

התאמת בראור

תזכורת מהשיעור הקודם:

הגדרה: אם A אלגברה שעבורה יש הומומורפיזם של חבורות

$$\varphi: G \rightarrow A^*$$

אז A נקראת G -אלגברה פנימית.

הגדרה: אם A היא G -אלגברה פנימית, אז לכל תת-חבורה H של G , נגדיר A^H להיות אוסף נקודות השבת תחת צמידות על ידי התמונות של אברים של H . אם $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ הוא קבוצת נציגי קוסט ל H ב- G , אז העתקת העיקבה היא

$$tr_H^G: A^H \rightarrow A^G$$

$$tr_H^G: b \mapsto \sum_{i=1}^r t_i b t_i^{-1}$$

נסמן את התמונה של tr_H^G ב- A_H^G

הערה: העתקה זו איננה תלויה בבחירת הניצב T .

למה 10.1: הקבוצה A_H^G היא אדיאל ב- A^G .

למה 10.2: תהי f אידמפוטנט של בלוק B . הקדקוד $Q = \Delta D$ של B כמודול מעל $G \times G$ מתאים לתת חבורה D מסדר מינימלי כך שקיים $c \in B$ שעבורו

$$tr_D^G(c) = f$$

למה 10.3: תת חבורה p של ΔG היא חבורת דפקט של בלוק B עם אידמפוטנט f אם ורק אם D מכיל צמוד של מרכז של נציג מחלקת צמידות g_j כך ש- $\widehat{C_j}$ הוא בתומך של אידמפוטנט הבלוק f .

למה 10.4: אם M מודול אי-פריד כך ש- $M = fM$, אז הקדקוד של M מוכל בחבורת דיפקט של הבלוק $B = fRG$

העתקת בראור:

הגדרה: תהי D חבורה p של חבורה סופית G . **העתקת בראור** יחסית ל- D היא העתקה R -ליניארית מוגדרת על אברי בסיס כדלהן:

$$\sigma: RG \rightarrow RC_G(D)$$

$$\sigma: x \mapsto \begin{cases} x, & x \in C_G(D) \\ 0, & x \notin C_G(D) \end{cases}$$

למה: (רוזנברג): עם אידמפוטנט פרימיטיבי e הוא בסכום של אידיאלים, הוא באחד האידיאלים.

יהיה m האידיאל ב- R כך ש- $p = \text{char}(k)$, $R/m \simeq k$. נסכם תכונות של ההעתקה:

למה 11.1: תהי D חבורה - p , כך ש- $D \leq H \leq G$. נזכור ש- $A = RG$.

1. אם $D \leq H \leq N_G(D)$, אז $\sigma(A_G) \subseteq Z(RH)$.
2. אם L הוא סכום של H -מחלקת צמידות, שחבורת הדיפקט שלה איננו מכיל H -צמוד של D , אז $\sigma(L) = 0$.
3. לכל $D' \leq H$ שלא מכיל צמוד של D , $\sigma(A_{D'}) \equiv 0 \pmod{mA}$.
4. $A_D = RC_G(D) + \sum_{D' < D} A_{D'}$.
5. $\sigma(aa') = \sigma(a)\sigma(a') \pmod{mA}$, $a, a' \in A_D$.
 $\sigma(\text{tr}_D^G a) \equiv \text{tr}_D^{N_G(D)}(\sigma(a)) \pmod{mA}$, $\forall a \in A_D$.

בלי הוכחה:

הרעיון של משפטי בראור הוא להשוות בין הבלוקים B של G בעלי חבורות דפקט D , לבין הבלוקים של $N_G(D)$. כפי שכבר ראינו, לחבורת שבהן חבורת p -סילוב נורמלי יש מבנה פשוט. תוצאה זו אפשר להרחיב לבלוקים שבהן חבורת הדיפקט נורמלי.

דוגמא: ניקח $G = A_5$. יש 5-בלוק מדיפקט 0 ו-5-בלוק מדיפקט 1, הבלוק הראשי. הנורמליזטור של C_5 הוא D_5 ויש לו בדיוק בלוק אחד.

