

קדקודים ודיפקט

תזכורות:

משפט 8.4: אם H תת-חבורה של G ו- M מודול פרויקטיבית יחסית ל- H , אז קיים מרכיב ישיר W של M_H כך ש- $M \mid W^G$ וקיים אבר s כך ש- $sQs^{-1} \leq H$ ואם X המקור של M , אז $W \mid (X^s)^H$.

חבורת דיפקט

בשיעור הקודם הוכחנו:

למה 9.4: יש קדקוד של הבלוק שמוכל ב- ΔG .

מסקנה: הקדקוד של בלוק B הוא חבורה $Q = \Delta D$.

הוכחה: לפי משפט שהוכחנו, יש קדקוד בתוך חבורת ה- p -סילוב $P \times P$ של $G \times G$. כל תתי-החבורות Q של $P \times P \cap \Delta G$ הם מהצורה ΔD כאשר D היא ההטלה על המרכיב הראשון.

קריטריון לחבורת דפקט.

למצוא חבורת דפקט של בלוק לא קשה: היא חבורת ה- p -סילוב הכי גדולה של מרכז של נציג

מחלקת צמידות g_j כך ש- $\widehat{C_j}$ הוא בצומת של אידמפוטנט הבלוק.

דוגמא: ניקח $G = A_4$, $p = 3$.

```
Name: SO_5, A
Size: 12
Type: A4
Group: < a, b, c | a^3=b^2=c^2=e, b*a=a*b*c, c*a=a*b, rgc>
4 3
Series: [ a, b, c ]
List: 5
```

Character Table

SO_5

```
2 2 2 . .
3 1 . 1 1
```

```
1a 2a 3a 3b
2P 1a 1a 3b 3a
3P 1a 2a 1a 1a
```

```
X.1 1 1 1 1
X.2 1 1 A /A
```

$$\begin{array}{lcl} \text{X.3} & 1 & 1 / A \quad A \\ \text{X.4} & 3 & -1 \quad . \quad . \end{array}$$

$$\begin{aligned} A &= E(3) \\ &= (-1 + ER(-3)) / 2 = b3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 2 \quad [[1, 2, 3, 4]] \\ 3 \quad [[1, 2, 3], 4] \end{array}$$

$$e_1 = e + b + c + bc$$

$$e_2 = -b - c - bc$$

בבלוק הראשון המרכז של e הוא כל החבורה, ולכן חבורת הדיפקט היא חבורת p -סילוב C_3 .
 בשני, המרכז של b הוא החבורה הנורמלית מסדר 4 ולכן חבורת הדיפקט היא חבורת ש הזות. תמיד יהיה
 נכון שאם חבורת ה- p סילוב מסדר p^a וחבורת הדיפקט מסדר p^d (כאשר d נקרא הדיפקט של הבלוק)
 אז p^{a-d} יהיה המחלק המשותף המקסימלי של הדרגות של הקרקטרים הרגילים בבלוק. במיוחד, כל קרקטר
 רגיל מדרגה מתחלקת ל- p^a הוא בלוק מדפקט 0.

על מנת הוכיח את הקריטריון שיאפשר חישוב של חבורת דפקט, נצטרך מספר הגדרות:

הגדרה: אם A אלגברה שעבורה יש הומומורפיזם של חבורות

$$\varphi: G \rightarrow A^*$$

אז A נקראת G -אלגברה פנימית.

הגדרה: אם A היא G -אלגברה פנימית, אז לכל תת-חבורה H של G , נגדיר A^H להיות אוסף נקודות
 השבת תחת צמידות על ידי התמונות של אברים של H . אם $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ הוא קבוצת נציגי קוסט ל H ב- G ,
 אז העתקת העיקבה היא

$$tr_H^G: A^H \rightarrow A^G$$

$$tr_H^G: b \mapsto \sum_{i=1}^r t_i b t_i^{-1}$$

נסמן את התמונה של tr_H^G ב- A_H^G

הערה: העתקה זו איננה תלויה בבחירת הניצב T .

למה 10.1: הקבוצה A_H^G היא אדיאל ב- A^G .

הוכחה: היא תת-מרחב וקטורי בגלל ש tr_H^G היא טרנספורמציה ליניארית. היא אידיאל דו-צדדי בגלל שלכל

$$a \in A^G$$

$$tr_H^G: ab \mapsto \sum_{i=1}^r t_i a b t_i^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^r t_i a t_i^{-1} t_i b t_i^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^r a t_i b t_i^{-1}$$

$$= a tr_H^G(b)$$

לתוצאה דומה בצד ימיני.

