<u>חבורות טופולוגיות</u> (מבוא)

14.11.2016

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html

מבוסס חלקית על S. Morris, *Topology without tears (chapter: Topological groups)*

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/topbook.pdf

הגדרה 1: *חבורה* $(G,\cdot)$ *עם טופולוגיה* τ *מעל* G *נקראת* ***חבורה טופולוגית***

אם הפונקציות הבאות הן רציפות.

א. $G\times G\to G \quad (x,y)\to x\cdot y$

ב. $G\to G \quad x\to x^{-1}$.

- אם החבורה היא $(G,+)$ אזי יש לדרוש רציפות של הפונקציות

  א. $G\times G\to G \quad (x,y)\to x+y$

  ב. $G\to G \quad x\to -x$

- אם הטופולוגיה $\tau = top(d)$ היא באה ממטריקה d על G אז ההגדרה 1 שקולה ל

  א. $x_n\to x \wedge y_n\to y \Rightarrow x_ny_n\to xy$

  ב. $x_n\to x \Rightarrow x_n^{-1}\to x^{-1}$

- בד"כ מניחים שהטופולוגיה מעל חבורה היא האוסדורפית (גם בקובץ הזה ...).
- לא תמיד א גורר ב בהגדרה 1. למשל ב $(\mathbb{R},+,\tau_s)$ טופולוגית Sorgenfrey **א** מתקיים אבל לא **ב**.

$\{[a,b): \quad a,b\in R\}$ בסיס לטופולוגית τ_s. שים לב: $\lim\frac{1}{n}=0$ אבל $\lim(-\frac{1}{n})$ לא קיים.

המקורות: גאומטריה, אנליזה , טופולוגיה ...

דוגמאות:

כל חבורה G לגבה טופולוגיה דיסקרטית.

$\mathbb{R} \quad \mathbb{C} \qquad T=\{z\in\mathbb{C}^*: \|z\|=1\}\leq\mathbb{C}^*$

$(E,\|\|)$ כל מרחב נורמי

$Is_{Lin}(E)$ חבורת איזומטריות לינאריות לגבי טופולוגיה נקודתית

$\mathbb{R}^n \quad O(\mathbb{R}^n)\leq GL(\mathbb{R}^n)$

אוטומופיזמים של מבנים טופולוגיים $S_X \quad Homeo(K) \quad Is(M)$ ....

משפטי Teleman :

1. {ח"ט} = {ת"ח טופולוגיות של $Is_{Lin}(E)$}

לכל חבורה טופולוגית יש הצגה מתאימה במרחב בנך מסוים $(E,\|\|)$.

2. {ח"ט} = {ת"ח טופולוגיות של $Homeo(K)$} K קומפקט מסוים.

הערה: $Homeo([0,1])$ לא מאפשר הצגות רציפות ע"י איזומטריות מעל מרחב הילברט או אף רפלקסיבי.

- הומומורפיזמים ואיזומורפיזמים : בד"כ מתעניינים בהומומורפיזמים

<u>רציפים</u> **ואיזומורפיזמים טופולוגיים** ...

אזהרה: יתכן מאוד ש $f:G_1\to G_2$ איזומורפיזם רציף אבל $f^{-1}:G_2\to G_1$ לא רציף.

- כל חבורה טופולוגית האוסדורפית היא רגולרית לחלוטין.
- כל הזזה (לכן זה מרחב הומוגני) וכל הצמדה – הומאומורפיזמים בחבורה טופולוגית $(G,\cdot,\tau)$.

למשל: לא קיים מבנה של חבורה טופולוגית מעל מרחב $[0,1]$ (לא הומוגני).

לעומת זאת: על כל חבורה G יש מבנה טופולוגי (דיסקרטית) שהופך אותה לחבורה טופולוגית.

- הגדרה: ח"ט G נקראת ***קומפקטית-מקומית*** אם קיימת סביבה קומפקטית.

למשל: כל דיסקרטי, כל חבורה קומפקטית, $(\mathbb{R}^n,+)$ מכפלות סופיות...

מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ ח"ט (גם כל **מרחב וקטורי טופולוגי**) קומפקטי מקומית רק $\dim E<\infty$.

$\mathbb{Q}$ $S_{\mathbb{N}}$ $Homeo([0,1])$ .... לא קומפקטית-מקומית.

