

בס"ד

הצגות מודולריות הרצאה 4 - חלקי

איך לעבור מהצגות רגילות להצגות מודולריות? דרוש גשר.

דוגמא: $\mathbb{Z}_p$ - שלימים p -אדיים.

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim (\mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z})$$

$$= \{(a_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}) \mid a_i \equiv a_j \pmod{p^i}, i < j\}$$

יש אידיאל מקסימלי יחיד נוצר ע"י p . שדה השארית ממאפיין p .

$$\mathbb{Z}_p / p \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z} / p \mathbb{Z}$$

שדה המנות $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ ממאפיין 0.

הגדרה: יהי R תחום שלימות מקומי עם אידיאל מקסימלי m כך ש

$$(1) \quad R = \varprojlim (R / m^i R). \quad (R \text{ נקרא חוג הערכה דיסקרטי שלם}).$$

(2) שדה השאריות $k = R / m$ ממאפיין p .

(3) שדה המנות K ממאפיין 0.

השלישייה (K, R, k) נקראת שלישייה p -מודולרית.

ניקח את R להיות הרחבה $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ של $\mathbb{Z}_p$ על ידי שורש יחידה ζ (זטה) זר ל- p .

לכן

$$k = \mathbb{Z} / p \mathbb{Z}[\zeta]$$

$$K = \mathbb{Q}_p[\zeta]$$

האלגברה RG תגשר בין KG שהיא פשוטה למחצה ל- kG .

לכל קבוצה שלימה $\{f_1, \dots, f_s\}$ של אידמפוטנטים ניצבים ב- kG אפשר למצוא קבוצה שלימה

$\{f_1', \dots, f_s'\}$ של אידמפוטנטים ניצבים ב- RG כך ש- $f_i = f_i' + mG$. קבוצת האידמפוטנטים

$\{f_1', \dots, f_s'\}$ נקראת הרמה של $\{f_1, \dots, f_s\}$.

• אם $\{f_1, \dots, f_s\}$ מרכזיים, יש הרמה יחידה ו- $\{f_1', \dots, f_s'\}$ מרכזיים.

• האידמפוטנטים $\{f_1, \dots, f_s\}$ פרימיטיביים אם $\{f_1', \dots, f_s'\}$ פרימיטיביים.

אם $\{e_1, \dots, e_t\}$ אידמפוטנטים פרימיטיביים של KG , אז $f_i = 1 \cdot f_i = f_i \cdot e_1 + \dots + f_i \cdot e_t$.

מהפרימיטיביות של ה- f_i והמרכזיות של ה- e_j , נקבל שכולם אפס חוץ מאחד.

דוגמא: $R = \mathbb{Z}_2[\omega], G = A_4$. יש רק בלוק אחד מודולו 2, אבל במקרא פשוט זה, נוכל למצא את

האידמפוטנטים הפרימיטיביים. אפשר לבחור תת-חבורה מסדר 3, $(2, 3, 4) <$ ולקחת את אידמפוטנטים

לאידמפוטנטים $\{f_1, f_2, f_3\}$ של הבלוק היחיד ב- RG . כל אחד משלושת האידמפוטנטים הליניארים

$\{e_1, e_2, e_3\}$ ב- KG לפי $e_i = e_i f_i$. אם e_4 הוא האדמפוטנט של הבלוק מדרגה 3, אזי

$$f_i = f_i e_i + f_i e_4$$

הוכחנו גם ש- e_i, e_i באותו בלוק אם"ם $w_{i,j} \equiv w_{i',j} \pmod p, 1 \leq j \leq t, \forall j$

כל מרחב וקטורי הוא חופשי כמודול מעל שדה. להלן, נבקש אותה תכונה גם ממודולים מעל R . כללית, אם M מודול לאלגברה A מעל חוג קוממוטטיבי R , והוא חופשי כמודול מעל R , אז M יקרא **A-סריג**.

הצגות מודולריות - הרצאה 5
משפט מקי (Mackey)

מכפלה טנסורית:

יהיה A חוג. דרך יסודית לחבר A -מודול ימני M ל- A -מודול שמאלי N הוא דרך המכפלה הטנסורית. נסמן ב- $\mathbb{Z}[M \times N]$ את ה- $\mathbb{Z}$ -מודול החופשי הנוצר על ידי האברים של $M \times N$. נגדיר

$$M \otimes_A N \simeq \mathbb{Z}[M \times N] / K$$

כאשר K הוא תת-המודול הנוצר על ידי כל האברים הבאים:

$$\begin{aligned} & (ma, n) - (m, an) \\ & (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) \\ & (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) \end{aligned}$$

המכפלה הטנסורית מקיימת את חוק הקיבוץ, ואם A נחשב כמודול ימני ושמאלי מעל עצמו,

$$M \simeq A \otimes_A M$$

כ- A -מודול שמאלי. אם יש הומומורפיזם של חוגים $f: A \rightarrow B$ אז לכל B -מודול N

$$A \otimes_B N$$

יהיה A -מודול.

