\omega \in F_n$. Образ этого отображения – связное, компактное, нетривиальное (будучи плотным по Зарискому в силу теоремы Бореля, см. теорему 3.2) подмножество группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, содержащее единицу. Пересечение максимального тора T' группы $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ и множества $\tilde{w}(\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})^n)$ – также нетривиальное компактное подмножество T', содержащее единицу. Значит, найдется d такое, что любой элемент $t \in T'$ порядка $> d$ принадлежит $\tilde{w}(\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})^n)$. Далее, пусть $r+1 > d$, и пусть

$$\xi\colon \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C})$$

– неприводимое унитарное представление группы $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Заметим, что это представление получается в результате ограничения представления $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ на бинарных формах степени r (см., например, [75; предложение 4.11]). Обозначим через ϵ_m произвольный примитивный корень из 1 степени m. Положим

$$t = \begin{cases} \epsilon_{r+1}, & \text{если } r+1 \text{ нечетно},\\ \epsilon_{2(r+1)}, & \text{если } r+1 \text{ четно}. \end{cases}$$

Тогда набор собственных значений матрицы $\xi(t)$ состоит из всех корней $\sqrt[r+1]{1}$, если $r+1$ нечетно, и из всех корней $\sqrt[r+1]{1}$, умноженных на фиксированный корень $\epsilon_{2(r+1)}^r$, если $r+1$ четно. Можно найти прообраз $\dot{w}_{\mathrm{c}} \in \mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C})$ элемента Кокстера w_{c}, имеющий такой набор собственных значений. (Заметим, что элемент Кокстера в группе $\mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C})$ соответствует мономиальной матрице циклических перестановок ортогонального базиса.) Тогда $\xi(t)$ сопряжен с $\dot{w}_{\mathrm{c}}$ в $\mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C})$. В самом деле, обе матрицы унитарны и имеют один и тот же набор собственных значений.

Рассмотрим теперь нетривиальные вербальные отображения

$$\tilde{w}\colon \mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C})^n \to \mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C}), \qquad \tilde{w}\colon \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})^n \to \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}),$$

соответствующие одному и тому же слову w. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})^n \arrow[r, "\tilde{w}"] \arrow[d, "\xi^n"] & \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \arrow[d, "\xi"] \\ \mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C})^n \arrow[r, "\tilde{w}"] & \mathrm{SU}_{r+1}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

где $\xi^n((g_1,\dots,g_n)) := (\xi(g_1),\dots,\xi(g_n))$, является коммутативной, так как и ξ, и ξ^n коммутируют с вербальными отображениями. Тогда если $\dot{w}_{\mathrm{c}}$ лежит в $\operatorname{Im}\tilde{w}\circ\xi$, то $\dot{w}_{\mathrm{c}} \in \operatorname{Im}\tilde{w}$. Тем самым в случае A_r наше утверждение доказано. Случай D_r разбирается с помощью похожих рассуждений, см. подробности в разделе 2 работы [82]. Утверждение (ii) теоремы 2.2 доказано.

Замечание 2.3. Пусть $\mathscr{G}$ – произвольная анизотропная простая группа, определенная над неархимедовым локальным полем k (тем самым группа обязана принадлежать типу A_n). Напомним, что по теореме Брюа–Титса–Руссо (см. короткое доказательство в статье [144]) группа $\mathscr{G}$ анизотропна тогда и только тогда, когда группа $G=\mathscr{G}(k)$ компактна в топологии, индуцированной нормированием поля k. Группа G изоморфна $\mathrm{SL}(1,D)$ – группе элементов приведенной нормы 1 тела D, определенного над k. Известно, что существует ряд $\{G_i\}_{i=0}^{\infty}$ из нормальных подгрупп $G_i \lhd G$ такой, что

$$G_0 = G, \quad [G_0,G_0]=G_1, \quad [G_1,G_i]\leqslant G_{i+1}, \quad \dots,$$

причем

$$G_i \subset 1+\mathfrak{P}_D^i, \quad \text{где } \mathfrak{P}_D^i = \{x\in D \mid v_D(x)\geqslant i\}$$

(здесь $v_D(x)=c^{-1}v_p(\mathrm{Nrd}_{D/k}(x))$ – неархимедово дискретное нормирование на теле D, индуцированное неархимедовым дискретным нормированием v_p на поле k, c – индекс тела D, $\mathrm{Nrd}_{D/k}$ – приведенная норма; см. [147], [142; 1.4]). Пусть теперь

$$\|x\|_p := p^{-v_D(x)}$$

– соответствующая норма на D. Поскольку $\mathrm{Nrd}_{D/k}\colon G\to k^*$ – гомоморфизм групп, норма $\|\cdot\|_p$ инвариантна относительно левого и правого умножения на элементы группы G. Далее, пусть F_n – свободная группа ранга n. Положим

$$F_n^0 := F, \quad F_n^1 := [F_n^0,F_n^0], \quad \dots, \quad F_n^i := [F_n^1,F_n^{i-1}], \quad \dots .$$

Тогда для любого $w\in F_n^i$ и всех $(g_1,\dots,g_n)\in G^n$ имеем неравенство

$$\|\tilde{w}(g_1,\dots,g_n)-1\|_p \leqslant p^{-i}.$$

Тем самым феномен Тома можно наблюдать и для простых анизотропных групп над неархимедовыми локальными полями.

Замечание 2.4. Феномен Тома далее исследовался в работах [1], [6], где он получил имя "почти тождество" в группе G.

Отметим также некоторые положительные результаты, полученные для некоторых конкретных слов:

• всякое энгелево слово сюръективно на любой компактной группе $G = \mathscr{G}(\mathbb{R})$ (см. [45] для $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$, [59] в общем случае);

• если w не принадлежит второй производной подгруппе $F_2^{(2)}$, то для бесконечно многих n индуцированное вербальное отображение сюръективно на группе $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ [45].

2.2. Некомпактные вещественные группы. Для таких групп известно немного. Следующий вопрос выглядит наиболее принципиальным.

Вопрос 2.5. Можно ли наблюдать феномен "почти тождеств" на *некомпактной* простой линейной алгебраической группе $\mathscr{G}$, определенной над полем $\mathbb{R}$? Скажем, в *расщепимой* группе, определенной над $\mathbb{R}$? Точнее, пусть $G = \mathscr{G}(\mathbb{R})^0/Z$ – связная компонента единицы в группе вещественных точек группы $\mathscr{G}$ по модулю центра (G проста, см., например, [142; разд. 3.2]).

Существует ли нестепенное слово w ($w \neq v^k$, $k > 1$), индуцирующее несюръективное отображение $\tilde{w}\colon G \times \dots \times G \to G$?

Вопрос открыт даже в случае $\mathscr{G} = \mathrm{SL}_2$. Мы можем доказать лишь следующее простое утверждение, обобщающее один из результатов работы [82].

Предложение 2.6. *Пусть $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, и пусть $w \in F_d$ – произвольное нетривиальное слово. Тогда образ вербального отображения $\tilde{w}\colon G^d \to G$ содержит все расщепимые полупростые элементы. Более того, если $\operatorname{Im} w$ содержит инволюцию, то $\operatorname{Im} w$ содержит все полупростые элементы группы G.*

Доказательство. Для $d = 1$ утверждение очевидно. Далее нам понадобится следующий факт, обобщающий одно из утверждений в доказательстве теоремы 3.1 работы [82].

Лемма 2.7. *Пусть L – бесконечное поле произвольной характеристики. Пусть $\tilde{w}\colon \mathrm{SL}_2(L)^n \to \mathrm{SL}_2(L)$ – вербальное отображение, соответствующее нетривиальному слову $\omega \in F_n$. Тогда существует непостоянный многочлен $\Phi(x, y) \in L[x, y]$ такой, что $\Phi(0, 0) = 2$ и*

$$\Phi(\alpha, \beta) \in \operatorname{Im} \operatorname{tr} \circ \tilde{w} \quad \text{для всех } \alpha, \beta \in L.$$

Доказательство. Предположим, что существуют $g_2, \dots, g_n \in \mathrm{SL}_2(L)$ такие, что $\omega(1, g_2, \dots, g_n) \neq 1$. Тогда $\omega' := \omega(1, x_2, \dots, x_n) \in F_{n-1}$ – нетривиальное слово, и доказательство завершается по индукции.

Поэтому далее мы можем предполагать, что $\omega(1, g_2, \dots, g_n) = 1$ для всех $g_2, \dots, g_n$.

Зафиксируем элементы $g_2, \dots, g_n$ и возьмем элемент g_1 вида

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 1 + xy \end{pmatrix}, \qquad x, y \in L. \tag{2.6}$$

Тогда
$$g_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1+xy & -y \\ -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит,
$$\operatorname{tr} \tilde{\omega}(g_1, g_2, \dots, g_n) = \Phi(x, y)$$

– многочлен от двух переменных x, y над полем L. Предположим, что для любых фиксированных $g_2, \dots, g_n \in \mathrm{SL}_2(L)$ имеем $\Phi(x, y) \equiv c$ – постоянный многочлен. Тогда $c = 2$ для любого g_1, так как

$$\Phi(0,0) = \operatorname{tr} \tilde{w}(1, g_2, \dots, g_n) = \operatorname{tr} 1 = 2.$$

Поскольку любой нецентральный элемент группы $\mathrm{SL}_2(L)$ сопряжен элементу вида (2.6) (см. [47]), из равенства

$$\operatorname{tr} \tilde{w}(g_1, g_2, \dots, g_n) = 2$$

для всех $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathrm{SL}_2(L)$, где g_1 – элемент вида (2.6), следует то же равенство, но уже для всех $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathrm{SL}_2(L)$. Таким образом, образ отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{SL}_2(L)^n \to \mathrm{SL}_2(L)$ состоит из унипотентных элементов. Поскольку группа $\mathrm{SL}_2(L)$ плотна по Зарискому в группе $\mathrm{SL}_2(\overline{L})$ (где $\overline{L}$ – алгебраическое замыкание поля L) [19; 18.3], образ отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{SL}_2(\overline{L})^n \to \mathrm{SL}_2(\overline{L})$ также состоит из унипотентных элементов, что противоречит теореме Бореля о доминантности (см. ниже теорему 3.2). Следовательно, найдутся элементы $g_2, \dots, g_n \in \mathrm{SL}_2(L)$ такие, что

$$\Phi(x, y) = \operatorname{tr} \tilde{w} \left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 1+xy \end{pmatrix}, g_2, \dots, g_n \right)$$

– непостоянный многочлен. Лемма доказана.

Нам потребуется следующая хорошо известная лемма.

Лемма 2.8. *Пусть $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ – полупростой элемент, $g \neq \pm 1$. Он расщепим тогда и только тогда, когда $|\operatorname{tr} g| > 2$. Его порядок равен 4 тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} g = 0$.*

Доказательство. Элемент $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ либо лежит в расщепимом торе и тогда сопряжен с матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*,$$

либо лежит в анизотропном торе и тогда сопряжен с матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

В первом случае
$$|\operatorname{tr} g| = |\alpha + \alpha^{-1}| \geqslant 2.$$

Во втором случае
$$|\operatorname{tr} g| = 2|\cos\phi| \leqslant 2.$$

Более того,
$$|\operatorname{tr} g| = 0 \iff \cos\phi = 0 \iff \text{порядок элемента } g \text{ равен } 4.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь вербальное отображение $\tilde{w}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, соответствующее тому же слову w (мы по-прежнему обозначаем его $\tilde{w}$). Как и в доказательстве леммы 2.7, можно предполагать, что $w(1, g_2, \dots, g_d) = 1$ для всех $g_2, \dots, g_d$.

Далее, пусть $\Phi \in \mathbb{R}[x, y]$ – многочлен, удовлетворяющий условиям леммы 2.7 (здесь $L = \mathbb{R}$). Заметим, что область значений непостоянного вещественного многочлена состоит либо из всех вещественных чисел, либо из всех вещественных чисел $\geqslant r$, либо из всех вещественных чисел $\leqslant r$ для некоторого $r \in \mathbb{R}$. Поскольку
$$2 = \operatorname{tr} \tilde{w}(1, g_2) = \Phi(0, 0),$$
то либо все элементы $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ со следом $\operatorname{tr} g \geqslant 2$, либо все элементы со следом $\operatorname{tr} g \leqslant 2$ принадлежат образу отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (см. лемму 2.7). Поскольку для любого расщепимого полупростого элемента g группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ имеем либо $\operatorname{tr} g \geqslant 2$, либо $\operatorname{tr}(-g) \geqslant 2$ (лемма 2.8), все расщепимые полупростые элементы группы $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ принадлежат образу отображения $G^d \to G$. Предположим теперь, что в образе отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ есть элемент порядка 4 (очевидным образом, это эквивалентно наличию элемента порядка 2 в образе вербального отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^d \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$). Тогда согласно леммам 2.7 и 2.8 либо все элементы $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ со следом $\operatorname{tr} g \geqslant 0$, либо все элементы со следом $\operatorname{tr} g \leqslant 0$ лежат в образе отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, и поэтому все полупростые элементы лежат в образе отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^d \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Предложение 2.6 доказано.

Замечание 2.9. Компактный и некомпактный случаи могут существенно отличаться друг от друга и с точки зрения применимости различных методов. Например, в компактном случае можно пытаться обнаружить несюръективность вербального отображения с помощью гомологических методов. В самом деле, обозначим
$$M = \mathscr{G}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathscr{G}(\mathbb{R}), \qquad N = \mathscr{G}(\mathbb{R}), \qquad m = \dim_{\mathbb{R}} N$$
и в предположении компактности группы N рассмотрим индуцированное отображение групп гомологий
$$w^*\colon H_m(M) \to H_m(N)$$
(с произвольными коэффициентами, так как и M, и N ориентируемы, как и всякая группа Ли). Если w^* – ненулевое отображение, то отображение $\tilde{w}$ обязано быть сюръективным, иначе оно пропускалось бы через $N' = N \setminus \{\text{точка}\}$.

Это привело бы нас к противоречию: $H_m(N') = 0$, поскольку N' не является компактным множеством (см., например, предложение 3.29 в книге [76]). Очевидно, такой подход мог бы работать только в компактном случае, когда $H_m(N) \neq 0$ (см., например, теорему 3.26 в [76]). (Мы признательны Е. И. Шустину за это наблюдение.)

В статье [96] описаны другие топологические методы исследования вербальных отображений.

Далее, в предположении, что ответ на вопрос 2.1 отрицательный, можно поинтересоваться наличием препятствий к сюръективности, которые можно было бы обнаружить на уровне вещественных точек.

Вопрос 2.10. Пусть $\mathscr{G}$ – связная простая линейная алгебраическая вещественная группа присоединенного типа. Пусть $G = \mathscr{G}(\mathbb{R})^0$ – связная компонента единицы в группе вещественных точек. Существует ли нестепенное слово w ($w \neq v^k$, $k > 1$) такое, что отображение $G \times \cdots \times G \to G$ сюръективно, а отображение $\mathscr{G}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathscr{G}(\mathbb{C}) \to \mathscr{G}(\mathbb{C})$ несюръективно?

Отметим, что для степенных слов описанная в этом вопросе ситуация вполне реальна. К примеру, рассмотрим слово $w = x^2$ и компактную форму $\mathscr{G}$ простой группы типа B, C или D. Тогда отображение возведения в квадрат сюръективно на G (см. наблюдение 1.3), но не на $\mathscr{G}(\mathbb{C})$ (см. теорему 1.2).

3. Вербальные уравнения с общей правой частью

Поскольку вопрос 2.1, (i), открыт, а на вопрос 2.1, (ii), получен отрицательный ответ, следует решить для себя, как изменить стратегию исследования уравнения (1.1). В этой связи процитируем принцип 2.18 из работы [98] (переименовав его и надеясь на снисходительное отношение читателя к самоцитированию).