למה 10.2: תהי f אידמפוטנט של בלוק B . אז $Q = \Delta D$ הקדקוד של B כמודול מעל $G \times G$ אם"ם D מינימלי בין D' כך כך שקיים $c \in B$ שעבורו

$$tr_D^G(c) = f$$

הוכחה: נניח ש- $Q = \Delta D$ הוא הקדקוד של B וננסה להוכיח D מינימלי בין D' כך שקיים $c \in B$ שעבורו

$$tr_{D'}^G(c) = f$$

נגדיר $E = End_R RGf$. נגדיר פעולה של $G \times G$ על E על ידי $(x, y) \cdot g$ עבור $a \in RG$ על ידי

$$(x, y)g(a) = xg(x^{-1}ay)y^{-1}$$

נציין ב- $a_l \in E$ המכפלה מצד שמאל ע"י ידי אבר $a \in RGf$. במוחז, f_l הוא הזהות על B . לכל שתי

תתי-חבורות $K, L \leq G$, אנו טוענים ש- $\Delta D \leq K \times L$ אם"ם B פרויקטיבית יחסית ל- $K \times L$ אם"ם

$$(b = b_l(b) = tr_{K \times L}^{G \times G}(g(b)) \in Ind_{K \times L}^{G \times G} g(B_{K \times L}) \text{ אז } b_l = tr_{K \times L}^{G \times G}(g) \text{ (כי אם } b_l \in E_{K \times L}^{G \times G} = tr_{K \times L}^{G \times G}(E_{K \times L}))$$

בעזרת הנוסחה ל- $(x, y) \cdot g, g \in E$, נקבל

$$(x, y)a_l(c) = xa(x^{-1}cy)y^{-1} = (x \cdot a)_l(c); x \cdot a = xax^{-1}$$

לכל $a \in RG, a_l \in E$ הוא G -הומומורפיזם ימיני, ז"א, מתחלף עם הפעולה של G מצד ימין. להפך, כל

G -הומומורפיזם ימיני g מהצורה $a_l \in E$ כאשר $a = g(b)$ ניקח $A = RG$.

טענת עזר: לכל $K \leq G, D'$

$$1. (A^K)_l = E_{K \times G}$$

$$2. (A_{D'}^G)_l = E_{D' \times G}^{G \times G}$$

הוכחת הטענה:

1. לכל $(x, y) \in K \times G$ ולכל $a \in A^K, a_l = (x \cdot a)_l = (x, y) \cdot a_l$ ולכן $(A^K)_l \subseteq E^{K \times G}$. להכלה

ההפוכה, ניקח $g \in E^{K \times G}$. כיוון ש- g הוא G -הומומורפיזם ימיני, קיים $a \in Af$ כך ש- $g = a_l$,

כפי שהזכרנו לפני טענת העזר. לכן חייב להיות ש- $a \in A^K$ כיוון ש- $Af = B$ פעל על עצמו בצורה

נאמנה (בלי גרעין, ולכן אם a, kak^{-1} פועלים מאותו האופן, חייב להיות שהם שווים)

2. ניקח $D' = K$ ב- (1).

$$E_{D' \times G}^{G \times G} = tr_{D' \times G}^{G \times G}(E^{D' \times G})$$

$$= tr_{D' \times G}^{G \times G}((A^{D'})_l)$$

לכל $a \in A^{D'}, a$ מתקיים

$$tr_{D' \times G}^{G \times G}(a_l) = \sum_{s \in G/D'} (s, 1) \cdot a_l$$

$$= \sum_{s \in G/D'} (s \cdot a)_l$$

$$= (tr_{D'}^G a)_l$$

$$E_{D' \times G}^{G \times G} = (tr_{D'}^G(A^{D'}))_l = (A_{D'}^G)_l$$

כעת נסיים את הוכחת המשפט:

$$f \in A_{D'}^G \Leftrightarrow f_l \in (A_{D'}^G)_l$$

$$\Leftrightarrow f_l \in E_{D' \times G}^{G \times G}$$

$$\Leftrightarrow \Delta D \leq_{G \times G} D' \times G$$

$$\Leftrightarrow D \leq_G D'$$

לכן $Q = \Delta D$ קדקוד אם"ם D מינימלי לגבי תכונת העקבה.

למה 10.3: תת חבורה D_p של ΔG הוא חבורת דפקט של בלוק B עם אידמפוטנט f אם ורק אם D מכיל צמוד של מרכז של נציג מחלקת צמידות g_j כך ש- $\widehat{C_j}$ הוא בתומך של אידמפוטנט הבלוק f .

למה 10.4: אם M מודול אי-פריד כך ש- $M = fM$, אז הקדקוד של M מוכל בחבורת דיפקט של הבלוק

$$B = fRG$$