A_5

A_5	e	C_2C_2	C_3	C_5	C_5^2	notes
#	1	15	20	12	12	$ A_5 = 60$
A_0	1	1	1	1	1	trivial rep
T_1	3	-1	0	γ^+	γ^-	Symmetries of icosahedron
T_2	3	-1	0	γ^-	γ^+	
G	4	0	1	-1	-1	
H	5	1	-1	0	0	

$$\gamma^+ = -2\cos(2\pi/5) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \text{ (=golden ratio) and } \gamma^- = -2\cos(\pi/5) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \text{ (} = -(\gamma^+)^{-1} \text{)}$$

האידימפוטנט של הבלוק הראשי הוא $e_1 = (1/12)(7e - \widehat{C_2} + \widehat{C_3})$. כיוון שהמרכז מסדר 5, נקבל $\sigma(e_1) = e$.

צריכים ממשפט עזר, שנוכיח במקרה $R = k$.

משפט 11.2: תהי k שדה ממאפיין p , ו- $A = kG$.

1. העתקת הבראור $\sigma|_{A^G}: A^G \rightarrow kC_G(D)$ יחסית ל- D מגדיר הימורפיזם של אלגבראות- k מ-

A_G ל- $Z(kN_G(D))$. הגרעין של ההומורפיזם הוא $A_{\leq} = \sum A_D^G$. כאשר הסכום הוא על כל תתי-חבורת של G שאינן מכילות צמודה של D .

2. ההומורפיזם מגדיר אפימורפיזם

$$\sigma|_{A_D^G}: A_D^G \rightarrow \text{tr}_D^{N_G(D)}(kC_G(D))$$

והגרעין אינו מכיל שום אידמפוטנט של בלוק עם חבורת דיפקט D ההוכחה:

1. לפי 11.1, סעיף 4, כיוון ש- $A_G \subseteq A_D$, ההעתקה ההומורפיזם בגלל ש- $R = k$ ו- $m = 0$. יתר על כן,

$$\sigma(A_G) \subseteq Z(kN_G(D)) \quad \text{לפי 11.1, סעיף 1. לפי 11.1, סעיף 3, נקבל}$$

$$A_{D'}^G \subseteq \ker(\sigma), \forall D' \leq G, \sim (D \leq D')$$

לכן $A_{\leq} \subseteq \ker(\sigma|_{A_G})$.

להוכיח את ההכלה ההפוכה, נזכור של- A_G יש בסיס $\{\widehat{C}_j | \widehat{C}_j = \text{tr}_{C_G(g_j)}^G\}$. לפי 11.1, סעיף 3,

$\sigma(\widehat{C}_j) \neq 0 \Rightarrow D \leq_G C_G(g_j)$. כיוון ש- $\sigma(\widehat{C}_j)$ הוא סכום של אברים ממחלקת הצמידות C_j , התמונות

שונות מאפס בלתי תליות, ולכן $a \in \ker(\sigma|_{A_G})$ צריך להיות קומבינציה ליניארית של $\widehat{C}_j$ שעבור לא

$$\sigma(\widehat{C}_j) \in A_{C_G(g_j)}^G \subseteq A_{\leq}, D \leq_G C_G(g_j).$$

2. שזה אפימורפיזם תוצאה של 11.1, סעיף 5. לפי מה שהוכחנו ב-1, הגרעין מוכל בסכום של איד, אלים, ולכן לפי הלמה של רוזנברג, אידמפוטנט של בלוק (שהוא פרימיטיבי ב- A_G) היה צריך להיות באחד מהם, A_D^G ומזה היה נובע מ-למה 10.2 ש- $D \leq D'$, בניגוד להגדרה של $A_{\leq}$.

צריכים עוד משפט עזר על המבנה של בלוק דומה לבלוק של $N_G(D)$. נחזור ל- R של לא צריך להיות שדה.

משפט 11.3: תהי G חבורה סופית בעלת תת-חבורת- p נורמלית:

1. לכל אידמפוטנט של בלוק, מתקיים

$$b \in RC_G(D) \cap A^G + mA^G$$

2. D מוכל בחבורות הדיפקט של כל הבלוקים של G .

בלי הוכחה.