Принцип панды. Разумное свойство разумного математического объекта, лежащего в разумном классе объектов, если и не всегда выполняется, то будет выполняться по крайней мере для объекта в общем положении при условии, что изучаемый класс при необходимости можно надлежащим образом расширить или сузить.

В еще более расплывчатых терминах этот принцип сформулирован во втором эпиграфе к данной статье.

Замечание 3.1. В нашей постановке дух этого принципа состоит в решении уравнения (1.1) для “общего” элемента g группы G, когда G пробегает либо один и тот же класс групп, а именно класс (групп рациональных точек) простых линейных алгебраических групп присоединенного типа (так что мы остаемся в границах провинции Сычуань), либо некоторый более широкий класс (так что мы пытаемся расширить ареал).

Разумеется, проблемы становятся осмысленными только после того, когда термин “общий (а также другие часто используемые эвфемизмы, такие как “случайный” , “типичный” и т. п.) заменяется некоторым точно определенным понятием. Заметим, что ответы на поставленные вопросы могут сильно зависеть от выбора такого определения. Имеется много разных возможностей, и мы не собираемся обсуждать их в данной статье, отсылая читателя к богатейшей литературе на эту тему. Упомянем лишь работы М. Громова [67], [69], А. Ю. Ольшанского [139], Я. Олливье [138], И. Каповича и П. Шуппа [92], [93], Н. М. Данфилда и У. П. Тёрстона [39], М. Ярдена и А. Лубоцкого [74], Ю. Лю и М. М. Вуд [116], из которых можно почерпнуть немало материала для сравнения различных подходов к понятию случайности в группах.

В любом случае невозможно не упомянуть единственный общий результат такого типа, теорему А. Бореля.

Теорема 3.2 [18]. *Пусть K – произвольное поле, $\mathscr{G}$ – связная полупростая линейная алгебраическая группа, определенная над K, и $w \neq 1$. Тогда соответствующее вербальное отображение $\tilde{w}\colon \mathscr{G}^d \to \mathscr{G}$ доминантно.*

Напомним, что это означает, что образ отображения содержит открытое по Зарискому плотное подмножество (т. е. уравнение (1.1) с "типичной" правой частью разрешимо).

Этот результат имеет важное следствие: если $\mathscr{G}$ и w такие, как в теореме Бореля, и поле K алгебраически замкнуто, то вербальная ширина группы $G = \mathscr{G}(K)$ не превосходит 2, т. е. любой элемент $g \in G$ представим в виде произведения не более двух значений слова w.

Замечание 3.3. Сопоставляя теорему Бореля с примером Тома, мы немедленно убеждаемся в необходимости уточнить сформулированный выше принцип панды: ответ на вопрос, является ли панда типичным для провинции Сычуань животным, может зависеть от того, что понимается под "типичным". В самом деле, пример Тома показывает, что для некоторых слов w все панды (унитарные матрицы из образа вербального отображения, индуцированного словом w) живут внутри ε-окрестности единичной матрицы, так что Том не назвал бы их типичными. А Борель, возможно, назвал бы: ведь ε-окрестность плотна по Зарискому!

Замечание 3.4. В духе отрицательно-положительных результатов из предыдущего раздела можно надеяться на то, что образ любого вербального отображения на компактной группе G велик, если достаточно велик лиев ранг G. Более конкретно, стоит упомянуть следующую теорему плотности, которую можно рассматривать как метрический аналог гипотезы Ларсена.

При заданном $\varepsilon > 0$ будем говорить, что подмножество Y метрического пространства X является ε-плотным, если расстояние от любой точки $x \in X$ до подмножества Y не превосходит ε. Пусть $G = \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$. Пусть

$$d_{\mathrm{rk}}(g,h) := \frac{\mathrm{rk}(g-h)}{n}$$

обозначает нормализованную ранговую метрику. Я. Шнайдер и А. Том [149] доказали, что при заданном $\varepsilon > 0$ и нетривиальном слове $w \in F_d$ найдется целое N, зависящее от ε и w, такое, что образ вербального отображения $\tilde{w}\colon \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})^d \to \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ является ε-плотным в нормализованной ранговой метрике для всех $n \geqslant N$.

Зададимся теперь вопросом, что происходит за пределами провинции Сычуань, и попытаемся расширить границы.

Прежде всего заметим, что сверхоптимистический подход имеет мало шансов на успех, в том смысле, что образ "типичного" вербального отображения "не слишком велик". Чтобы немного уточнить это весьма расплывчатое утверждение, удобно воспользоваться понятием ширины.

Определение 3.5. Пусть G – произвольная группа, а $w \in F_d$ – произвольное слово. Для любого элемента $g \in G$ определим его w-длину как наименьшее $k \in \mathbb{N} \cup \infty$ такое, что g представим в виде произведения k значений отображения $\tilde{w}\colon G^d \to G$.

Тогда w-ширина группы G определяется так:

$$\mathrm{wd}_w(G) := \sup_{g \in G} \ell_w(g).$$

Располагая этим понятием, можно грубо оценить, насколько велик образ вербального отображения на группе G в ситуации, когда нет ни сюръективности, ни доминантности (или когда неизвестно, выполняются ли эти свойства, или же когда доминантность не имеет смысла): неформально говоря, чем меньше w-ширина группы G, тем больше образ отображения $\tilde{w}\colon G^d \to G$.

Первый заслуживающий упоминания результат в этом направлении принадлежит А. Мясникову и А. Николаеву [133]: для любого слова w любая (неэлементарная) гиперболическая группа имеет бесконечную w-ширину. Согласно А. Ю. Ольшанскому, гиперболические группы являются "общими" в классе всех групп, так что типичная группа имеет бесконечную вербальную ширину.

Сделаем более скромную попытку. Скажем, в теореме Бореля попробуем заменить "алгебраическую группу" на "группу Ли". Тогда упомянутое выше утверждение о вербальной ширине более не будет иметь места. В самом деле, рассмотрим коммутаторное слово $w = [x, y]$. Тогда другая теорема А. Бореля препятствует слишком далеко идущим обобщениям.

Теорема 3.6 [20]. *Пусть G – связная полупростая группа Ли. Тогда G имеет конечную коммутаторную ширину в том и только том случае, когда ее центр конечен.*

В частности, универсальная накрывающая $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ имеет бесконечную коммутаторную ширину (это утверждение приписывается Дж. Милнору, мы цитируем его по работе [171]).

Замечание 3.7. Сделаем еще попытку, настаивая на *простоте* группы G. Имеются простые группы бесконечной коммутаторной ширины (Ж. Барж и Э. Жис [11] (бесконечно порожденная), А. Муранов [132] (конечно порожденная), П.-Э. Капрас и К. Фудзивара [30] (конечно представимая), Э. Финк и А. Том [49] (конечной палиндромической ширины)). Есть и примеры групп G, для которых $\mathrm{wd}_w(G) \in \mathbb{N}$ может быть сделана сколь угодно большой при варьировании w (см. [132] и раздел 5 настоящей статьи). В последнем случае такие примеры можно получить с помощью теоремы 2.2, (i). Интересно, существуют ли такие примеры среди простых компактных алгебраических групп над *неархимедовыми* локальными полями. Общий результат А. Хайкина-Запирайна [84] указывает на то, что в таких группах w-ширина конечна для любого нетривиального слова w, но не говорит, можно ли ее сделать сколь угодно большой. В этой связи см. вопрос 2.1.

Дальнейшая разработка геометрических идей работы [11] привела к новым примерам такого рода (см., например, [51]). Однако есть несколько классов простых групп, естественно возникающих в топологическом контексте (см., например, [167]), в которых каждый элемент является коммутатором. Было бы интересно продолжить исследование более общих вербальных отображений на таких группах, особенно в связи с их глубокими геометрическими свойствами. Заинтересованный читатель может обратиться к работам [26], [166], [28], [100] и статьям из соответствующих списков литературы.

Замечание 3.8. Несколько более успешная попытка обобщения теоремы Бореля о доминантности была предпринята в работе [62], где класс изучаемых линейных алгебраических групп был расширен с *полупростых* до *совершенных*. Напомним, что группу называют совершенной, если она совпадает со своим коммутантом. Пусть K есть $\mathbb{C}$ (или произвольное алгебраически замкнутое поле характеристики 0). Пусть $\mathscr{G}$ – совершенная группа, определенная над K, и пусть $G = \mathscr{G}(K)$. Мы будем отождествлять G и $\mathscr{G}$. Обозначим через U унипотентный радикал группы G, тогда G/U – полупростая алгебраическая группа, определенная над K. По теореме Мостова [131] (современное изложение можно найти, например, в [78; теорема VIII.4.3], [36; предложение 5.4.1]) найдется замкнутая линейная алгебраическая подгруппа H группы G (подгруппа Леви), изоморфная группе G/U. (Равносильное условие – наличие разложения группы G в полупрямое произведение $G = HU$.) Все подгруппы Леви сопряжены. Зафиксируем одну из них и будем впредь всюду обозначать ее через H.

Пусть

$$U_1 = U, \quad U_2 = [U, U_1], \quad \dots, \quad U_i = [U, U_{i-1}], \quad \dots, \quad U_{r+1} = \{1\}$$

– нижний центральный ряд группы U, и пусть $V_i = U_i/U_{i+1}$ – его факторы. Тогда можно рассматривать V_i как $K[H]$-модуль (в самом деле, действие H на V_i, индуцированное сопряжением на U элементами группы G, является K-линейным, так как K – поле характеристики 0).

Назовем $K[H]$-модуль M *аугментативным*, если у него нет $K[H]$-факторов M/M', на которых H действует тривиально. Если G – совершенная группа, то V_1 – аугментативный $K[H]$-модуль [64], [67].

Будем говорить, что G – *прочная* совершенная группа, если модуль V_i аугментативный для любого i. (Если класс нильпотентности группы U равен 1, т. е. если U – абелева группа, то всякая совершенная группа G является прочной.)

Будем говорить, что G – *строго прочная* совершенная группа, если для любого i пространство V_i не содержит нененулевых T-инвариантных векторов (здесь T обозначает максимальный тор группы G).

Тогда имеется следующий аналог теоремы Бореля [62]:

(i) *если группа G – строго прочная, то для любого нетривиального слова $w \in F_d$ отображение $\tilde{w}\colon G^d \to G$ доминантно*;

(ii) *если группа G – прочная, то для любого*

$$w = w_1(x_1, \dots, x_n)w_2(y_1, \dots, y_k) \in F_{n+k}, \qquad w_1, w_2 \neq 1,$$

отображение $\tilde{w}\colon G^{n+k} \to G$ *доминантно.*

Было бы интересно исследовать случай совершенных групп до конца.

Вопрос 3.9. Существуют ли совершенная K-группа $\mathscr{G}$ и нетривиальное слово $w \in F_d$ такие, что вербальное отображение

$$w\colon (\mathscr{G}(K))^d \to \mathscr{G}(K)$$

не является доминантным?

Замечание 3.10. В том же духе, пытаясь расширить границы еще дальше, можно рассмотреть группу Кремоны $G_0 = \mathrm{Cr}(2, K)$ (группу бирациональных автоморфизмов проективной плоскости $\mathbb{P}^2_K$), где K – алгебраически замкнутое поле (скажем, $K = \mathbb{C}$). Во многих отношениях группа G_0 похожа на простую линейную алгебраическую группу (см. статьи Ж.-П. Серра [151], [152]). Это и подходящий кандидат для изучения вербальных отображений. Причина состоит в том, что, хотя она не проста как абстрактная группа (см. [29] для $K = \mathbb{C}$ и [117] для произвольного K), она является простой топологической группой относительно нескольких естественных топологий. Ж. Бланк [14] установил этот факт для топологии типа Зариского, введенной Ж.-П. Серром [152], а Ж. Бланк и С. Циммерманн [16] разобрали случай локального поля K и евклидовой топологии (введенной в работе [15]). Так как в последнем случае группа G_0 может не быть даже совершенной (см. [174] для случая $K = \mathbb{R}$), то мы полагаем $G := [G_0, G_0]$.

Возникают следующие естественные вопросы.

Вопрос 3.11. Пусть $w \in F_d$ – нетривиальное слово.

(i) Является ли отображение $\tilde{w}\colon G^d \to G$ доминантным в топологии Зариского?

(ii) Пусть K – локальное поле. Является ли отображение $\tilde{w}\colon G^d \to G$ доминантным в евклидовой топологии?

Что касается проблем сюръективности, оснований для особого оптимизма нет, даже в простейшем случае степенных слов. Скажем, если K – конечное поле, то порядки элементов группы G ограничены (см. подробности в статье [151]), и поэтому существуют несюръективные степенные отображения. Более того, это наблюдение можно распространить и на случай, когда K алгебраически замкнуто: в этом случае группа G содержит элементы g, не являющиеся бесконечно делимыми (например, таким свойством обладают элементы бесконечного порядка, не сопряженные никакому элементу группы $\mathrm{GL}_2(K)$), и поэтому существуют степенные отображения, образ которых не содержит g; см. подробности (приведенные Бланком) в [126].

Тем не менее для нестепенных слов следующий вопрос представляется вполне осмысленным.

Вопрос 3.12. Пусть $w \in F_d$ – нестепенное слово. Может ли отображение $\tilde{w}\colon G^d \to G$ не быть сюръективным?

Авторов не слишком бы удивило, если бы процитированные выше замечательные результаты помогли помочь, с одной стороны, в поиске нетривиальных слов, индуцирующих несюръективные отображения, а с другой стороны, в доказательстве теорем борелевского типа.

Можно задать и более общий вопрос.

Вопрос 3.13. Существуют ли локально компактная топологическая группа G, простая по меньшей мере как топологическая группа, и слово $w = w(x_1, \dots, x_d)$, не представимое в виде нетривиальной степени другого слова такие, что соответствующее вербальное отображение $\tilde{w}\colon G^d \to G$ не является сюръективным, но образ его плотен?

4. Тонкая структура образа вербального отображения

Рассмотрим ситуацию, когда не известно, является ли вербальное отображение сюръективным. Попытаемся понять более тонкие свойства образа. В частности, нас интересует наличие в образе элементов определенного типа: полупростых (желательно в изобилии) или унипотентных. Эти случаи абсолютно различны и требуют различных методов исследования.

Начнем со случая групп типа Ли ранга 1, который на самом деле является ключевым.

4.1. Поиск полупростых элементов в группах лиева ранга 1. Пусть $H = \mathrm{SL}_2(L)$, где $L \subset K$ – бесконечное подполе алгебраически замкнутого поля K. Так как SL_2 – связная редуктивная группа, H плотна в $G = \mathrm{SL}_2(K)$. Тем самым $\tilde{w}(H^d)$ – плотное подмножество в $\tilde{w}(G^d)$.

Тогда, согласно [10] (см. также [62]), множество $\tilde{w}(H^d)$ содержит бесконечно много представителей различных классов сопряженности группы G. Этот факт был доказан (другим методом) и использован в работе [82]. В той же работе было доказано, что множество $\tilde{w}(H^d)$ содержит бесконечно много представителей расщепимых полупростых классов сопряженности группы G, если $\mathbb{R} \subset L$ или $\mathbb{Q}_p \subset L$. Ниже мы приводим обобщение этого результата.

Прежде всего определим класс рассматриваемых полей.

Определение 4.1. Назовем поле *квадратично скудным*, если оно допускает лишь конечное число различных квадратичных расширений.

Заметим, что поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ – квадратично скудные. В случае, когда полем определения является $\mathbb{R}$, предложение 2.6 гарантирует, что все расщепимые полупростые элементы группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ лежат в образе любого нетривиального вербального отображения. Естественно попытаться обобщить этот факт на другие поля определения.