- $GL_n(\mathbb{R})$ **General Linear** group

קומפקטית-מקומית (כתת מרחב מטרי פתוח של $\mathbb{R}^{n^2}$)

לא קשיר (זכור: פונקצית דטרמיננטה)

$SL_n(\mathbb{R})\lhd GL_n(\mathbb{R})$ (גרעין של $\det: GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*$)

$GL_n(\mathbb{R})\geq O_n(\mathbb{R})=\{A\,|\,A^t=A^{-1}\}$ אורתוגונאליות

קומפקטית עם 2 מרכיבים שכל אחד הומאומורפי ל $SO_n(\mathbb{R})$

חבורת Heisenberg

$$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

הן דוגמאות פרטיות של חבורות לי – יריעות חלקות עם פעולות חלקות.

- {חבורות טופולוגיות}= TopGr סגור לגבי יצירת:

א. תתי חבורות

ב. מכפלות

- למשל $\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^k\times T^m$ ח"ט קומפקטית-מקומית.
- מכפלה של קומפקטיות שוב קומפקטית . (זכור: משפט Tychonoff) ...

למשל: T^X הטורוס

מכפלה של חבורות סופיות $G \le \prod_{i \in I} G_i$ pro-finite group

$\mathbb{Z}_2{}^{\mathbb{N}}$ חבורת קנטור

ג. חבורות מנה

- לכל ת"ח נורמלית (סגורה) $H \triangleleft G$ **מרחב מנה** G/H חבורה טופולוגית (האוסדורף) ואפימורפיזם טבעי $G \to G/H$ הוא רציף ופתוח.
- אם G קומפקטית-מקומית אזי גם חבורת מנה טופולוגית G/H.

אזהרה: תמונה אפימורפית לא תמיד איזומורפית-טופולוגית עם חבורת מנה טופולוגית.

ז"א לא תמיד יש אנלוגיה למשפט האיזומורפיזם הראשון.

דוגמאות:

1. כל חבורה עם טופולוגיה דיסקרטית היא חבורה טופולוגית.

(להפך כל חבורה טופולוגית סופית האוסדורפית היא בהכרח דיסקרטית.)

2. $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ (או כל **שדה טופולוגי**).

$(\mathbb{R},+) \cong ((0,\infty),\cdot)$ $f(x)=e^x$ איזומורפיזם טופולוגי.

3. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong T := \{z \in \mathbb{C}^* : \quad \|Z\|=1\} \le (\mathbb{C}^*,\cdot)$ מנה טופולוגית

$$f:\mathbb{R}\to T,\ f(t)=e^{2\pi t}=cis2\pi t \qquad T=\{cis\alpha\}_{0\le\alpha\le 2\pi}=\{\cos\alpha+i\sin\alpha\}$$

$T^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ טורוס n-ממדי. חבורה קומפקטית.

<u>כמה תכונות ת"ח של</u> $\mathbb{R}$

דוגמה פשוטה: כל ת"ח ציקלית $a\mathbb{Z} = < a >$ דיסרקטית וסגורה ב $\mathbb{R}$.

שאלה: מתי ת"ח היא דיסקרטית, צפופה, סגורה ?

מה עם $H=<a,b> \le \mathbb{R}$ **?**

$$G=<1,\sqrt{2}>=\{m+n\sqrt{2}: \quad m,n\in\mathbb{Z}\}\le\mathbb{R}$$

(דיכוטומיה)

תת חבורות של $\mathbb{R}$ הן או דלילות מאוד (דיסקרטיות וציקליות) או צפופות ב $\mathbb{R}$.

- **משפט**: כל תת חבורה לא דיסקרטית G של $\mathbb{R}$ צפופה ב $\mathbb{R}$.

הוכחה: צ"ל $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0 \quad \exists g\in G\cap[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$

G לא דיסקרטית לכן 0 לא מבודדת ב G (זכור: הומוגניות !)

$\exists x_\varepsilon\in G\setminus\{0\}\cap[-\varepsilon,\varepsilon]$

בה"כ $\exists x_\varepsilon\in G\setminus\{0\}\cap[0,\varepsilon]$ (כי G ת"ח לא רק ת"ק)

$\cdots[-x_\varepsilon,\varepsilon][0,x_\varepsilon][x_\varepsilon,2x_\varepsilon]\cdots[nx_\varepsilon,(n+1)x_\varepsilon]\cdots$ כיסוי של $\mathbb{R}$.

אורך של כל קטע כזה לכל היותר ε. אורך של $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ שווה 2ε.

$\exists n \quad nx_\varepsilon\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$

ברור $g:=nx_\varepsilon\in G$ אז מצאנו .....מש"ל

- **משפט**: כל ת"ח G סגורה השונה מ $\mathbb{R}$ היא ת"ח ציקלית דיסקרטית $<a>=a\mathbb{Z}$.