משפט הראשי הראשון של בראור 11.4: תהי G חבורה סופית, p תת-חבורה, ו- $H = N_G(D)$. תהי

$$\sigma: Z(RG) \rightarrow Z(RH)$$

העתקת הבראור יחסית ל- D . יש התאמה חד-חד ערכית ועל בין אידמפוטנטים $b \in Z(RG)$ של בלוקים של G בעלות חבורת דיפקט D ואידמפוטנטים $b' \in Z(RH)$ של בלוקים של H בעלות חבורת דיפקט D , נתונה על ידי

$$\sigma(b) \equiv b' \pmod{mZ(RG)}$$

הוכחה: יש התאמה חד-חד ערכית בין אידמפוטנטים של בלוקים ל- kG, RG וגם לגבי בלוקים של

$$RH, kH. \quad \text{לכן מספיק להוכיח את המשפט עבור } k, \text{ כאשר } m = 0.$$

ניקח $A = kG, A' = kH$, ולכן $A^G = Z(kG), A'^H = Z(kH)$. לפי למה 10.2, ו-11.2, סעיף 2,

ההעתקה של בראור מגדיר אפימורפיזם

$$\sigma: A_D^G \rightarrow \text{tr}_D^H(kC_G(D)) \subseteq A_H'$$

לפי משפט 10.2, כל האידמפוטנטים של בלוקים ב- G בעלות חבורת דיפקט D הם מוכלים ב- A_D^G , וכיוון שהם אידמפוטנטים פרימיטיביים ב- A^G , הם גם פרימיטיביים בתת-קבוצה A_D^G . כל אידמפוטנט של בלוק צריך להיות באיזשהו A_D^G לפי 10.2, ואלו בעלי חבורת דיפקט D נמצאים ב- A_D^G . אף אחד מהם איננו ב- $\ker(\sigma|_{A_G})$ לפי 11.2, סעיף 2. לפי תוצאה כללית על אלגבראות קוממוטטיביות מעל שדה, האפימורפיזם $\sigma|_{A_G}$ מגדירה העתקה חד-חד ערכית ועל בין האידמפוטנטים פרימיטיביים ב- A_D^G שאינם בגרעין לאידמפוטנטים פרימיטיביים של $\text{tr}_D^H(kC_G(D))$.

נשאר לנו המעבר בין $\text{tr}_D^H(kC_G(D))$ לבין A^H . נתחיל באידמפוטנט פרימיטיבי $b^* \in A^H$ בעל חבורת דיפקט D . לפי 11.3, סעיף 1, $b^* \in kC_G(D) \cap A^H$, כי D נורמלי ב- H . לכן לפי ההגדרה של σ , נקבל $\sigma(b^*) = b^*$. כיוון של- b^* יש חבורת דיפקט D , לפי משפט 10.2, $b^* = \text{tr}_D^H a$, $\exists a \in A^H$. לכן

$$b^* = \sigma b^* = \sigma \text{tr}_D^H a = \text{tr}_D^H \sigma a \in \text{tr}_D^H(kC_G(D))$$

הדבר האחרון הוא להוכיח שכל אידמפוטנט פרימיטיבי $\sigma(b) = b' \in \text{tr}_D^H(kC_G(D))$ הוא פרימיטיבי ב- A^H ובעל חבורת דיפקט D . אם b' פרימיטיבי, לפי 11.3, סעיף 2, חבורת הדיפקט יכול את D , ואז, לפי 10.2, יהיה שווה ל- D .

נניח בשלילה ש- b' איננו פרימיטיבי, אז יש לו פריק כסכום של אידמפוטנטים פרימיטיביים $b' = \sum_{i=1}^r b''_i$,

שאינם ב- $\text{tr}_D^H(kC_G(D))$. לכן לכל b''_i יש חבורת דיפקט $D' < D$, כי כבר הוכחנו שכל האידמפוטנטים בעלי חבורת דיפקט D הם ב- $\text{tr}_D^H(kC_G(D))$. כיוון ש- $A_D^H = \text{tr}_D^H(A_D')$ אדיאל, $b''_i = b'_i$ $b'_i \in A_D^H$, סתירה ללמה 10.2.