Замечание 4.2. Пусть F – квадратично скудное поле характеристики 0. Тогда найдется конечное множество простых чисел (конечных точек поля $\mathbb{Q}$)

$$S'_F = \{p_1, \dots, p_r\}$$

таких, что $S'_F \cup \{-1\}$ – это базис группы $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^* \cap F^{*2})$. Таким образом, для любого целого числа s либо $\sqrt{s} \in F$, либо

$$s \equiv \pm p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \mod (\mathbb{Q}^* \cap F^{*2}),$$

где $a_i = 0, 1$ и $a_{i_0} = 1$ хотя бы для одного $i_0 \leqslant r$.

Обозначим через p_∞ архимедову точку поля $\mathbb{Q}$ и положим

$$S_F = S'_F \cup \{p_\infty\}.$$

Теорема 4.3. *Пусть L – поле характеристики 0, содержащее квадратично скудное подполе. Пусть $G = \mathrm{SL}_2(L)$, и пусть $\tilde{w}\colon G^d \to G$ – вербальное отображение, индуцированное нетривиальным словом $w \in F_d$. Тогда $\tilde{w}(G^d)$ содержит бесконечно много представителей различных расщепимых полупростых классов сопряженности группы G.*

Замечание 4.4. Хорошо известно, что класс сопряженности расщепимого полупростого элемента группы $\mathrm{SL}_2(L)$ однозначно определен значением его следа.

Доказательство теоремы 4.3. До определенной степени мы следуем идеям доказательства леммы 3.2, (ii), работы [82].

По лемме 2.7 найдется непостоянный многочлен $\Phi(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ такой, что $\Phi(0, 0) = 2$ и

$$\Phi(\alpha, \beta) \in \mathrm{Im}\,\mathrm{tr} \circ \tilde{w} \quad \text{для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

Тогда можно найти рациональное число β такое, что $f(x) := \Phi(x, \beta)$ – непостоянный многочлен и

$$f(\alpha) \in \mathrm{Im}\,\mathrm{tr} \circ \tilde{w} \quad \text{для любого } \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Положим

$$\mathscr{X}_L := \bigl\{r = f(q) \mid q \in \mathbb{Q},\ \sqrt{f(q)^2 - 4} \in L\bigr\}.$$

Лемма 4.5. *Предположим, что $\mathscr{X}_L$ – бесконечное множество. Тогда выполняется утверждение теоремы 4.3.*

Доказательство. Пусть $q \in \mathbb{Q}$. Тогда $f(q) = \mathrm{tr}\, g$ для некоторого элемента $g \in \mathrm{Im}\,\tilde{w}$. Можно предположить, что $f(q) \neq \pm 2$. Тогда g – расщепимый полупростой элемент в группе $\mathrm{SL}_2(L)$ в том и только том случае, когда

$$\sqrt{(\mathrm{tr}\, g)^2 - 4} \in L.$$

Более того, если $\mathrm{tr}\, g_1 \neq \mathrm{tr}\, g_2$ для $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(L)$, то g_1, g_2 принадлежат разным классам сопряженности в $\mathrm{SL}_2(L)$. Таким образом, если множество $\mathscr{X}_L$ бесконечно, то $\mathrm{Im}\,\tilde{w}$ содержит бесконечно много расщепимых полупростых элементов, принадлежащих различным классам сопряженности в $\mathrm{SL}_2(L)$. Лемма доказана.

Очевидно, можно предполагать, что само поле L является квадратично скудным. Пусть S – конечное множество точек, содержащее p_∞.

Лемма 4.6. *Найдется бесконечное множество $\mathscr{V} \subset \mathbb{Q}$ такое, что для любых $p \in S$ и $q \in \mathscr{V}$ имеем*
$$\sqrt{f(q)^2 - 4} \in \mathbb{Q}_p.$$

Доказательство. Пусть

$$\Psi(x, y, z) = cx^r - cy^s + z\phi(y, z) \in \mathbb{Q}[x, y, z], \quad \text{где } c \neq 0.$$

Для любого $p \in S$ уравнение $\Psi(x, y, z) = 0$ задает поверхность $X_{\mathbb{Q}_p}$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}_p}$. Поскольку для $a = (1, 1, 0)$ мы имеем

$$\Psi(a) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_a \neq 0,$$

по теореме о неявной функции найдутся окрестность точки a в $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}_p}$:

$$U_{p,a} = U^x_{p,1} \times U^y_{p,1} \times U^z_{p,0},$$

где

$$\begin{aligned}
U^x_{p,1} &= \{\alpha \in \mathbb{Q}_p \mid \|\alpha - 1\|_p < \varepsilon\},\\
U^y_{p,1} &= \{\beta \in \mathbb{Q}_p \mid \|\beta - 1\|_p < \varepsilon\},\\
U^z_{p,0} &= \{\gamma \in \mathbb{Q}_p \mid \|\gamma\|_p < \varepsilon\},
\end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, и гладкая непрерывная функция относительно топологии, индуцированной естественной топологией поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\theta_p \colon U^y_{p,1} \times U^z_{p,0} \to U^x_{p,1},$$

такие, что

$$(\theta_p((\beta, \gamma)), \beta, \gamma) \in X_{\mathbb{Q}_p} \quad \text{для любых } \beta \in U^y_{p,1},\ \gamma \in U^z_{p,0}. \tag{4.1}$$

Положим
$$U^y_{S,1} = \prod_{p \in S} U^y_{p,1}, \qquad U^z_{S,0} = \prod_{p \in S} U^z_{p,0}.$$

Множества $U^y_{S,1}$ и $U^z_{S,0}$ суть окрестности 1 и 0 в $\prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p$ соответственно. Так как подмножество $\mathbb{Q} \subset \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p$ плотно в $\prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p$ по теореме о слабой аппроксимации, множества $\mathbb{Q} \cap U^y_{S,1}$ и $\mathbb{Q} \cap U^z_{S,0}$ бесконечны. Более того, множество

$$\mathscr{V} := \left\{ q \in \mathbb{Q} \;\middle|\; q = \frac{q_y}{q_z},\ q_y \in \mathbb{Q} \cap U^y_{S,1},\ 0 \neq q_z \in \mathbb{Q} \cap U^z_{S,0} \right\}$$

бесконечно (в самом деле, для любого $p \in S$ значения $\|q_y\|_p$ ограничены, а значение $\|q_z\|_p$ можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon \in \mathbb{R}$).

Пусть

$$f(t) = c_0t^d + c_1t^{d-1} + \cdots + c_d$$

(мы переименовали переменную x в t). Положим $t = y/z$. Тогда

$$\frac{c_0^2x^{2d}}{z^{2d}} - \left(f\left(\frac{y}{z}\right)^2 - 4\right) = \frac{c_0^2x^{2d} - c_0^2y^{2d} + z\phi(y,z)}{z^{2d}}$$

для некоторого $\phi(y,z) \in \mathbb{Q}[y,z]$. Положим

$$\Psi(x,y,z) = c_0^2x^{2d} - c_0^2y^{2d} + z\phi(y,z).$$

Для любого $p \in S$ из формулы (4.1) получим, что для любых $q_y \in \mathbb{Q} \cap U^y_{S,1}$ и $q_z \in \mathbb{Q}^* \cap U^z_{S,0}$

$$\underbrace{\frac{c_0^2q_y^{2d} - q_z\phi(q_y,q_z)}{q_z^{2d}}}_{=f(q_y/q_z)^2-4} = \frac{c_0^2\theta_p(q_y,q_z)^{2d}}{q_z^{2d}} \in \mathbb{Q}_p^{*2}. \tag{4.2}$$

Таким образом, из формулы (4.2) и определения множества $\mathscr{V}$ получим утверждение леммы.

Вернемся к доказательству теоремы 4.3. Положим $S := S_L$ и

$$\mathscr{X}'_L := \{r = f(q) \mid q \in \mathscr{V}\}.$$

Тогда $\mathscr{X}'_L$ – бесконечное множество положительных рациональных чисел (по лемме 4.6).

Лемма 4.7. $\mathscr{X}'_L \subset \mathscr{X}_L$.

Доказательство. Пусть $r \in X'_L$. Положим

$$s := r^2 - 4 = \frac{c}{d}, \quad \text{где } (c,d) = 1.$$

Так как $p_\infty \in S_L = S$, имеем

$$\sqrt{s} \in \mathbb{Q}_{p_\infty} = \mathbb{R},$$

и потому $s > 0$. Введем следующее обозначение:

$$\bar{s} := \text{бесквадратная часть целого числа } sd^2 = cd.$$

Тогда

$$\mathbb{Q}(\sqrt{s}\,) = \mathbb{Q}(\sqrt{\bar{s}}) \quad \text{и} \quad \mathbb{Q}_p(\sqrt{s}\,) = \mathbb{Q}_p(\sqrt{\bar{s}}) \quad \text{для любого } p \in S.$$

Так как s – квадрат в $\mathbb{Q}_p$ для всех $p \in S$ (лемма 4.6), то в разложении

$$\bar{s} \equiv p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_n^{a_n} \mod(L^{*2} \cap \mathbb{Q})$$

получим $a_i = 0$ для всех i (см. замечание 4.2). Значит, $\sqrt{\bar{s}} \in L$ согласно определению множества $S = S_L$. Мы доказали включение $\mathscr{X}'_L \subset \mathscr{X}_L$. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 4.3 следует теперь из лемм 4.5, 4.6, 4.7.

Замечание 4.8. Вероятно, внеся должные изменения, теорему 4.3 можно распространить на случай, когда L – поле положительной характеристики.

4.2. Поиск унипотентных элементов в группах лиева ранга 1. Удивительным образом эта ситуация намного сложнее даже в случае $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (см. вопрос 2.1, (i)). Поскольку все унипотентные элементы сопряжены, для того чтобы гарантировать наличие всех унипотентных элементов в образе вербального отображения $\tilde{w}\colon G^d \to G$, достаточно доказать это для *одного-единственного* элемента

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако на сегодняшний день это известно только для некоторых семейств вербальных отображений. Основные подходы, опробованные на данный момент, основаны либо на

(i) вложении Магнуса (см. [10]), либо на

(ii) рассмотрении многообразий представлений групп с одним соотношением $F_2/\langle w\rangle$ (см. [60], [61]).

Мы опускаем подробности, отсылая читателя к цитированным выше работам и ограничиваясь наброском основных идей.

Первый подход основан на следующей конструкции Магнуса (точнее, на некоторой ее модификации, см. [122] и [170]). Сначала каждой образующей x_i группы F_d ставится в соответствие верхнетреугольная матрица с определителем 1,

$$\begin{pmatrix} t_i & s_i \\ 0 & t_i^{-1} \end{pmatrix},$$

над кольцом $R_d = \mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_d, t_d^{-1}, s_1, \dots, s_d]$. В цитированных выше работах показано, что это соответствие продолжается до вложения группы $F_d/F_d^{(2)}$ в группу $B(R_d)$ унимодулярных верхнетреугольных матриц над кольцом R_d (здесь $F_d^{(2)}$ обозначает вторую производную подгруппу группы F_d). Для поля K степени трансцендентности не менее $2d$ над $\mathbb{Q}$ это задает вложение группы $F_d/F_d^{(2)}$ в $B(K)$, группу унимодулярных верхнетреугольных матриц над полем K. Пусть $w \in F_d^{(1)} \setminus F_d^{(2)}$. Тогда вербальное отображение

$$\tilde{w}\colon B(\mathbb{C})^d \to U(\mathbb{C}) := [B(\mathbb{C}), B(\mathbb{C})]$$

сюръективно. Для любого $L \leqslant \mathbb{C}$ подгруппа $B(L)$ плотна в $B(\mathbb{C})$. Следовательно, $\tilde{w}(B(L))$ содержит нееденичный элемент. Таким образом, в $\tilde{w}(\mathrm{SL}_2(L))$ есть унипотентный элемент. Наличие унипотентных элементов для слов $w \in F_d \setminus F_d^{(1)}$ очевидно (достаточно ограничить $\tilde{w}$ на $U(L)$). Таким образом, имеем следующий факт, доказанный Т. Бандман и Ю. Г. Зархиным.

Теорема 4.9 [10]. *Пусть L – поле характеристики 0, и пусть $w \in F_n \setminus F_n^{(2)}$. Пусть $G = \mathrm{SL}_2(L)$, и пусть $\tilde{w}\colon G^n \to G$ – соответствующее вербальное отображение. Тогда множество $\operatorname{Im}\tilde{w}$ содержит нетривиальный унипотентный элемент.*

Второй подход основан на изучении структуры многообразия представлений

$$R(\Gamma_w, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \{\rho\colon \Gamma_w \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}.$$

А именно, его можно отождествить с

$$\mathscr{W}_w = \{(g_1, \dots, g_d) \in G^d \mid \tilde{w}(g_1, \dots, g_d) = 1\}$$

(см. [120; с. 4]) и вложить в

$$\mathscr{T}_w = \{(g_1, \dots, g_d) \in G^d \mid \operatorname{tr} \tilde{w}(g_1, \dots, g_d) = 2\}.$$

Таким образом, $\mathscr{T}_w$ – многообразие элементов γ в G^d таких, что $\tilde{w}(\gamma)$ – унипотентный элемент группы G. Очевидно, что $\mathscr{W}_w \subseteq \mathscr{T}_w$. Тогда

$$\mathscr{W}_w \neq \mathscr{T}_w \quad \Longrightarrow \quad \text{все унипотентные элементы лежат в } \operatorname{Im} \tilde{w}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим неприводимые компоненты этих многообразий. Все компоненты $\mathscr{T}_w$ имеют размерность $3d-1$. Следовательно, если $\mathscr{W}_w$ содержит компоненту меньшей размерности, из этого следует, что она строго содержится в некоторой компоненте многообразия $\mathscr{T}_w$, так что образ $\tilde{w}$ содержит все унипотентные элементы группы G.

Этот метод требует массивных вычислений, так что чем длиннее слово w, тем быстрее достигается предел вычислительных ресурсов, даже в случае, если для поиска компонент меньшей размерности мы заменим $\mathscr{W}_w$ на многообразие характеров $\mathscr{W}_w \mathbin{/\!\!/} G$.

Замечание 4.10. Мы не знаем, верна ли импликация, обратная к (4.3):

$$\text{все унипотентные элементы лежат в } \operatorname{Im} \tilde{w} \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{W}_w \neq \mathscr{T}_w.$$

Для того чтобы получить полупростые и унипотентные элементы в образе вербального отображения на группах большего лиева ранга, можно использовать следующую классическую конструкцию.

4.3. Вложение $\mathrm{SL}_2(L)$ в простые группы. Пусть L – поле, $\mathscr{G}$ – простая линейная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над L, $G = \mathscr{G}(L)$. Наличие подходящих гомоморфизмов $\xi\colon \mathrm{SL}_2(L) \to G$ дает нам инструменты для исследования вербальных отображений, в частности, для сведения некоторых вопросов о вербальных отображениях на группе G к соответствующим вопросам для группы $\mathrm{SL}_2(L)$.

I. *Вложение Морозова–Джекобсона.* Пусть L – поле характеристики 0, и пусть $u \in G = \mathscr{G}(L)$ – унипотентный элемент. Тогда найдется замкнутая подгруппа $\tilde{\Gamma} \leqslant \mathscr{G}$ такая, что подгруппа $\Gamma := \tilde{\Gamma}(L) \leqslant G$ содержит u и изоморфна либо $\mathrm{SL}_2(L)$, либо $\mathrm{PSL}_2(L)$ (см., например, [83; 7.4, 10.2]); не так легко различить две вышеупомянутые группы ранга 1 (см. дискуссию в [128]).

Далее, пусть $\tilde{w}\colon G^d \to G$ – вербальное отображение, обозначим через

$$\operatorname{Res}_\Gamma \tilde{w}\colon \Gamma^d \to \Gamma$$

его ограничение на Γ. Пусть $\xi\colon \mathrm{SL}_2(L) \to G$ – гомоморфизм с образом Γ. Обозначим через

$$\tilde{w}'\colon \mathrm{SL}_2(L)^d \to \mathrm{SL}_2(L)$$

вербальное отображение, индуцированное тем же словом $w \in F_d$.