אחד הכלים המרכזיים בתורת ההצגות הוא המעבר בין חבורה לתתי החבורות שלה וחזרה. נתחיל במאפיין כללי. אחר כך נעבור למאפיין p , שאז יש תפקיד מיוחד לתתי-חבורות p .

הגדרה: תהי H תת-חבורה של G , חבורה סופית, F שדה.

- אם M הוא FG -מודול, אז **הצמצום** ל- H הוא המודול על אותו מרחב וקטורי באשר מגדירים פעולות רק לאברים של FH . יש לו אותו מימד מעל F והוא מסומן על ידי

$$Res_H^G M$$

- אם N הוא FH -מודול, אז המודול ה**מושרה** הוא המכפלה הטנסורית

$$FG \otimes_{FH} N$$

$$Ind_H^G N$$

שתי הפעולות, צמצום והשראה, טרנסטיביות, כלומר

$$Res_H^G Res_K^H M = Res_K^G M$$

$$Ind_H^G Ind_K^H N = Ind_K^G N$$

שתי הפעולות שומרות גם על סכום ישר. נראה להלן שהן שומרות גם על מודולים פרויקטיביים.

התוצאה של עירבוב הפעולות יותר מסובך, ונתן ע"י משפט מקי. המשפט מסתמך על קוסטים כפולים.

דוגמא: $G = S_3, H = \langle (1, 2) \rangle, L = \langle (2, 3) \rangle$.

$$HeL = \{e, (1, 2), (2, 3), (1, 3, 2)\}$$

$$H(1, 3)L = \{(1, 3), (1, 2, 3)\}$$

(בניגוד למצב עבור קוסט ימיני או שמאלי, לא כל הקוסטים הכפולים חייבים להכיל אותו מספר אברים.)

משפט מקי: תהי G חבורה סופית, L, H תתי-חבורות של G . יהי S קבוצת נציגים של קוסטים כפולים, כך שיש איחוד זר $G = \bigcup_{s \in S} HsL$, ויהיה R חוג קוממוטטיבי. אזי לכל H -מודול M שהוא R סריג, נקבל את הפירוק הבא לצימצום ל- H אחרי השראה מ- L ל- G :

$$Res_H^G(Ind_L^G(M)) = \bigoplus_{s \in S} Ind_{sLs^{-1} \cap H}^H(Res_{sLs^{-1} \cap H}^{sLs^{-1}} s \otimes M)$$

הוכחה: תת-החבורה H פועלת שמאל על הקוסטים

$$G/L = \{gL \mid g \in G\}$$

המסלולים של הפעולה של H הם הקוסטים הכפולים, ו- S היא קבוצת נציגים. לכל $s \in S$, המרכז של הקוסט sL בתוך המסלול הוא תת-החבורה של H כל H כל $k \in H$ כך ש-

$$ks \in sL$$

כלומר, תת-החבורה $sLs^{-1} \cap H$. נתחיל בהשראה.

$$Ind_L^G(M) = RG \otimes_{RL} M$$

נסמן ב- $s \otimes M$ את מודול מעל החבורה sLs^{-1} שבה הפעולה מוגדרת עבור $k \in L, m \in M$ על ידי

$$sks^{-1} \cdot s \otimes m = s \otimes k \cdot m$$

בעזרת הקוסטים הכפולים, נוכל לפרק את RG לסכום ישר של קוסטים דו- צדדיים, שהם RL -מודולים

מימין ו- RH מודולים משמאל. לכן, $RG = \bigoplus_{s \in S} RHsL$.

$$\begin{aligned} Res_H^G(Ind_L^G(M)) &= \bigoplus_{s \in S} RHsL \otimes_{RL} M \\ &= \bigoplus_{s \in S} RHsLs^{-1} \otimes_{RsLs^{-1}} s \otimes M \\ &= \bigoplus_{s \in S} RH \otimes_{RH \cap sLs^{-1}} RsLs^{-1} \otimes_{RsLs^{-1}} s \otimes M \\ &= \bigoplus_{s \in S} RH \otimes_{RH \cap sLs^{-1}} s \otimes M \\ &= \bigoplus_{s \in S} Ind_{H \cap sLs^{-1}}^H(Res_{H \cap sLs^{-1}}^{sLs^{-1}} s \otimes M) \end{aligned}$$

□