

תזכורת:

משפט הראשי הראשון של בראור 11.4: תהי G חבורה סופית, D p -תת-חבורה, ו- $H = N_G(D)$. תהי

$$\sigma: Z(RG) \rightarrow Z(RH)$$

העתקת הבראור יחסית ל- D . יש התאמה חד-חד ערכית ועל בין אידמפוטנטים $b \in Z(RG)$ של בלוקים של G בעלות חבורת דיפקט D ואידמפוטנטים $b' \in Z(RH)$ של בלוקים של H בעלות חבורת דיפקט D , נתונה על ידי

$$\sigma(b) \equiv b' \pmod{mZ(RG)}$$

קרקטרים של בראור ומטריצת פירוק

נניח ש- (K, R, k) הוא שלישיה p -מודולרי. קיים סידרה מדויקת קצרה:

$$1 \rightarrow 1+m \rightarrow R^* \rightarrow k^* \rightarrow 1$$

אם k מספיק גדול, יש פיצול יחיד $k^* \rightarrow R^*$, ונניח שכן קיים.

הגדרה: אבר בחבורה נקרא p -רגולרי אם p איננו מחלק את הסדר, ואחרת הוא נקרא p -סינגולרי. חבורה שבה כל האברים p -רגולריים נקרא חבורת- p' .

למה 12.1: אם H חבורת- p' ו- M הוא מודול פשוט אז יש RH -סריג יחיד כך ש-

$$M \simeq N / mN$$

הוכחה בפרק III, למה 5.1

הגדרה: אם M מוגון פשוט, ו- h הוא אבר p -רגולרי, אז נגדיר את הערך $\phi_M(h)$ של קרקטר של בראור אי-פריק ϕ_M על ידי כך שנצמצם את M לחבורה ציקלית $\langle h \rangle$, נרים את המודול למודול מעל RH , ונחשב את ערך המודול שם.

למה 12.2: קבוצת הקרקטרים של בראור הוא בסיס למרחב של פונקציות מחלקה מהמחלקת ה- p רגולריות של G ל R , ומספר ה- kG -מודולי פשוטים שווה למספר המחלקת ה- p רגולריות.

הערה: אם חבורת ה- p -סילוב P נורמלית, אז יא חבורת- p' משלימה H כך ש-

$$G/P \simeq H$$

מחלקות הצמידות ה- p רגולריות של H אינן מתלקדות ב- G , כי

$$k^{-1}hk = hk', \forall h \in H, k \in P$$

עבור $k' \in P$. הקרקטרים של H הם בהתאמה לקרקטרים של G עם גרעין P , והם מהווים בסיס לקרקטרים של בראור של G .

דוגמא: ניקח חבורה מסדר 20 ו-5 p

Name: SO_5, MC5_4
 Size: 20
 Type: C5:C4
 Group: $\langle a, b \mid a^4=b^5=e, b*a=a*b^2 \rangle$
 5 4
 Series: [a, a^2, b]
 List: 5

Character Table

	2	2	.	2	2	2
	5	1	1	.	.	.
	1a	5a	2a	4a	4b	
2P	1a	5a	1a	2a	2a	
3P	1a	5a	2a	4b	4a	
5P	1a	1a	2a	4a	4b	
X.1	1	1	1	1	1	
X.2	1	1	1	-1	-1	
X.3	1	1	-1	A	-A	
X.4	1	1	-1	-A	A	
X.5	4	-1	.	.	.	

$A = E(4)$
 $= ER(-1) = i$

2 [[1, 2, 3, 4], 5]
 5 [[1, 2, 3, 4, 5]]

הקרקטרים של בראור הם אלו ששווים ל-1 על אברים מסדר 5, מצומצם לאברים מסדר זר ל-5.

מספרי פירוק:

ניקח $\widehat{W}$ להיות KG -מודול פשוט. נבחר בסיס, ויהיה W ה- RG -מודול הנוצר על ידי בסיס זה. אז

$$\widehat{W} = W \otimes K$$

הסריג W איננו בהכרח יחיד. לדוגמא, ב- $p=3$, S_3 יש שני מודולים כך גורמי ההרכב הם שני שמודולים הפשוטים. לשניהם המכפלה הטנזורית עם K מייצר המודול הפשוט ממימד 2.

הגדרה: מספרי הפירוק הם מספרי גורמי ההרכב למודול W מתאים ל- W . אפשר לחשב אותם על ידי צמצום של הקרקטר של $\widehat{W}$ לאברים p -רגולריים. המטריצה $[d_{ij}]$, כאשר השורות מתאימות לשורות בלוח הקרקטרים, נקרא מטריצת הפירוק.

בדוגמא הקודמת, מטריצת הפירוק הוא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

מספרי פירוק כלליים

תהי G חבורה סופית, $u \in G$ מסדר חזקה של p ו- $H = C_G(u)$. מגדיר

$$\begin{aligned} Irr(G) &= \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\} \\ Irr(H) &= \{\chi_1, \dots, \chi_{s'}\} \\ IrrBr(H) &= \{\xi_1, \dots, \xi_{r'}\} \end{aligned}$$

משפט 12.3: יש מספרים אלגבריים יחידים d_{ij}^u כך ש-

$$\zeta_i(xu) = \sum_{j=1}^{r'} d_{ij}^u \xi_j(x)$$

לכל אבר p -רגולרי $x \in H$.

□

יהי B - p בלוק של G עם אידמפוטנט b . עבור p - בלוק B' של H נגיד ש- $(B')^G = B$ אם ורק אם האידמפוטנט b' של B' הוא מרכיב בפירוק של $\sigma(b)$ לאידמפוטנטים פרימיטיביים.

משפט הראשי השני של בראור: נניח ש- $\zeta_i \in Irr(G)$ שייך ל- p בלוק B של G . יהי u מסדר חזקה של

p ונגדיר $H = C_G(u)$. אזי מספר הפירוק הכללי $d_{ij}^u = 0$ אלא אם כן ξ_j שייך לבלוק B' שמקיים $(B')^G = B$.