I.1. Предположим, что существует нетривиальный унипотентный элемент $u' \in \mathrm{Im}\, \tilde{w}'$. Тогда

$$\xi(u') \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Res}_\Gamma\, \tilde{w}) \subset \mathrm{Im}\, \tilde{w}.$$

В частности, так можно получить любой унипотентный элемент в $\mathrm{Im}\, \tilde{w}$ (это было замечено в работе [10]).

I.2. Пусть U – максимальная унипотентная подгруппа в G, нормализуемая группой $T = \mathscr{T}(L)$, где $\mathscr{T}$ – максимальный расщепимый тор в Γ, пусть $u \in U$ – регулярный унипотентный элемент G, и пусть $\Gamma \leqslant G$, Γ изоморфна $\mathrm{SL}_2(L)$ или $\mathrm{PSL}_2(L)$ – подгруппе, содержащей u. Пусть $T_\Gamma \leqslant \Gamma$ – максимальный тор в Γ. Можно предположить, что $T_\Gamma \leqslant T$.

Следующий факт хорошо известен, мы приводим доказательство за неимением ссылки.

Предложение 4.11. *Если порядок элемента $t \in T_\Gamma$ достаточно велик, то $\xi(t)$ – регулярный полупростой элемент G.*

Доказательство. Пусть R – система корней, соответствующая группе $\mathscr{G}$. Зафиксируем $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ – набор простых корней, соответствующий тору $\mathscr{T}$, тогда группа U порождена корневыми подгруппами $\langle x_\alpha(t) \mid t \in L$, $\alpha \in R^+\rangle$ (см., например, раздел 2 работы [161]) и всякий регулярный унипотент $u \in U$ можно записать в виде

$$u = x_{\alpha_1}(a_1)x_{\alpha_2}(a_2)\cdots x_{\alpha_r}(a_r)u^*,$$

где $a_i \neq 0$, $a_i \in L$ для любого $i, u^* \in [U,U]$ (см. [158; 3.1.13], [160; лемма 3.2c]). Тогда для любого $t \in T_\Gamma$ имеем

$$tut^{-1} = x_{\alpha_1}(\chi_1(t)s_1)x_{\alpha_2}(\chi_2(t)s_2)\cdots x_{\alpha_r}(\chi_r(t)s_r)u^{**},$$

где $s_i \neq 0$ для любого i, $u^{**} \in [U,U]$ и $\chi_i\colon T_\Gamma \to L^*$ – характер T_Γ, соответствующий корню α_i. Пусть u' – унипотентный элемент $\mathrm{SL}_2(L)$ такой, что $\xi(u') = u$, и пусть $t' \in \mathrm{SL}_2(L)$ – элемент такой, что $\xi(t') = t \in T_\Gamma$. Можно отождествить u' с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого $a \in L^*$, а t' – с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}.$$

Поскольку L – поле характеристики 0, бесконечно много степеней u'^n появляются среди элементов вида $t'u't'^{-1}$ для некоторого $t' \in \mathrm{SL}_2(L)$. Тогда множество $\{tut^{-1} \mid t \in T_\Gamma\}$ содержит бесконечно много элементов вида $u^m, m \in \mathbb{Z}$. В свою очередь это влечет равенства

$$\chi_1(t) = \chi_2(t) = \cdots = \chi_r(t)$$

для бесконечно многих элементов $t \in T_\Gamma$. Далее, все характеры $\chi_i\colon T_\Gamma \to L^*$ получаются ограничением характеров тора $\mathscr{T}$ на одномерный подтор $\mathscr{T}_{\tilde\Gamma} := \tilde\Gamma \cap \mathscr{T}$, и тогда на L-точках имеем $T_\Gamma = \mathscr{T}_{\tilde\Gamma}(L)$. Поскольку характеры любого тора непрерывны в топологии Зариского, из совпадения характеров одномерного тора $\mathscr{T}_{\tilde\Gamma}$ на бесконечном множестве вытекает, что это одни и те же характеры, и поэтому все ограничения $\chi_i\colon T_\Gamma \to L^*$ дают характер $\chi\colon T_\Gamma \to L^*$. Так как каждый положительный корень α является суммой корней α_i, соответствующий характер $\chi_\alpha\colon T_\Gamma \to L^*$, определенный формулой

$$tx_\alpha(s)t^{-1} = x_\alpha(\chi_\alpha(t)s),$$

равен χ^N для некоторого $N > 0$. Тогда если $t \in T_\Gamma$ – элемент достаточно большого порядка, то

$$tx_\alpha(s)t^{-1} \neq x_\alpha(s) \quad \text{для любого } \alpha \in R^+,$$

и поэтому t – регулярный элемент. Предложение доказано.

Следующий факт, используемый в работе [82], непосредственно следует из предложения 4.11.

Предложение 4.12. *Если $t \in \operatorname{Im} w'$ – расщепимый полупростой элемент достаточно большого порядка, то $\xi(t) \in \operatorname{Im}\tilde w$ – расщепимый регулярный полупростой элемент группы G.*

II. *Вложение Тестерман.* Пусть L – поле характеристики $p > 0$. Тогда предшествующие конструкции для случая характеристики 0 имеют следующее ограничение: унипотентный элемент $u \in G$ может попасть в образ гомоморфизма $\xi\colon \mathrm{SL}_2(L) \to G$, только если его порядок равен p. Оказывается, что это условие на порядок элемента u является достаточным. Следующая теорема была доказана в работе [164] для "хороших" простых чисел (см. также [130], где приведено более простое доказательство). Случай "плохих" простых чисел был разобран в работе [145].

Теорема 4.13. *Пусть G – простая алгебраическая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Пусть $u \in G$ – унипотентный элемент порядка p. Тогда u содержится в замкнутой связной подгруппе $\Gamma \leqslant G$ типа A_1, за исключением случая, когда $p = 3$, $G = \mathrm{G}_2$, u – элемент порядка 3, лежащий в определенном классе сопряженности (обозначенном $\mathrm{A}_1^{(3)}$).*

Вот немедленное следствие.

Следствие 4.14. *Пусть p, G, Γ, u – такие, как в теореме 4.13. Пусть $w \in F_d$ – нетривиальное слово, $\tilde w'\colon \Gamma^d \to \Gamma$ – соответствующее вербальное отображение. Предположим, что существует нетривиальный унипотентный элемент $u' \in \operatorname{Im}\tilde w'$. Тогда u лежит в образе отображения $\tilde w\colon G^d \to G$.*

5. Проблемы типа Варинга

Если $\mathscr{G}$ – полупростая алгебраическая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем K, $G = \Gamma(K)$ и $w \in F_d$ – нетривиальное слово, то даже в случае, когда сюръективность вербального отображения $\tilde{w}\colon G^d \to G$ неизвестна (или известно, что оно не является сюръективным), теорема Бореля о доминантности гарантирует представимость любого элемента $g \in G$ в виде произведения не более двух значений слова w:

$$g = g_1 g_2, \qquad g_i \in \operatorname{Im} \tilde{w}.$$

Однако феномен Тома, который обсуждался в п. 2.1, показывает, что это не обязательно так в случае, когда поле определения не является алгебраически замкнутым. Более того, доказательство теоремы Тома показывает, что w-ширину компактной группы $G = \mathscr{G}(\mathbb{R})$ можно сколь угодно увеличить, варьируя слово w.

В самом деле, зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть w – слово Тома, т. е. образ отображения $\tilde{w}$ содержится в ε-окрестности единичного элемента группы G. Тогда для любого заданного положительного целого k легко доказать (скажем, индукцией по k), что для любых $g_1, \dots, g_k \in \operatorname{Im} w$ в обозначениях теоремы 2.2, (i), имеем

$$l(g_1 \cdots g_k) = d(1, g_1 g_2 \cdots g_k) < k\varepsilon.$$

Следовательно, уменьшая ε и выбирая подходящее слово Тома w, можно сделать w-ширину группы G больше любого наперед заданного положительного числа.

Однако для *расщепимых* групп ситуация не столь безнадежна, хотя и здесь имеются отрицательно-положительные результаты.

Пусть $\mathscr{G}$ – расщепимая простая односвязная линейная алгебраическая группа, определенная над полем K (не обязательно алгебраически замкнутым). Тогда группа $G = \mathscr{G}(K)$ – квазипростая абстрактная группа (т. е. $G = [G, G]$ и $G/Z(G)$ проста), за исключением случаев

$$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2),\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3),\ \mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_4),\ \mathrm{B}_2(2),\ \mathrm{G}_2(2).$$

Случаи, когда поле определения конечно или бесконечно, требуют отдельного рассмотрения.

5.1. Случай конечных полей. В случае, когда поле определения K конечно, теорема Бореля о доминантности имеет еще меньше смысла, чем в случае вещественного или p-адического поля определения. Так что w-ширину можно рассматривать как разумную альтернативу при измерении величины образа вербального отображения $\tilde{w}$. Цель состоит в получении результатов в духе теоремы 2.2, (ii), гарантирующих, что любой элемент группы G представим в виде произведения "небольшого" количества значений слова w.

Напомним, что если $K = \mathbb{F}_q$, то помимо случая расщепимой группы $\mathscr{G}$, когда абстрактные группы $\mathscr{G}(q)$ просты (группы Шевалле), имеется несколько дополнительных серий. А именно, пусть $\mathscr{G}$ – связная простая односвязная линейная алгебраическая группа, определенная над полем K. Так как K – конечное поле, по теореме Ленга группа $\mathscr{G}$ квазирасщепима (т. е. обладает подгруппой Бореля, определенной над K). Если $\mathscr{G}$ не является расщепимой, получаем *скрученные формы* групп Шевалле (иногда их называют группами Стейнберга) типов

$$^2\mathrm{A}_r\ (r > 1), \quad ^2\mathrm{D}_r\ (r > 3), \quad ^3\mathrm{D}_4, \quad ^2\mathrm{E}_6.$$

Их группы рациональных точек $\mathscr{G}(K)$ – квазипростые абстрактные группы.

Если к этому списку добавить абстрактные группы типов

$$^2\mathrm{B}_2(2^{2m+1}), \quad ^2\mathrm{G}_2(3^{2m+1}), \quad ^2\mathrm{F}_4(2^{2m+1})$$

(группы Судзуки и Ри), каждая из которых получается как группа неподвижных точек некоторого автоморфизма соответствующей простой алгебраической группы, исключить группы $^2\mathrm{B}_2(2)$ и $^2\mathrm{G}_2(3)$, не являющиеся квазипростыми, и заменить группу $^2\mathrm{F}_4(2)$ на ее коммутант (который называют группой Титса), получим основное бесконечное семейство конечных простых неабелевых групп (конечные простые группы типа Ли). Вместе с семейством A_n знакопеременных групп и 26 спорадическими группами они составляют список всех конечных простых неабелевых групп. Таким образом, любой общий факт о вербальных отображениях на конечных простых группах можно рассматривать как результат о вербальных отображениях на группах точек простой (или квазипростой) алгебраической группы над конечным полем (с точностью до центра).

Здесь имеется следующий отрицательно-положительный результат.

Теорема 5.1. (i) *Пусть G – конечная простая неабелева группа, и пусть A – $\mathrm{Aut}(G)$-инвариантное подмножество в G, содержащее единицу. Тогда найдется слово $w \in F_2$ такое, что $\operatorname{Im}\tilde{w} = A$.*

(ii) *Пусть*

$$1 \neq w_1(x_1, \dots, x_n) \in F_n, \qquad 1 \neq w_2(y_1, \dots, y_m) \in F_m, \qquad w = w_1 w_2.$$

Тогда существует $c = c(w_1, w_2)$ такое, что для любой квазипростой группы G порядка больше c образ отображения $\tilde{w}\colon G^{n+m} \to G$ содержит $G \setminus Z(G)$.

Утверждение (i) – это теорема А. Лубоцкого [119]. Она показывает, что образ вербального отображения может быть сколь угодно мал в рамках неизбежных естественных ограничений (образ обязан содержать единицу и быть инвариантным относительно автоморфизмов), если группа G зафиксирована, а слово w варьируется. (Предшествующие этому результаты М. Кассабова и Н. Николова [94] и М. Леви [112] относятся к некоторым конкретным семействам конечных простых групп.)

Доказательство утверждения (i) основано на теореме о “полуторном” порождении [69], [159]: для любого элемента $a \neq 1$ конечной неабелевой простой группы G существует $b \in G$ такой, что $\langle a, b\rangle = G$. Доказательство достаточно замысловатое. Из него вытекает еще и такой интересный факт: если G – конечная неабелева простая группа, то найдется слово $w \in F_2$ такое, что для любых $(a, b) \in G \times G$ имеем

$$w(a, b) \neq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle a, b\rangle = G.$$

Так как слово $w \in F_2$ можно рассматривать как элемент группы F_d, $d > 2$, вышеупомянутый результат справедлив и для слов из F_d.

Замечание 5.2. Этот отрицательный результат показывает, что в положительном результате в части (ii) нельзя опустить предположение о том, что ранг G достаточно велик. В самом деле, в ситуации части (i) можно в качестве A взять класс сопряженности, так что для пары (w, G) получим w-ширину больше, чем 2.

Замечание 5.3. М. Леви распространил утверждение на квазипростые и почти простые группы [113].

Утверждение (ii) (которое стоит сравнить с теоремой 2.2, (ii)) – это теорема Р. Гуральника и Ф. Х. Тьепа [72], которые сделали заключительный шаг по дороге, проложенной двумя предшествующими статьями М. Ларсена, А. Шалева и Ф. Х. Тьепа [107], [108]. Доказательство трудное. Основная часть работы, проделанная в [107], в основном базируется на теории характеров Делиня–Люстига в сочетании с некоторыми арифметико-геометрическими свойствами групп типа Ли. Среди таких свойств можно отметить тонкую теорему в духе теоремы Чеботарёва, гарантирующую наличие регулярных полупростых элементов в образе отображения $\tilde{w}$, лежащих в расщепимом максимальном торе группы G. Высокотехнологичное доказательство этой теоремы основано на использовании формулы следа Лефшеца и оценок типа Ленга–Вейля.

Используя эти методы, авторы в конечном счете доказывают, что для заданной пары слов w_1, w_2 и достаточно большой группы G найдутся специально подобранные классы сопряженности C_1, C_2 такие, что

$$C_1C_2 \supseteq G \setminus \{1\} \quad \text{и} \quad C_1 \subset \operatorname{Im} \tilde{w}_1, C_2 \subset \operatorname{Im} \tilde{w}_2.$$

Поскольку 1 лежит в образе любого вербального отображения, заключаем, что

$$\operatorname{Im} \tilde{w}_1 \operatorname{Im} \tilde{w}_2 = G,$$

и потому отображение $\tilde{w}$ сюръективно.

В работе [108] результаты и конструкции из [107] распространены на случай, когда G – *квазипростая* группа. При этом вербальная ширина возрастает до 3 и приведены явные примеры центральных элементов вербальной длины 3, препятствующие улучшению оценки до 2, но оставляющие открытым вопрос о том, все ли *нецентральные* элементы имеют длину не более 2. Этот последний шаг сделан в работе [72] ценой значительных усилий, с использованием тонких теоретико-групповых аргументов (таких как исследование регулярных элементов специального вида) в сочетании с некоторыми фактами из теории спиноров.

Замечание 5.4. Мы не знаем, можно ли распространить утверждение (ii) на случай, когда w есть произведение двух слов w_1w_2, не являющихся независимыми. Здесь имеется очевидное естественное ограничение: слово w должно быть непредставимо в виде нетривиальной степени другого слова: $w \neq w_1^k$ для $k > 1$.