הוכחה:

G דיסקרטית (אחרת היא צפופה ב $\mathbb{R}$ --טענה קודמת ואז שווה ל $\mathbb{R}$ בגלל הסגירות)

בה"כ $G\neq\{0\}$ (אחרת קח $a=0$).

קיים $b\in G\cap(0,\infty)$

$G\cap[0,b]$ קומפקטי (מדוע ?) .

$G\cap[0,b]$ דיסקרטי.

לכן $G\cap[0,b]$ **סופי**. קיים הכי קטן חיובי $a\in G\cap[0,b]$ (זכור: $b\in G$).

לכל $x\in G$ מתקיים $x-[\frac{x}{a}]a\in G$ $\wedge$ $0\le x-[\frac{x}{a}]a<a$.

בגלל המינימליות של a נקבל $x-[\frac{x}{a}]a=0$. ז"א $\frac{x}{a}\in\mathbb{Z}$.

מש"ל

מסקנות:

- לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$ ת"ח $G=<a,b>\le\mathbb{R}$ צפופה

למשל עבור $G=<1,\sqrt{2}>=\{m+n\sqrt{2}:\quad m,n\in\mathbb{Z}\}\le\mathbb{R}$ מתקיים $\overline{G}=\mathbb{R}$.

- $G=<cis\sqrt{2}>=\{cis(n\sqrt{2}):\quad n\in\mathbb{Z}\}\le T$ תת חבורה ציקלית **צפופה** (לא דיסקרטית) במעגל יחידה .

- משפט: כל ת"ח אמיתית **סגורה** H של T היא ציקלית סופית.

הסבר: $f:\mathbb{R}\to T,\ f(t)=cis2\pi t$ $\quad\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T$ פונקציה *פתוחה*.

קח $G:=f^{-1}(H)<\mathbb{R}$ ת"ח סגורה אמיתית של $\mathbb{R}$ לכן דיסקרטית וציקלית.

לכן גם $f(G)<T$ **ציקלית**.

סופיות : קודם כל דיסקרטית (כי $f:G=f^{-1}(H)\to H$ גם פתוחה).

אז $f(G)<T$ **סופית** (כמרחב דיסקרטי וקומפקטי). **מש"ל**

- **תוצאה**: כל ת"ח ציקלית אינסופית של T צפופה ב T.
- מסקנה דינמית: ביליארד אירציונאלי בטורוס. כל המסלולים צפופים לגבי הפעולה של $G=<cis\alpha>$ $\frac{\alpha}{\pi}\notin\mathbb{Q}$ (קבוע) מעל קבוצה T.

4. $(\mathbb{R}^n,+)$.

כל ת"ח **סגורה** איזומורפית ל $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}^k$.

הגדרה: G ***נוצרת- קומפקטית*** אם קיימת בה תת קבוצה קומפקטית שיוצרת אלגברית את G.

למשל: נוצרת-סופית, קומפקטית מקומית וקשירה.

תזכורת: כל חבורה אבלית דיסקרטית נוצרת-סופית היא מכפלה סופית של חבורות ציקליות.

$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$ (עד כדי איזומורפיזם)

<u>משפט</u>: כל חבורה טופולוגית אבלית קומפקטית-מקומית שנוצרת- קומפקטית היא

$\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}^k \times K$ (עד כדי איזומורפיזם טופולוגי)

כאשר K קומפקטית אבלית.

<u>הערה:</u> ח"ט קומפקטיות ואבליות הן בדיוק ת"ח סגורות של הטורוס T^I.

Pontryagin-van Kampen duality

לכל חבורה אבלית קומפקטית מקומית G

$G^* := \{f : G \to T\}$ **חבורה דואלית** של G = {כרקטרים של G}

היא חבורה קומפקטית מקומית (לגבי טופולוגיה טבעית מסוימת).

דוגמאות:

א. $\chi_\alpha : \mathbb{R} \to T, r \mapsto e^{i\alpha r}$ $\quad \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$

ב. $f_n : T \to T, t \mapsto t^n$ $\quad T^* \cong \mathbb{Z}$

ג. $h_t : \mathbb{Z} \to T, n \mapsto t^n$ $\quad \mathbb{Z}^* \cong T$

משפט: לכל חבורה אבלית קומפקטית מקומית G קיים איזומורפיזם טבעי $G \cong G^{**}$.