Замечание 5.5. Теорема 5.1 относится к произвольным словам. Поведение вербальных отображений на конечных простых группах, соответствующих словам специального вида, является предметом интенсивных исследований в течение нескольких последних десятилетий. Здесь мы приводим лишь краткий список основных достижений, часто цитируя лишь окончательные результаты и не упоминая вклад предшествующих авторов.

(i) *Коммутатор* $w = [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Отображение $\tilde{w}\colon G^2 \to G$ сюръективно на всех конечных простых группах G [114]. Если G – квазипростая группа, то $\mathrm{wd}_w(G) \leqslant 2$, оценка точная и все группы с $\mathrm{wd}_w(G) = 2$ перечислены в [115]. Детальный обзор этой проблемы, остававшейся открытой несколько десятилетий, содержится в докладе [125].

(ii) *Слова, не являющиеся сюръективными на бесконечно многих конечных простых группах.* Семейство слов с таким свойством построили С. Ямбор, М. Либек и Е. О'Брайен [73], простейшее из них – слово $w = x^2[x^{-2}, y^{-1}]^2$, которое не является сюръективным на группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ для бесконечно многих p.

(iii) *Степенные слова* $w = x^n$. По очевидным причинам здесь нельзя ожидать общих теорем о сюръективности, так как образ отображения $\tilde{w}$ схлопывается в единицу для всех групп порядка, являющегося делителем n. Основная проблема состоит в вычислении $\mathrm{wd}_w(G)$. Почти все результаты в этом направлении перекрыты работой Р. Гуральника, М. Либека, Е. О'Брайена, А. Шалева и Ф. Х. Тьепа [70]. Процитируем некоторые из их фундаментальных результатов.

1) Пусть $N = p^a q^b$, где p, q – простые числа, a, b – неотрицательные целые числа. Тогда вербальное отображение, индуцированное словом $w(x, y) = x^N y^N$, сюръективно на всех конечных простых группах.
2) Пусть N – нечетное положительное целое число. Тогда вербальное отображение, индуцированное словом $w(x, y, z) = x^N y^N z^N$, сюръективно на всех конечных квазипростых группах.
3) Пусть $N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_1 < \cdots < p_k,\ \alpha_i > 0)$ – примарное разложение числа N, положим

$$\pi(N) := k, \qquad \Omega(N) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

Предположим, что N пробегает множество $S \subset \mathbb{N}$ такое, что либо (a) $\Omega(N)$, либо (b) $\pi(N)$ ограничены некоторой константой C. Тогда для любого $N \in S$ вербальное отображение, индуцированное словом $w = x^N y^N$, сюръективно на всех достаточно больших конечных простых группах G. Здесь в случае (a) это означает, что для некоторой функции f степень n (соответственно лиев ранг) группы G должна быть больше, чем $f(C)$, если G есть A_n (соответственно группа типа Ли). В случае (b) также и размер поля $\mathbb{F}_q$ должен быть больше, чем $f(C)$, если G – группа типа Ли над полем $\mathbb{F}_q$.

На очереди некоторые комментарии. Во-первых, отметим, что утверждения 1) и 2) можно рассматривать соответственно как аналоги теорем Бернсайда и Фейта–Томпсона. Во-вторых, и 1), и 2) выполняются для *всех* конечных простых групп. Это напоминает утверждение (i) настоящего замечания и контрастирует с теоремой 5.1, (ii), и другими предшествующими результатами этого типа, справедливыми только для достаточно больших групп. Наконец, в [70] показано, что все эти результаты неулучшаемы. Во-первых, заметим, что утверждение 1) нельзя обобщить на случай, когда N – произведение трех степеней простых чисел: достаточно рассмотреть случай $N = 60$, $G = A_5$. Во-вторых, утверждение 1) нельзя распространить на все *квазипростые* группы G даже в более слабой форме: не всегда верно, что любой нецентральный элемент группы G лежит в образе слова $x^N y^N$. Явный пример получается для элементов порядка 5 в группе $\mathrm{SL}_2(5)$, ни один из которых не лежит в образе слова $x^{20}y^{20}$.

Далее, неверно, что для любого нечетного N вербальное отображение, индуцированное словом $w = x^N y^N$, сюръективно на всех неабелевых простых группах G (контрпримеры можно найти среди групп $\mathrm{SL}_2(q)$ и ${}^2\mathrm{G}_2(q)$).

Наконец, в [70] используется тот факт, что есть бесконечно много простых чисел p таких, что $\Omega(p^2-1) \leqslant 21$. Тогда для $N := p(p^2-1)$ имеем

$$\pi(N) \leqslant \Omega(N) \leqslant 22,$$

но $w = x^N y^N$ – тождество в $\mathrm{PSL}_2(p)$. Тем самым утверждение 3) не выполняется для конечных простых групп типа Ли ограниченного ранга.

Что касается доказательств, они в основном имеют теоретико-групповую природу. Возможно, наиболее технически сложный момент состоит в построении некоторых элементов, порядок которых есть степень двойки и которые являются регулярными (или близкими к таковым), в духе похожих рассуждений в работе [72] для элементов, порядок которых есть степень p.

Замечание 5.6. В работе [110] М. Ларсен и Ф. Х. Тьеп уточнили результаты статьи [107]. Они доказали, что для заданных нетривиальных слов w_1, w_2 и для всех достаточно больших конечных неабелевых простых групп G можно найти "тонкие" подмножества $C_i \subseteq \operatorname{Im}\tilde{w}_i$ $(i = 1, 2)$ такие, что $C_1C_2 = G$; более явно, можно обеспечить выбор C_i размера $O\bigl(\sqrt{|G|\log|G|}\bigr)$.

Замечание 5.7. Необходимо упомянуть другой подход к измерению образа вербального отображения, восходящий к статье М. Ларсена [101]. Он состоит в получении нижних оценок на размер образа вида $|\operatorname{Im}\tilde{w}| > c|G|$. См., например, вариации на эту тему в работах [103], [137], [50].

5.2. Расщепимые группы над бесконечными полями. Следующий результат получен в статье [82].

Теорема 5.8 [82]. *Пусть $\mathscr{G}$ – простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, и пусть $G = \mathscr{G}(K)$. Тогда*:

(i) *для любых четырех нетривиальных слов $w_1 \in F_k$, $w_2 \in F_l$, $w_3 \in F_m$, $w_4 \in F_n$ и любого бесконечного поля K отображение*

$$\tilde{w}\colon G^{k+l+m+n} \to G \setminus Z(G),$$

где $w = w_1w_2w_3w_4$, сюръективно;

(ii) *если* $\mathscr{G} = \mathrm{SL}_n$, $n > 2$, *то для любых трех нетривиальных слов* $w_1 \in F_k$, $w_2 \in F_l$, $w_3 \in F_m$ *и любого бесконечного поля* K *отображение*

$$\tilde{w}\colon G^{k+l+m} \to G \setminus Z(G),$$

где $w = w_1 w_2 w_3$, *сюръективно*;

(iii) *если поле* K *содержит поле вещественных чисел* $\mathbb{R}$ *или поле* p*-адических чисел* $\mathbb{Q}_p$, *то для любых двух нетривиальных слов* $w_1 \in F_k$, $w_2 \in F_l$ *отображение*

$$\tilde{w}\colon G^{k+l} \to G \setminus Z(G),$$

где $w = w_1 w_2$, *сюръективно.*

Приведем набросок доказательства, следуя работе [82].

Прежде всего отметим, что группа $\mathscr{G}(K)$ плотна в $\mathscr{G}$ [19; 18.3]. Поэтому $\operatorname{Im} w_i$ содержит бесконечно много регулярных полупростых классов сопряженности, так как регулярные полупростые элементы образуют открытое подмножество в $\mathscr{G}$ (см. [158]), а отображение $\tilde{w}_i$ доминантно. Если нам удастся найти *расщепимые* регулярные полупростые элементы $s_1 \in M_1$, $s_2 \in M_2$ для некоторых множеств $M_1, M_2 \subset G$, инвариантных относительно сопряжения, то их классы сопряженности C_i в группе G также будут содержаться в M_i. Тем самым $M_1 M_2 \supset G \setminus Z(G)$, поскольку $C_1 C_2 \supset G \setminus Z(G)$ (см. [47]).

Доказательство утверждения (i). Пусть $\Gamma = \prod_i \Gamma_i$ – полупростая группа, где каждая компонента Γ_i – типа A_{r_i} для некоторого r_i. Пусть Δ – максимальный тор в Γ. Предположим, что Γ определена и расщепима над K. Пусть $\tilde{w}\colon \Gamma^d \to \Gamma$ – нетривиальное вербальное отображение. Так как оно доминантно по теореме Бореля [18] и множество регулярных полупростых элементов открыто в Γ [158; III.1.11], [160; следствие 5.4], заключаем, что множество $\tilde{w}(\Gamma^d)$ содержит открытое подмножество, состоящее из регулярных полупростых элементов. Множество $\Gamma(K)$ плотно в Γ [19], поэтому найдется регулярный полупростой элемент $s \in \tilde{\omega}(\Gamma(K)^d)$. Каждый регулярный полупростой класс сопряженности группы $\Gamma(K)$ пересекает множества $U\dot{w}_{\mathrm{c}}$ и $\dot{w}_{\mathrm{c}}^{-1}U$, где $U = (R_u(B))(K)$ – группа рациональных точек унипотентного радикала подгруппы Бореля, соответствующей тору Δ, а $w_{\mathrm{c}} = \prod_i w_{\mathrm{c}i}$ – произведение элементов Кокстера компонент Γ_i (напомним, что $\dot{w}_{\mathrm{c}}$ обозначает прообраз w_{c} в нормализаторе фиксированного максимального тора, см. доказательство теоремы 2.2, (ii)). На самом деле это следует из существования канонической рациональной формы в группах $\mathrm{SL}_{r_i+1}(K)$; см. также [162; разд. 3.8, теорема 4(b)] и [48]. Таким образом, если $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ – вербальные отображения на Γ^{d_i}, то для любого $t \in \Delta(K)$ произведение $\operatorname{Im} \tilde{w}_1 \operatorname{Im} \tilde{w}_2$ содержит элемент вида

$$\underbrace{u_1 \dot{w}_{\mathrm{c}}}_{\in \operatorname{Im} \tilde{w}_1} \underbrace{(t \dot{w}_{\mathrm{c}}^{-1} u_2 t^{-1})}_{\in \operatorname{Im} \tilde{w}_2} = u_1 \underbrace{[\dot{w}_{\mathrm{c}}, t]}_{:= t^* \in \Delta(K)} \underbrace{(t u_2 t^{-1})}_{:= u_2' \in U} = u_1 t^* u_2' = u_1 (t^* \underbrace{u_2' u_1}_{:= u \in U}) u_1^{-1}.$$

Следовательно, для любого $t \in \Delta(K)$ множество $\operatorname{Im}\tilde{w}_1 \operatorname{Im}\tilde{w}_2$ содержит элемент вида t^*u, где $t^* = [\dot{w}_c, t]$ и $u \in U$. Так как отображение $[\dot{w}_c, x]\colon \Delta \to \Delta$ сюръективно, то множество $[\dot{w}_c, \Delta(K)]$ плотно в Δ. Далее, такая подгруппа $\Gamma \leqslant \mathscr{G}$ существует для $\Delta = \mathscr{T}$ (см. [18]). Обозначим через $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ ограничения отображений $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ на подгруппы Γ^k, Γ^l, тогда $\operatorname{Im}\tilde{w}_1 \operatorname{Im}\tilde{w}_2$ содержит элементы вида t^*u, где t^* пробегает плотное подмножество в $\mathscr{T}$. В частности, можно найти регулярный в $\mathscr{G}$ полупростой элемент t^*. Тогда t^*u сопряжен с t^* и нужный элемент в $\operatorname{Im}\tilde{w}_1 \operatorname{Im}\tilde{w}_2$ найден. Такие же аргументы дают расщепимый регулярный полупростой элемент в $\operatorname{Im}\tilde{w}_3 \operatorname{Im}\tilde{w}_4$. Как было сказано выше, произведение классов сопряженности этих элементов содержит все нецентральные элементы группы G, откуда и следует утверждение (i).

Доказательство утверждения (ii). Как доказал А. Лев [111], произведение $C_1C_2C_3$ любых трех регулярных классов сопряженности в $G = \mathrm{SL}_n(K)$, $n \geqslant 3$, содержит $G \backslash Z(G)$. Из этого следует утверждение (ii), поскольку каждый из образов $\operatorname{Im} w_i$ содержит регулярный класс сопряженности. Утверждение (ii) доказано.

Замечание 5.9. Утверждение (ii) можно усилить, сняв ограничительное предположение $n > 2$. Для этого теорему Лева нужно заменить леммой 6.1 из работы [168], которая гарантирует, что произведение $S_1S_2S_3$ любых трех классов *подобия* в $G = \mathrm{SL}_n(K)$, $n \geqslant 2$, содержит $G \setminus Z(G)$. (По определению две матрицы из $\mathrm{SL}_n(K)$ подобны, если они сопряжены в $\mathrm{GL}_n(K)$. Образ вербального отображения инвариантен относительно любого автоморфизма, не только внутреннего, откуда и следует нужное утверждение.)

Замечание 5.10. Было бы интересно распространить теорему Лева на произведения классов подобия (как в предыдущем замечании) в произвольной группе Шевалле. Это позволило бы в утверждении (i) использовать три вербальных отображения вместо четырех.

Мы можем немного обобщить утверждение (iii). А именно, имеем

(iii′) *Пусть K – квадратично скудное поле характеристики* 0. *Тогда для любых двух нетривиальных слов $w_1 \in F_k$, $w_2 \in F_l$ отображение*

$$\tilde{w}\colon G^{k+l} \to G \setminus Z(G),$$

где $w = w_1w_2$, сюръективно.

Доказательство утверждения (iii′). Надо доказать, что и $\operatorname{Im} w_1$, и $\operatorname{Im} w_2$ содержат расщепимые регулярные полупростые элементы группы G. Соответствующее $\mathrm{SL}_2(K)$-вложение позволяет свести проблему к следующей: доказать наличие бесконечно многих расщепимых полупростых элементов в каждом из множеств $\tilde{w}_1(\mathrm{SL}_2(K))$ и $\tilde{w}_2(\mathrm{SL}_2(K))$ (см. предыдущий раздел). А это в точности утверждение теоремы 4.3.

6. Полиномиальные отображения на матричных алгебрах

Рассматривая уравнения вида (1.2), можно задать вопросы, похожие на те, что были заданы выше для уравнения (1.1).

Сначала рассмотрим случай, когда решения ищутся в матричной алгебре $\mathscr{A} = \mathrm{M}(n,k)$. Здесь наиболее общие результаты получили А. Канель-Белов, С. Малев и Л. Роуэн [88]–[91], [123] (см. также [157]). Мы не собираемся давать детальный обзор, отсылая читателя к вышеупомянутым статьям и к обзору [87]. Заметим лишь, что для того чтобы задавать осмысленные вопросы, следует предположить, что многочлен P не обращается тождественно в нуль на алгебре $\mathscr{A}$ и, более того, что он не является центральным (т. е. не все его значения являются скалярными матрицами).

При этом предположении возникают две существенно различные ситуации: либо образ P содержит хотя бы одну матрицу с ненулевым следом, либо он целиком состоит из матриц с нулевым следом. Второй случай имеет место, скажем, когда P – лиев многочлен (где скобка Ли задается аддитивным коммутатором $[X,Y] = XY - YX$), и тогда все вопросы о полиномиальном отображении

$$P\colon\ \mathrm{M}(n,k)^d \to \mathrm{M}(n,k) \tag{6.1}$$

можно модифицировать, переформулировав их на языке алгебр Ли. А именно, для такого P и произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно рассмотреть индуцированное отображение

$$P\colon \mathfrak{g}^d \to \mathfrak{g}. \tag{6.2}$$

Как и в предыдущих разделах, разумно ограничиться рассмотрением *простых* алгебр Ли.

Приведем краткий список основных результатов об образе отображений (6.1) и (6.2). Мы всюду предполагаем, что P не является центральным. В случае алгебр Ли предполагаем, что $\mathfrak{g}$ проста и конечномерна. Поле определения k – либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$.

Замечание 6.1. (i) Независимо от рассматриваемой топологии (Зариского, комплексной, вещественной), есть многочлены P такие, что образ отображения (6.1) не является плотным [88], [123].

(ii) Есть лиевские многочлены P такие, что образ отображения (6.2) не является сюръективным [8].

(iii) Для любого лиевского многочлена P, который не является тождественно равным нулю на $\mathfrak{sl}(2,k)$, и для любой расщепимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отображение (6.2) доминантно в топологии Зариского ("слабая инфинитезимальная теорема Бореля") [8].

Для *полилинейных* многочленов (ассоциативных или лиевских) не известно ни одного примера такого, как в замечании 6.1, (i), (ii). Более оптимистическая гипотеза, приписываемая Капланскому и Львову, утверждает, что в этом случае образ может совпадать либо с $\mathfrak{sl}(n,k)$, либо с $\mathrm{M}(n,k)$; ряд результатов в этом направлении получен в работах [88]–[91], [123], [157], [27], [43]. Можно сформулировать аналог гипотезы Капланского–Львова для других классических алгебр Ли (см. работу [4], в которой получены некоторые частные результаты). Случай полилинейных йордановых многочленов на йордановых алгебрах рассматривался в работах [65], [121].

Было бы интересно выяснить, имеется ли разница в поведении вышеупомянутых отображений в вещественном и комплексном случаях, а также относительно различных топологий. Эта проблема до сих пор не получила должного внимания. Приведем лишь несколько конкретных вопросов.

Вопрос 6.2. (i) Существует ли многочлен P такой, что отображение (6.1) сюръективно для $k = \mathbb{R}$, но не для $k = \mathbb{C}$?

(ii) Существует ли многочлен P такой, что образ отображения

$$P\colon \mathrm{M}(n,\mathbb{C})^d \to \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$$

плотен в топологии Зариского, но не в евклидовой комплексной топологии?

Заметим, что если в части (ii) этого вопроса заменить комплексные числа на вещественные, то многочлен $P(X) = X^2$ дает пример отображения, образ которого плотен в топологии Зариского, но не в евклидовой топологии (см. пример 1.1 и работу [123]).

В случае алгебр Ли интересно выяснить, имеются ли аналоги феномена Тома, хотя бы в некотором слабом смысле.

Вопрос 6.3. Существуют ли лиевский многочлен P и компактная простая вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ такие, что образ отображения (6.2) не является плотным в евклидовой топологии?

Наконец, по аналогии с проблемами типа Варинга для вербальных отображений на группах, можно задавать подобные вопросы для полиномиальных отображений на алгебрах Ли. Даже простейший случай коммутаторного отображения не является тривиальным.

Для элемента z алгебры Ли L назовем его *скобочной длиной* наименьшее число ℓ, обладающее следующим свойством: z представим в виде

$$z = [x_1, y_1] + \cdots + [x_\ell, y_\ell], \quad \text{где } x_i, y_i \in L.$$

Назовем *скобочной шириной* алгебры L супремум скобочных длин ее элементов.

Пусть L – *простая* алгебра Ли над полем k (или кольцом R).

Вопрос 6.4. (i) Может ли скобочная ширина алгебры L быть бесконечной?

(ii) Может ли она быть больше 1?

Отрицательный ответ на вопрос 6.4, (i), получен в работе Дж. Бергмана и Н. Нахлуса [12] для любой конечномерной простой алгебры Ли L, определенной над произвольным бесконечным полем характеристики, отличной от 2 и 3: скобочная ширина не превосходит 2 (доказательство основано на теореме Ж.-М. Буа [17] о порождаемости двумя элементами). (Над полем $\mathbb{R}$ простое доказательство было получено в работе [80]; случай произвольных классических алгебр Ли рассмотрен в статье [58].)

Отрицательный ответ на вопрос 6.4, (ii), известен в следующих случаях:

(i) L – конечномерная простая расщепимая алгебра Ли над любым достаточно большим полем (Г. Браун [25]; Р. Хиршбюль [77] улучшил оценки на размер поля определения);

(ii) L – простая вещественная компактная алгебра Ли (К.-Х. Нееб [80; приложение 3], Д. Ж. Джокович и Т.-Я. Там [39; теорема 3.4], Д. Ахиезер [2], А. Д'Андреа и А. Маффеи [37], Дж. Малкоун и Н. Нахлус [124]; в работе [2] рассмотрены также некоторые некомпактные алгебры; см. также дискуссию в math.stackexchange.com/questions/769881).

В свете этих результатов естественно задать следующий вопрос.

Вопрос 6.5. Какова скобочная ширина алгебр Ли картановского типа (конечномерных над полем положительной характеристики и бесконечномерных над полями характеристики 0)?

Есть и другие богатые источники простых бесконечномерных алгебр Ли, например алгебры Ли векторных полей на гладких аффинных многообразиях. Такие алгебры обсуждались в работе [13]. Принципиальная проблема состоит в том, есть ли среди них алгебры скобочной ширины больше единицы.

7. Разное

В заключение мы хотим привести несколько замечаний и вопросов, связанных с темой данной статьи. В большинстве случаев они относятся к почти не исследованным ситуациям.

7.1. Вербальные отображения в контексте Каца–Муди. В случае, когда рассматриваемая простая алгебраическая группа $\mathscr{G}$ определена над полем формальных рядов Лорана с комплексными коэффициентами, естественно появляются аффинные группы Каца–Муди. В статье [95] содержится обзор различных постановок для подобного рода проблем, как для вербальных отображений на группах Каца–Муди, так и для полиномиальных отображений на алгебрах Каца–Муди.

7.2. Системы уравнений. Переход от отображений вида (2.1), (6.1), (6.2) к более общим отображениям

$$G^d \to G^k, \qquad \mathscr{A}^d \to \mathscr{A}^k, \qquad \mathfrak{g}^d \to \mathfrak{g}^k$$

(другими словами, от уравнений к системам уравнений) выглядит весьма проблематичным. Некоторые частные случаи рассмотрены в работах [63], [24]. Недавно многообещающий общий подход был предложен в статье [22].

7.3. Проблемы равнораспределения. Можно задаться вопросом, как множество решений уравнения (1.1) или (1.2) зависит от правой части. Иными словами, можно изучать поведение слоев отображений (2.1), (6.1), (6.2). Авторам неизвестны никакие общие результаты в этом направлении, что контрастирует со случаем конечных групп, где имеется целый ряд теорем о равнораспределении (см., например, [3], [9], [21], [52], [97], [102], [104], [105], [118],

[134], [140], [143]); в работе [106] М. Ларсен и А. Шалев рассматривают проблемы равнораспределения для проконечных и резидуально конечных групп. При этом естественно проявляются вероятностные аспекты теории. Мы не будем обсуждать здесь эту обширную область исследований. Заинтересованному читателю предлагается ознакомиться с обзором [155]. См. также работу [109], где изучаются вероятностные аналоги проблем типа Варинга для конечных простых групп.

7.4. Функционально-аналитические аналоги. Стремясь расширить границы в духе замечаний 3.7 и 3.10, можно попытаться исследовать полиномиальные отображения на некоторых операторных алгебрах, в частности на тех, для которых известно хорошее поведение аддитивного коммутатора (скажем, на тех, где он индуцирует сюръективное отображение); см., например, работы [44], [136], [86], [85].

7.5. Вербальный образ и антиавтоморфизмы. Начнем с некоторых общих (и почти очевидных) замечаний относительно $\mathrm{Aut}(F_d)$- и $\mathrm{Aut}(G)$-инвариантности образа вербального отображения $w\colon G^d \to G$ на абстрактной группе G.

Во-первых, $\mathrm{Im}\,\tilde{w}$ очевидным образом является $\mathrm{Aut}(G)$-инвариантным подмножеством в группе G.

Во-вторых, если $w_1, w_2 \in F_d$ лежат в одной $\mathrm{Aut}(F_d)$-орбите, то отображения $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\colon G^n \to G$ имеют один и тот же образ.

В самом деле, любой гомоморфизм групп $\varphi\colon F_d \to G$ однозначно определен набором

$$(g_1 = \varphi(x_1), \dots, g_d = \varphi(x_d)).$$

Поскольку для любого слова $w \in F_d$ имеем $\varphi(w) = \tilde{w}(g_1, \dots, g_d)$, образ отображения $\tilde{w}$ совпадает с множеством $\{\varphi(w)\}_{\varphi \in \mathrm{Hom}(F_d, G)}$, откуда и следует утверждение.

Ситуация становится куда менее очевидной при рассмотрении антиавтоморфизмов вместо автоморфизмов. Есть несколько путей формализации возможных различий между образами соответствующих вербальных отображений. Приведем два возможных подхода.

Определение 7.1. Пусть γ – антиавтоморфизм группы F_d. Пусть $w \in F_d$. Обозначим $w^\gamma = \gamma(w)$ и для любой группы G определим отображение подстановки $\tilde{w}^\gamma\colon G^d \to G$, как и выше. Будем говорить, что слово w является *γ-хиральным*, если найдется группа G такая, что образы отображений $\tilde{w}$ и $\tilde{w}^\gamma$ различны.

Определение 7.2. Пусть G – группа. Пусть γ – антиавтоморфизм группы G. Для любого слова $w \in F_d$ определим отображение $\tilde{w}_\gamma\colon G^d \to G$ формулой

$$\tilde{w}_\gamma(g_1, \dots, g_d) = \gamma(w(g_1, \dots, g_d)).$$

Будем говорить, что группа G является *γ-хиральной*, если найдется слово w такое, что образы отображений $\tilde{w}$ и $\tilde{w}_\gamma$ различны.

В обоих случаях будем говорить, что пара (w, G) является γ-хиральной (в противном случае назовем ее γ-*ахиральной*). Будем опускать γ в приставках и индексах, если антиавтоморфизм фиксирован и недоразумений не возникает.

Возможно, простейший нетривиальный случай, когда наблюдается феномен хиральности, возникает при действии γ на любой группе G (включая группу F_d) обращением всех ее элементов: $\gamma(g) = g^{-1}$. В этом случае для любой группы G и любого слова w имеем $w^\gamma = w_\gamma$.

Предложение 7.3 [35]. *Если γ действует как инверсия, то существуют γ-хиральные пары (w, G).*

Замечание 7.4. Самый простой способ доказать предложение 7.3, продемонстрированный в работе [35], сочетает использование теоремы Лубоцкого [119] (см. теорему 5.1, (i)) со следующим фактом: есть конечные простые группы, не имеющие внешних автоморфизмов и содержащие элемент g, не сопряженный обратному. В результате получаем пару (w, G), которая является хиральной, поскольку образ отображения $\tilde{w}$, совпадающий с классом сопряженности такого элемента g, не может содержать элемент g^{-1}, который лежит в образе отображения $\tilde{w}_\gamma$.

Однако не так легко явно указать пример хиральной пары. Скажем, для группы Матье $G = M_{11}$ и элемента $g \in G$ порядка 11 можно ожидать слово w длины около $1.7 \cdot 10^{244552995}$ (см. [127]).

Отметим другой подход к формализации феноменов асимметрии такого типа, в духе вышеупомянутой дискуссии в [127]. Для любого вербального отображения $\tilde{w}\colon G^d \to G$ и любого элемента $a \in G$ обозначим через

$$\tilde{w}_a = \{(g_1, \dots, g_n) \mid w(g_1, \dots, g_d) = a\}$$

слой отображения $\tilde{w}$ в точке a. Ограничимся рассмотрением антиавтоморфизмов конечных групп.

Определение 7.5. Пусть G – конечная группа, на которой действует антиавтоморфизм γ. Будем говорить, что G *слабо γ-хиральная*, если найдутся элемент $g \in G$ и слово $w \in F_d$ такие, что размеры слоев $\tilde{w}_g$ и $(\tilde{w}_\gamma)_g$ не совпадают. В таком случае будем говорить, что (w, G) – слабо γ-хиральная пара.

Ясно, что всякая γ-хиральная конечная группа является слабо γ-хиральной. Оказывается, что для того, чтобы обнаружить слабую хиральность, можно использовать гораздо более короткие слова, которые можно явно предъявить.

Пример 7.6 (Н. Элкис, см. [127]). Для элемента $a \in G = M_{11}$ порядка 11 и слова $w = x^4y^2xy^3$ слои $\tilde{w}_a$ и $\tilde{w}_{a^{-1}}$ имеют размеры соответственно 7491 и 7458. Тем самым (w, G) – слабо γ-хиральная пара, где γ обозначает инверсию.

Вопрос 7.7. Существует ли конечная группа G с действием антиавтоморфизма γ, которая является слабо γ-хиральной, но γ-ахиральной?

Замечание 7.8. Близкая по духу задача рассматривалась в статье Р. Гуральника и П. Шумяцкого [71]. Их интересовали слова w, для которых уравнения

$$w(x_1, \dots, x_d) = g \quad \text{и} \quad w(x_1, \dots, x_d) = g^e$$

являются эквивалентными для всех показателей e (или же для всех e, взаимно простых с порядком группы G) в смысле наличия решения или количества решений. Не так много известно об инвариантности $\operatorname{Im}\tilde{w}$ относительно других операций на группах F_d и G. Было бы интересно разбить множество слов на классы эквивалентности по отношению к некоторым свойствам инвариантности $\operatorname{Im}\tilde{w}$ для заданной группы G.

7.6. Вербальные отображения с константами. Обсудим еще одно возможное обобщение проблем, рассмотренных в данной статье. Оно представляется одним из наиболее естественных. Пусть F_d $(d \geqslant 1)$ – свободная группа на образующих $x_1, \dots, x_d$ и G – абстрактная группа. Обозначим через $G * F_d$ их свободное произведение. Тогда каждому элементу $w_\Sigma \in G*F_d$ можно поставить в соответствие вербальное отображение с константами

$$\tilde{w}_\Sigma \colon G^d \to G, \tag{7.1}$$

определенное подстановкой, в точности как для обычных вербальных отображений. Для получающихся уравнений с константами вида

$$w_1(x_1, \dots, x_d)\sigma_1 \cdots w_r(x_1, \dots, x_d)\sigma_r w_{r+1}(x_1, \dots, x_d) = g$$

можно задавать такие же вопросы, как и для вербальных отображений без констант. В частности, можно поинтересоваться сюръективностью или доминантностью отображения (7.1), размером и структурой его образа и т. п. Эта тематика почти не рассматривалась и, по нашему мнению, несомненно заслуживает глубокого исследования. Будучи интересна сама по себе, скажем, в свете естественных связей с классическими теоретико-групповыми проблемами, такими как гипотеза Томпсона и вычисление чисел покрытия (см., например, [55]), информация о свойствах уравнений с константами может оказаться полезной для исследования обычных вербальных уравнений; соответствующие примеры имеются в работах [60], [61], [96]. Мы лишь процитируем некоторые результаты из этих работ, ограничиваясь уравнениями *в* группах, но не *над* группами.

Следуя работе [96], обозначим через $\varepsilon \colon G * F_d \to F_d$ отображение аугментации, переводящее все элементы G в 1. Если $\varepsilon(w_\Sigma) = 1$, будем говорить, что слово w_Σ особое. В этих обозначениях имеем следующие факты.

(i) Если $G = \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $d = 1$ и слово с константами w_Σ неособое, то отображение $\tilde{w}_\Sigma \colon G \to G$ сюръективно [54].

(ii) Если p – простое число, $G = \mathrm{SU}_p(\mathbb{C})$, $d = 2$ и $\varepsilon(w_\Sigma)$ не лежит в

$$[F_2, F_2]^p[F_2, [F_2, F_2]]$$

(второй член экспоненциально-p-центрального ряда), то отображение

$$\tilde{w}_\Sigma \colon G \to G$$

сюръективно.