משפט: G חבורה אבלית דיסקרטית אם"ם חבורה דואלית G^* קומפקטית.

תוצאה: ללמוד חבורות אבליות דיסקרטיות "שקול" ללמוד חבורות אבליות קומפקטיות.

משפט: מעל כל חבורה אבלית קיימת טופולוגיה לא דיסקרטית האוסדורפית.

הוכחה: כרקטרים מפרידים נקודות ...

$$G \cong H \leq T^I$$

5. עוד חבורה טופולוגית (האוסדורפית) ציקלית ולא דיסקרטית. $\mathbb{Z}$ עם מטריקה p-אדית

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & if \ \ x = y \\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & if \ \ k(x,y) = \max\{i : \quad p^i \mid (x-y)\} \end{cases}$$

לא דיסקרטית צפופה בחבורה קומפקטית פרו-סופית.

6. **חבורה סימטרית**

$S_X = \{invertible \ \ f : X \to X\}$ עם טופולוגיה נקודתית.

למשל $S_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

7. חבורת איזומטריות (משפט Teleman)

לכל מרחב מטרי (M,d) חבורה

$$Is(M) := \{ f : M \to M, \quad d(f(x), f(y)) = d(x,y), \ f(M) = M\}$$

כל $G \leq Is(M) \subset M^M$ חבורה טופולוגית (לגבי טופולוגיה נקודתית).

למשל חבורה דיהדרלית $\quad D_n =< a, \sigma \mid a^n = \sigma^2 = (a\sigma)^2 = e\} \quad D_n \leq Is(\mathbb{R}^2)$

שאלה: *האם כל חבורה טופולוגית משוכנת לתוך חבורה מטיפוס* $Is(M)$?

מה עם איזומטריות לינאריות של מרחבי בנך ?

התשובה: **כן** !

מקרה מאוד פרטי: כל חבורה דיסקרטית G

א. סופית

$$G \le S_m \le O(n,\mathbb{R}) \le Is(\mathbb{R}^m)$$

ב. בת מנייה

$$G \le S_{\mathbb{N}} \le Is(l_2)$$

דרך אחרת $G \le S_{\mathbb{N}} \cong Is(\mathbb{N}, d_\Delta) \quad d_\Delta(i,j)=1 \ \ \forall i \ne j$

ג. כל חבורה דיסקרטית

$$G \le S_G \le Is(l_\infty(G))$$

ד. כל חבורה טופולוגית G

$$V := UC(G) \quad G \le Is(V, \|\|_{\sup})$$

מרחב בנך של פונקציות רציפות במ"ש וחסומות.

8. חבורת הומאומורפיזמים

$$Homeo(K)$$

למשל אם $K=[0,1]$ אז

$Homeo([0,1]) = \{ f : [0,1] \to [0,1] |$ מונוטוניות רציפות ועל$\}$

$$d(f_1, f_2) = \max_{0 \le x \le 1} | f_1(x) - f_2(x) |$$

שאלה: האם כל חבורה טופולוגית משוכנת לתוך חבורה מטיפוס $Homeo(K)$?

התשובה: כן !

$(V, \|\|_{\sup}) \quad V := UC(G)$ מרחב בנך של פונקציות רציפות במ"ש חסומות.

$K := spec(V)$ מרחב אידאלים מקסימליים של האלגברה V.

כיוון מסוים במחקר:

- למיין חבורות טופולוגיות שמשוכנות לתוך $Is_{Lin}(E)$ עבור מרחבי בנך E "טובים" (למשל: מרחבי Hilbert, reflexive, Asplund, Rosenthal,...).
- לא ידוע אם כל חבורה טופולוגית היא משוכנת לתוך $Is_{Lin}(E)$ עבור מרחב בנך רוזנטל כלשהו E (מרחב בנך E נקרא מרחב רוזנטל אם כל סדרה חסומה v_n של ווקטורים מכילה תת סדרה v_{n_k} כך ש $f(v_{n_k})$ סדרת קושי ב $\mathbb{R}$ לכל פונקציונל רציף $f: E \to \mathbb{R}$).
- מקרה פרטי חשוב: אותה שאלה עבור חבורה טופולוגית $G := Homeo([0,1]^{\aleph_0})$ (לגבי טופולוגיה סטנדרטית – compact-open topology).

לפרטים נוספים על חבורות טופולוגיות (וקשר עם מערכות דינמיות) ראו מאמרי סקירה:

http://arxiv.org/pdf/math/9910144v4.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/WLNotesN.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/GMsurvey170913.pdf