(iii) Если G – группа рациональных точек простой линейной алгебраической группы, определенной над алгебраически замкнутым полем, а

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 \cdots w_r\sigma_r w_{r+1}$$

– неособое слово с $w_2, \dots, w_{r+1} \neq 1$ и “общими” коэффициентами $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, то отображение $\tilde{w}_\Sigma\colon G \to G$ доминантно [61] (в этой статье можно найти точное определение общего набора коэффициентов).

Заметим, что эти утверждения доказываются с помощью совершенно различных методов: утверждение (i) целиком основано на гомотопическом подходе (теорема Хопфа о степени), утверждение (ii) требует гораздо более продвинутой техники из гомологической алгебры, а утверждение (iii) доказывается с помощью алгебро-геометрических аргументов.

Насколько далеко можно надеяться дойти, пытаясь обобщить эти теоремы о сюръективности и доминантности? Есть несколько очевидных препятствий: скажем, есть простые алгебраические группы и слова с константами такие, что образ отображения (7.1) схлопывается в 1 (так называемые групповые тождества с константами, см., например, [56]). Слово

$$w_\Sigma(x) = \sigma^{-1}x\sigma$$

дает пример отображения (7.1), образ которого состоит из одного класса сопряженности в группе G. На текущий момент наиболее оптимистический подход состоит в параметризации образа отображения (7.1) с использованием фактоотображения $\pi\colon G \to T/W$, где T – максимальный тор в группе G, а W – группа Вейля (см. [158]). А именно, можно показать (см. [62]), что если композиция отображений $\pi \circ \tilde{w}_\Sigma\colon G^d \to T/W$ доминантна, то доминантно и отображение с константами $\tilde{w}'_\Sigma\colon G^{d+1} \to G$, соответствующее слову с константами $\tilde{w}'_\Sigma\colon G^{d+1} \to G$. Тем самым в таком случае можно сказать, что отображение $\tilde{w}_\Sigma$ "доминантно с точностью до сопряжения" или, иными словами, почти все классы сопряженности группы G (за исключением некоторого замкнутого подмножества G) пересекаются с $\operatorname{Im}\tilde{w}$. Так что дихотомия, возникающая при положительном ответе на следующий вопрос (см. [62]), – это лучшее, на что можно надеяться.

Вопрос 7.9. Верно ли, что множество

$$\operatorname{Im}(\pi \circ \tilde{w}(x_1, \ldots, x_d, \sigma_1, \ldots, \sigma_r))$$

либо состоит из одной точки для любого набора констант

$$\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in G^r,$$

либо плотно в T/W для любого

$$\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in U,$$

пробегающего некоторое непустое открытое множество $U \subset G^r$?

Авторы благодарны Т. Бандман, Ж. Бланку, С. Г. Малеву, Л. В. Полтеровичу, А. С. Рапинчуку и Е. И. Шустину за полезные обсуждения и переписку по различным аспектам данной статьи.

Список литературы

[1] M. Aka, E. Breuillard, L. Rosenzweig, N. de Saxcé, "Diophantine properties of nilpotent Lie groups", *Compos. Math.*, **151**:6 (2015), 1157–1188.

[2] D. Akhiezer, "On the commutator map for real semisimple Lie algebras", *Mosc. Math. J.*, **15**:4 (2015), 609–613.

[3] A. Amit, U. Vishne, "Characters and solutions to equations in finite groups", *J. Algebra Appl.*, **10**:4 (2011), 675–686.

[4] B. E. Anzis, Z. M. Emrich, K. G. Valiveti, "On the images of Lie polynomials evaluated on Lie algebras", *Linear Algebra Appl.*, **469** (2015), 51–75.

[5] N. Avni, T. Gelander, M. Kassabov, A. Shalev, "Word values in p-adic and adelic groups", *Bull. Lond. Math. Soc.*, **45**:6 (2013), 1323–1330.

[6] T. Bandman, S. Garion, F. Grunewald, "On the surjectivity of Engel words on $\mathrm{PSL}(2,q)$", *Groups Geom. Dyn.*, **6**:3 (2012), 409–439.

[7] T. Bandman, S. Garion, B. Kunyavskiĭ, "Equations in simple matrix groups: algebra, geometry, arithmetic, dynamics", *Cent. Eur. J. Math.*, **12**:2 (2014), 175–211.

[8] T. Bandman, N. Gordeev, B. Kunyavskiĭ, E. Plotkin, "Equations in simple Lie algebras", *J. Algebra*, **355** (2012), 67–79.

[9] T. Bandman, B. Kunyavskiĭ, "Criteria for equidistribution of solutions of word equations on $\mathrm{SL}(2)$", *J. Algebra*, **382** (2013), 282–302.

[10] T. Bandman, Yu. G. Zarhin, "Surjectivity of certain word maps on $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$", *Eur. J. Math.*, **2**:3 (2016), 614–643.

[11] J. Barge, E. Ghys, "Cocycles d'Euler et de Maslov", *Math. Ann.*, **294**:2 (1992), 235–265.

[12] G. M. Bergman, N. Nahlus, "Homomorphisms on infinite direct product algebras, especially Lie algebras", *J. Algebra*, **333** (2011), 67–104.

[13] Y. Billig, V. Futorny, "Lie algebras of vector fields on smooth affine varieties", *Comm. Algebra*, **46**:8 (2018), 3413–3429.

[14] J. Blanc, "Groupes de Cremona, connexité et simplicité", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4), **43**:2 (2010), 357–364.

[15] J. Blanc, J.-P. Furter, "Topologies and structures of the Cremona groups", *Ann. of Math.* (2), **178**:3 (2013), 1173–1198.

[16] J. Blanc, S. Zimmermann, "Topological simplicity of the Cremona groups", *Amer. J. Math.*, **140**:5 (2018) (to appear); arXiv: 1511.08907.

[17] J.-M. Bois, "Generators of simple Lie algebras in arbitrary characteristics", *Math. Z.*, **262**:4 (2009), 715–741.

[18] A. Borel, "On free subgroups of semi-simple groups", *Enseign. Math.* (2), **29**:1-2 (1983), 151–164; *Œuvres: collected papers*, v. IV, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 41–54.

[19] A. Borel, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **126**, Springer-Verlag, New York, 1991, xii+288 pp.; рус. пер. 1-го изд.: А. Борель, *Линейные алгебраические группы*, Мир, М., 1972, 269 с.

[20] A. Borel, "Class functions, conjugacy classes and commutators in semisimple Lie groups", *Algebraic groups and Lie groups*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., **9**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 1–19.

[21] A. Bors, "Fibers of word maps and the multiplicities of non-abelian composition factors", *Internat. J. Algebra Comput.*, **27**:8 (2017), 1121–1148.

[22] Kh. Bou-Rabee, M. Larsen, “Linear groups with Borel's property”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **19**:5 (2017), 1293–1330.

[23] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Гл.* IV–VI. *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Элементы математики, Мир, М., 1972, 334 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4, 5, 6, 2$^{\text{ème}}$ éd., Masson, Paris, 1981, 290 pp.

[24] E. Breuillard, B. Green, R. Guralnick, T. Tao, “Strongly dense free subgroups of semisimple algebraic groups”, *Israel J. Math.*, **192**:1 (2012), 347–379.

[25] G. Brown, “On commutators in a simple Lie algebra”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 763–767.

[26] D. Burago, S. Ivanov, L. Polterovich, “Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin”, *Groups of diffeomorphisms*, Adv. Stud. Pure Math., **52**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, 221–250.

[27] D. Buzinski, R. Winstanley, “On multilinear polynomials in four variables evaluated on matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **439**:9 (2013), 2712–2719.

[28] D. Calegari, D. Zhuang, “Stable W-length”, *Topology and geometry in dimension three*, Contemp. Math., **560**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 145–169.

[29] S. Cantat, S. Lamy, “Normal subgroups in the Cremona group”, With an appendix by Y. de Cornulier, *Acta Math.*, **210** (2013), 31–94.

[30] P.-E. Caprace, K. Fujiwara, “Rank-one isometries of buildings and quasi-morphisms of Kac–Moody groups”, *Geom. Funct. Anal.*, **19**:5 (2010), 1296–1319.

[31] P. Chatterjee, “On the surjectivity of the power maps of algebraic groups in characteristic zero”, *Math. Res. Lett.*, **9**:5-6 (2002), 741–756.

[32] P. Chatterjee, “On the surjectivity of the power maps of semisimple algebraic groups”, *Math. Res. Lett.*, **10**:5-6 (2003), 625–633.

[33] P. Chatterjee, “On the power maps, orders and exponentiality of p-adic algebraic groups”, *J. Reine Angew. Math.*, **2009**:629 (2009), 201–220.

[34] P. Chatterjee, “Surjectivity of power maps of real algebraic groups”, *Adv. Math.*, **226**:6 (2011), 4639–4666.

[35] W. Cocke, M.-C. Ho, “On the symmetry of images of word maps in groups”, *Comm. Algebra*, **46**:2 (2018), 756–763.

[36] B. Conrad, “Reductive group schemes”, *Autour des schémas en groupes*, v. I, Panor. Synthèses, **42/43**, Soc. Math. France, Paris, 2014, 93–444.

[37] A. D'Andrea, A. Maffei, “Commutators of small elements in compact semisimple groups and Lie algebras”, *J. Lie Theory*, **26**:3 (2016), 683–690.

[38] D. Ž. Đoković, K. H. Hofmann, “The surjectivity question for the exponential function of real Lie groups: a status report”, *J. Lie Theory*, **7**:2 (1997), 171–199.

[39] D. Ž. Đoković, T.-Y. Tam, “Some questions about semisimple Lie groups originating in matrix theory”, *Canad. Math. Bull.*, **46**:3 (2003), 332–343.

[40] D. Ž. Đoković, N. Q. Thắng, “On the exponential map of almost simple real algebraic groups”, *J. Lie Theory*, **5**:2 (1995), 275–291.

[41] S. K. Donaldson, *Lectures on Lie groups and geometry*, Notes for course given in 2007 and 2011, 2011, 95 pp., http://wwwf.imperial.ac.uk/~skdona/LIEGROUPS2011.PDF.

[42] N. M. Dunfield, W. P. Thurston, “Finite covers of random 3-manifolds”, *Invent. Math.*, **166**:3 (2006), 457–521.

[43] K. J. Dykema, I. Klep, "Instances of the Kaplansky–Lvov multilinear conjecture for polynomials of degree three", *Linear Algebra Appl.*, **508** (2016), 272–288.

[44] K. Dykema, A. Skripka, "On single commutators in II_1-factors", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140**:3 (2012), 931–940.

[45] A. Elkasapy, A. Thom, "About Gotô's method showing surjectivity of word maps", *Indiana Univ. Math. J.*, **63**:5 (2014), 1553–1565.

[46] A. Elkasapy, A. Thom, "On the length of the shortest non-trivial element in the derived and the lower central series", *J. Group Theory*, **18**:5 (2015), 793–804.

[47] E. W. Ellers, N. Gordeev, "On the conjectures of J. Thompson and O. Ore", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:9 (1998), 3657–3671.

[48] E. W. Ellers, N. Gordeev, "Intersection of conjugacy classes with Bruhat cells in Chevalley groups", *Pacific J. Math.*, **214**:2 (2004), 245–261.

[49] E. Fink, A. Thom, "Palindromic words in simple groups", *Internat. J. Algebra Comput.*, **25**:3 (2015), 439–444.

[50] A. Galt, A. Kulshrestha, A. Singh, E. Vdovin, *On Shalev's conjecture for type A_n and ${}^2A_n$*, 2018, 16 pp., arXiv: 1805.04638.

[51] J.-M. Gambaudo, É. Ghys, "Commutators and diffeomorphisms of surfaces", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24**:5 (2004), 1591–1617.

[52] S. Garion, A. Shalev, "Commutator maps, measure preservation, and T-systems", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:9 (2009), 4631–4651.

[53] С. И. Гельфанд, "О числе решений квадратного уравнения", *Глобус* 1, Общематический семинар (НМУ, 2000), МЦНМО, М., 2004, 124–133.

[54] M. Gerstenhaber, O. S. Rothaus, "The solution of sets of equations in groups", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **48**:9 (1962), 1531–1533.

[55] N. L. Gordeev, "Products of conjugacy classes in algebraic groups. I", *J. Algebra*, **173**:3 (1995), 715–744.

[56] N. L. Gordeev, "Freedom in conjugacy classes of simple algebraic groups and identities with constants", *Алгебра и анализ*, **9**:4 (1997), 63–78; *St. Petersburg Math. J.*, **9**:4 (1998), 709–723.

[57] N. L. Gordeev, "Products of conjugacy classes in perfect linear groups. Extended covering number", *Вопросы теории представлений алгебр и групп*. 12, Зап. науч. сем. ПОМИ, **321**, ПОМИ, СПб., 2005, 67–89; *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **136**:3 (2006), 3867–3879.

[58] N. Gordeev, "Sums of orbits of algebraic groups. I", *J. Algebra*, **295**:1 (2006), 62–80.

[59] N. Gordeev, "On Engel words on simple algebraic groups", *J. Algebra*, **425** (2015), 215–244.

[60] Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, "Вербальные отображения и вербальные отображения с константами простых алгебраических групп", *Докл. РАН*, **471**:2 (2016), 136–138; англ. пер.: N. L. Gordeev, B. E. Kunyavskii, E. B. Plotkin, "Word maps and word maps with constants of simple algebraic groups", *Dokl. Math.*, **94**:3 (2016), 632–634.

[61] N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, "Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups", *J. Algebra*, **500** (2018), 390–424.

[62] N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, "Word maps on perfect algebraic groups", *Internat. J. Algebra Comput.* (to appear); 2018, 20 pp., arXiv: 1801.00381.

[63] N. Gordeev, U. Rehmann, "On multicommutators for simple algebraic groups", *J. Algebra*, **245**:1 (2001), 275–296.

[64] N. Gordeev, J. Saxl, “Products of conjugacy classes in Chevalley groups over local rings”, *Алгебра и анализ*, **17**:2 (2005), 96–107; *St. Petersburg Math. J.*, **17**:2 (2006), 285–293.

[65] S. R. Gordon, “Associators in simple algebras”, *Pacific J. Math.*, **51** (1974), 131–141.

[66] М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1981, 336 с.; пер. с англ.: M. Goto, F. D. Grosshans, *Semisimple Lie algebras*, Lecture Notes Pure Appl. Math., **38**, Marcel Dekker, Inc., New York–Basel, 1978, vii+480 pp.

[67] M. Gromov, “Hyperbolic groups”, *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer, New York, 1987, 75–263.

[68] M. Gromov, “Random walk in random groups”, *Geom. Funct. Anal.*, **13**:1 (2003), 73–146.

[69] R. M. Guralnick, W. M. Kantor, “Probabilistic generation of finite simple groups”, *J. Algebra*, **234**:2 (2000), 743–792.

[70] R. M. Guralnick, M. W. Liebeck, E. A. O’Brien, A. Shalev, P. H. Tiep, “Surjective word maps and Burnside’s $p^a q^b$-theorem”, *Invent. Math.*, **213**:2 (2018), 589–695.

[71] R. Guralnick, P. Shumyatsky, “On rational and concise words”, *J. Algebra*, **429** (2015), 213–217.

[72] R. M. Guralnick, P. H. Tiep, “Effective results on the Waring problem for finite simple groups”, *Amer. J. Math.*, **137**:5 (2015), 1401–1430.

[73] S. Jambor, M. W. Liebeck, E. A. O’Brien, “Some word maps that are non-surjective on infinitely many finite simple groups”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **45**:5 (2013), 907–910.

[74] M. Jarden, A. Lubotzky, “Random normal subgroups of free profinite groups”, *J. Group Theory*, **2**:2 (1999), 213–224.

[75] B. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **222**, Springer, Cham, 2015, xiv+449 pp.

[76] А. Хатчер, *Алгебраическая топология*, МЦНМО, М., 2011, 688 с.; пер. с англ.: A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, xii+544 pp.

[77] R. Hirschbühl, “Commutators in classical Lie algebras”, *Linear Algebra Appl.*, **142** (1990), 91–111.

[78] G. P. Hochschild, *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras*, Graduate Texts in Math., **75**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1981, viii+267 pp.

[79] K. H. Hofmann, J. D. Lawson, “Divisible subsemigroups of Lie groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **27**:3 (1983), 427–434.

[80] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The Lie theory of connected pro-Lie groups. A structure theory for pro-Lie algebras, pro-Lie groups, and connected locally compact groups*, EMS Tracts Math., **2**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, xvi+678 pp.

[81] K. H. Hofmann, W. A. F. Ruppert, *Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function*, Mem. Amer. Math. Soc., **130**, № 618, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, viii+174 pp.

[82] C. Y. Hui, M. Larsen, A. Shalev, “The Waring problem for Lie groups and Chevalley groups”, *Israel J. Math.*, **210**:1 (2015), 81–100.

[83] J. E. Humphreys, *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, Math. Surveys Monogr., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, xviii+196 pp.

[84] A. Jaikin-Zapirain, “On the verbal width of finitely generated pro-p groups”, *Rev. Mat. Iberoam.*, **24**:2 (2008), 617–630.

[85] R. Kadison, Z. Liu, A. Thom, *A note on commutators in algebras of unbounded operators*, preprint, https://tu-dresden.de/mn/math/geometrie/thom/forschung/publikationen.

[86] V. Kaftal, P. W. Ng, S. Zhang, "Commutators and linear spans of projections in certain finite C^*-algebras", *J. Funct. Anal.*, **266**:4 (2014), 1883–1912.

[87] A. Kanel-Belov, B. Kunyavskiĭ, E. Plotkin, "Word equations in simple groups and polynomial equations in simple algebras", *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.*1. *Матем. Мех. Астрон.*, 2013, №1, 10–24; *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, **46**:1 (2013), 3–13.

[88] A. Kanel-Belov, S. Malev, L. Rowen, "The images of non-commutative polynomials evaluated on 2×2 matrices", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140**:2 (2012), 465–478.

[89] A. Kanel-Belov, S. Malev, L. Rowen, "The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144**:1 (2016), 7–19.

[90] A. Kanel-Belov, S. Malev, L. Rowen, "Power-central polynomials on matrices", *J. Pure Appl. Algebra*, **220**:6 (2016), 2164–2176.

[91] A. Kanel-Belov, S. Malev, L. Rowen, "The images of Lie polynomials evaluated on matrices", *Comm. Algebra*, **45**:11 (2017), 4801–4808.

[92] I. Kapovich, P. Schupp, "On group-theoretic models of randomness and genericity", *Groups Geom. Dyn.*, **2**:3 (2008), 383–404.

[93] I. Kapovich, P. E. Schupp, "Random quotients of the modular group are rigid and essentially incompressible", *J. Reine Angew. Math.*, **2009**:628 (2009), 91–119.

[94] M. Kassabov, N. Nikolov, "Words with few values in finite simple groups", *Quart. J. Math.*, **64**:4 (2013), 1161–1166.

[95] E. Klimenko, B. Kunyavskiĭ, J. Morita, E. Plotkin, "Word maps in Kac–Moody setting", *Toyama Math. J.*, **37** (2015), 25–54.

[96] A. Klyachko, A. Thom, "New topological methods to solve equations over groups", *Algebr. Geom. Topol.*, **17**:1 (2017), 331–353.

[97] A. Kulshrestha, A. Singh, *Computing n^{th} roots in $SL_2(k)$ and Fibonacci polynomials*, 2017, 31 pp., arXiv: 1710.03432.

[98] B. Kunyavskiĭ, "Local-global invariants of finite and infinite groups: around Burnside from another side", *Expo. Math.*, **31**:3 (2013), 256–273.

[99] B. Kunyavskiĭ, "Equations in matrix groups and algebras over number fields and rings: prolegomena to a lowbrow noncommutative Diophantine geometry", *Arithmetic and geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **420**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015, 264–282.

[100] F. Lalonde, A. Teleman, "The g-areas and the commutator length", *Internat. J. Math.*, **24**:7 (2013), 1350057, 13 pp.

[101] M. Larsen, "Word maps have large image", *Israel J. Math.*, **139** (2004), 149–156.

[102] M. J. Larsen, R. Pink, "Finite subgroups of algebraic groups", *J. Amer. Math. Soc.*, **24**:4 (2011), 1105–1158.

[103] M. Larsen, A. Shalev, "Word maps and Waring type problems", *J. Amer. Math. Soc.*, **22**:2 (2009), 437–466.

[104] M. Larsen, A. Shalev, "Fibers of word maps and some applications", *J. Algebra*, **354**:1 (2012), 36–48.

[105] M. Larsen, A. Shalev, "On the distribution of values of certain word maps", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368**:3 (2016), 1647–1661.

[106] M. Larsen, A. Shalev, "Words, Hausdorff dimension and randomly free groups", *Math. Ann.*, **371**:3-4 (2018), 1409–1427.

[107] M. Larsen, A. Shalev, P. H. Tiep, "The Waring problem for finite simple groups", *Ann. of Math.* (2), **174**:3 (2011), 1885–1950.

[108] M. Larsen, A. Shalev,P. H. Tiep, "Waring problem for finite quasisimple groups", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2013**:10 (2013), 2323–2348.

[109] M. Larsen, A. Shalev, P. H. Tiep, *Probabilistic Waring problems for finite simple groups*, 2018, 44 pp., arXiv: 1808.05116.

[110] M. Larsen, P. H. Tiep, "A refined Waring problem for finite simple groups", *Forum Math. Sigma*, **3** (2015), e6, 22 pp.

[111] A. Lev, "Products of cyclic conjugacy classes in the groups $\mathrm{PSL}(n,F)$", *Linear Algebra Appl.*, **179** (1993), 59–83.

[112] M. Levy, *Word maps with small image in simple groups*, 2012, 5 pp., arXiv: 1206.1206.

[113] M. Levy, "Images of word maps in almost simple groups and quasisimple groups", *Internat. J. Algebra Comput.*, **24**:1 (2014), 47–58.

[114] M. W. Liebeck, E. A. O'Brien, A. Shalev, P. H. Tiep, "The Ore conjecture", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*), **12**:4 (2010), 939–1008.

[115] M. W. Liebeck, E. A. O'Brien, A. Shalev, P. H. Tiep, "Commutators in finite quasisimple groups", *Bull. Lond. Math. Soc.*, **43**:6 (2011), 1079–1092.

[116] Y. Liu, M. M. Wood, *The free group on n generators modulo $n+u$ random relations as n goes to infinity*, 2017, 40 pp., arXiv: 1708.08509.

[117] A. Lonjou, "Non simplicité du groupe de Cremona sur tout corps", *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **66**:5 (2016), 2021–2046.

[118] Z. Lu, *Flatness of the commutator map on special linear groups*, 2018, 32 pp., arXiv: 1807.07300.

[119] A. Lubotzky, "Images of word maps in finite simple groups", *Glasg. Math. J.*, **56**:2 (2014), 465–469.

[120] A. Lubotzky, A. R. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **58**, № 336, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, xi+117 pp.

[121] A. Ma, J. Oliva, "On the images of Jordan polynomials evaluated over symmetric matrices", *Linear Algebra Appl.*, **492** (2016), 13–25.

[122] W. Magnus, "Über den Beweis des Hauptidealsatzes", *J. Reine Angew. Math.*, **1934**:170 (1934), 235–242.

[123] S. Malev, "The images of non-commutative polynomials evaluated on 2×2 matrices over an arbitrary field", *J. Algebra Appl.*, **13**:6 (2014), 1450004, 12 pp.

[124] J. Malkoun, N. Nahlus, "Commutators and Cartan subalgebras in Lie algebras of compact semisimple Lie groups", *J. Lie Theory*, **27**:4 (2017), 1027–1032.

[125] G. Malle, "The proof of Ore's conjecture (after Ellers–Gordeev and Liebeck–O'Brien–Shalev–Tiep)", *Séminaire Bourbaki*, v. 2012/2013, Astérisque, **361**, Soc. Math. France, Paris, 2014, 325–348, Exp. № 1069.

[126] *MathOverflow discussion*: *Birational automorphisms and infinite divisibility*, MathOverflow discussion, 2013, http://mathoverflow.net/questions/120818.

[127] *MathOverflow discussion*: *Word evaluating to a group element and its inverse with different frequency*, 2013, http://mathoverflow.net/questions/137753.

[128] *Jacobson–Morozov theorem*, MathOverflow discussion: Word evaluating to a group element and its inverse with different frequency, 2015, http://mathoverflow.net/questions/210728.

[129] M. McCrudden, "On nth roots and infinitely divisible elements in a connected Lie group", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **89**:2 (1981), 293–299.

[130] G. J. McNinch, "Sub-principal homomorphisms in positive characteristic", *Math. Z.*, **244**:2 (2003), 433–455.

[131] G. D. Mostow, "Fully reducible subgroups of algebraic groups", *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 200–221.

[132] A. Muranov, "Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width", *Internat. J. Algebra Comput.*, **17**:3 (2007), 607–659.

[133] A. Myasnikov, A. Nikolaev, "Verbal subgroups of hyperbolic groups have infinite width", *J. London Math. Soc.* (2), **90**:2 (2014), 573–591.

[134] R. K. Nath, "A new class of almost measure preserving maps on finite simple groups", *J. Algebra Appl.*, **13**:4 (2014), 1350142, 5 pp.

[135] B. H. Neumann, "Adjunction of elements to groups", *J. London Math. Soc.*, **18** (1943), 4–11.

[136] P. W. Ng, "Commutators in the Jiang–Su algebra", *Internat. J. Math.*, **23**:11 (2012), 1250113, 29 pp.

[137] N. Nikolov, L. Pyber, "Product decompositions of quasirandom groups and a Jordan type theorem", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*), **13**:4 (2011), 1063–1077.

[138] Y. Ollivier, *A january* 2005 *invitation to random groups*, Ensaios Mat., **10**, Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 2005, ii+100 pp.

[139] A. Yu. Ol'shanskiĭ, "Almost every group is hyperbolic", *Internat. J. Algebra Comput.*, **2**:1 (1992), 1–17.

[140] O. Parzanchevski, G. Schul, "On the Fourier expansion of word maps", *Bull. Lond. Math. Soc.*, **46**:1 (2014), 91–102.

[141] S. Pasiencier, H.-C. Wang, "Commutators in a semi-simple Lie group", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**:6 (1962), 907–913.

[142] В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел*, Наука, М., 1991, 656 с.; англ. пер.: V. P. Platonov, A. S. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure Appl. Math., **139**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994, xii+614 pp.

[143] T. Plotnikov, *On semi-rational groups*, 2018, 8 pp., arXiv: 1803.07120.

[144] G. Prasad, "Elementary proof of a theorem of Bruhat–Tits–Rousseau and of a theorem of Tits", *Bull. Soc. Math. France*, **110**:2 (1982), 197–202.

[145] R. Proud, J. Saxl, D. Testerman, "Subgroups of type A_1 containing a fixed unipotent element in an algebraic group", *J. Algebra*, **231**:1 (2000), 53–66.

[146] R. Ree, "Commutators in semi-simple algebraic groups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:3 (1964), 457–460.

[147] C. Riehm, "The norm 1 group of a p-adic division algebra", *Amer. J. Math.*, **92**:2 (1970), 499–523.

[148] V. Roman'kov, "Equations over groups", *Groups Complex. Cryptol.*, **4**:2 (2012), 191–239.

[149] J. Schneider, A. Thom, *Word images in symmetric and unitary groups are dense*, 2018, 18 pp., arXiv: 1802.09289.

[150] D. Segal, *Words: notes on verbal width in groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **361**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, xii+121 pp.

[151] J.-P. Serre, "A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field", *Mosc. Math. J.*, **9**:1 (2009), 183–198.

[152] J.-P. Serre, "Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis", *Séminaire Bourbaki*, v. 2008/2009, Astérisque, **332**, Soc. Math. France, Paris, 2010, 75–100, Exp. № 1000.

[153] A. Shalev, "Commutators, words, conjugacy classes and character methods", *Turkish J. Math.*, **31**, suppl. (2007), 131–148.

[154] A. Shalev, "Applications of some zeta functions in group theory", *Zeta functions in algebra and geometry*, Contemp. Math., **566**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 331–344.

[155] A. Shalev, "Some results and problems in the theory of word maps", *Erdős centennial*, Bolyai Soc. Math. Stud., **25**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2013, 611–649.

[156] M. Slusky, "Zeros of 2×2 matrix polynomials", *Comm. Algebra*, **38**:11 (2010), 4212–4223.

[157] Š. Špenko, "On the image of a noncommutative polynomial", *J. Algebra*, **377** (2013), 298–311.

[158] T. A. Springer, R. Steinberg, "Conjugacy classes", *Seminar on algebraic groups and related finite groups* (The Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1968/69), Lecture Notes in Math., **131**, Springer, Berlin, 1970, 167–266.

[159] A. Stein, "$1\frac{1}{2}$-generation of finite simple groups", *Beiträge Algebra Geom.*, **39**:2 (1998), 349–358.

[160] R. Steinberg, "Regular elements of semisimple algebraic groups", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **25** (1965), 49–80.

[161] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Lectures notes, Yale Univ., 1967–1968, 2nd ed., Univ. Lecture Series, **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, xi+160 pp.

[162] R. Steinberg, *Conjugacy classes in algebraic groups*, Lecture Notes in Math., **366**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974, vi+159 pp.

[163] R. Steinberg, "On power maps in algebraic groups", *Math. Res. Lett.*, **10**:5-6 (2003), 621–624.

[164] D. M. Testerman, "A_1-type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups", *J. Algebra*, **177**:1 (1995), 34–76.

[165] A. Thom, "Convergent sequences in discrete groups", *Canad. Math. Bull.*, **56**:2 (2013), 424–433.

[166] T. Tsuboi, "On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds", *Comment. Math. Helv.*, **87**:1 (2012), 141–185.

[167] T. Tsuboi, "Homeomorphism groups of commutator width one", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**:5 (2013), 1839–1847.

[168] L. Vaserstein, E. Wheland, "Products of conjugacy classes of two by two matrices", *Linear Algebra Appl.*, **230** (1995), 165–188.

[169] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, 2-е изд., УРСС, М., 1995, 344 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990, xx+328 pp.

[170] B. A. F. Wehrfritz, “A residual property of free metabelian groups”, *Arch. Math.* (*Basel*), **20**:3 (1969), 248–250.

[171] J. W. Wood, “Bundles with totally disconnected structure group”, *Comment. Math. Helv.*, **46** (1971), 257–273.

[172] M. Wüstner, “Historical remarks on the surjectivity of the exponential function of Lie groups”, *Historia Math.*, **29**:3 (2002), 266–272.

[173] M. Wüstner, “The classification of all simple Lie groups with surjective exponential map”, *J. Lie Theory*, **15**:1 (2005), 269–278.

[174] S. Zimmermann, “The Abelianization of the real Cremona group”, *Duke Math. J.*, **167**:2 (2018), 211–267.

Поступила в редакцию
26.06.2018

Николай Леонидович Гордеев
(Nikolai L. Gordeev)
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена;
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: nickgordeev@mail.ru

Борис Эммануилович Кунявский
(Boris È. Kunyavskii)
Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel
E-mail: kunyav@macs.biu.ac.il

Евгений Борисович Плоткин
(Eugene B. Plotkin)
Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel
E-mail: plotkin@macs.biu.ac.il