

צמצום והשראה בקרקטרים

הגדרה: תהי H תת-חבורה מעל חבורה G ו- N מודול H -מודול. תהי S קבוצת נציגים לקוסטים הימניים של H -ב- G . כל איבר g ב- G מגדיר תמורה של מספרי הקוסטים π_g ואברים h_{ig} כך שלכל $s_i \in S$

$$gs_i = s_j h_{ig}$$

כאשר $\pi_g(i)=j$.

הגדרה: תהי ρ הצגה של H מדרגה n מעל שדה F המתאימה למודול M . נבחר בסיס ל- M לכן $\rho(h)$ יהיה מטריצה $n \times n$ לכל $h \in H$. נסמן ב- ρ^s את ההצגה של $\rho^s(h) = \rho(shs^{-1})$

כעת אנו מוכנים להגדיר את המטריצה של ההצגה המושרת ρ^G , המתאימה ל- $Ind_H^G M$. נכתוב

$$G = \bigcup_{s_i \in S} s_i H$$

הדרגה של ρ הוא n ונסמן ב- m את האינדקס $[G:H]$. נבנה את המטריצה של ρ^G כמטריצה $m \times m$ של בלוקים $[R_{ij}]$, כאשר $R_{ij} = \delta_{j\pi_g(i)} \rho(h_{ig})$. אם χ הקרקטר של ρ , אז נסמן ב- χ^G את

הקרקטר של ρ^G . אם H נורמלי, לכל $h \in H$ התמורה היא הזהות, וכל R_{ii} צמודים של ρ .

דוגמא: נקח $G = S_3$, $H = A_3$.

$$1. \rho(b) = 1$$

$$\rho^G(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^G(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \rho(b) = [\omega]$$

$$\rho^G(b) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\rho^G(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \rho(b) = [\omega^2]$$

$$\rho^G(b) = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$$\rho^G(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שתי ההצגות הבלתי-טריביאליות של H משרות אותה הצגה אי-פריקה מדרגה 2. ההצגה המושרת מההצגה הטריביאלית היא פריקה. לפי שינוי בסיס לבסיס חדש של וקטורים עצמיים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

הגדרה: לכל קרקטר χ של H נגדיר

$$\overset{\circ}{\chi}(g) = \begin{cases} 0, & g \notin H \\ \chi(g), & g \in H \end{cases}$$

למה: אם $H \leq G$,

$$\begin{aligned} \chi^G(g) &= \sum_{s \in S} \overset{\circ}{\chi}(sgs^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \overset{\circ}{\chi}(xgx^{-1}) \end{aligned}$$

ביחסי אורתוגונליות, הוכחנו בעצם שהקבוצה של הקרקטרים האי-פריקים של G , שנסמן ב- $Irr(G)$, היא בסיס למרחב הוקטורי של פונקציות מוגדרות על G ושוות על כל מחלקת שקילות של G , והוא אורתונורמלי לגבי המכפלה הבאה:

הגדרה: המכפלה הפנימית של קרקטרים מוגדרת על ידי

$$\langle \rho, \chi \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \chi(g)$$

אחד המשפטים הכי שימושיים לגבי קרקטרים הוא סוג של אדג'וינט:

משפט פרובניוס: אם $H \leq G$, χ קרקטר של G , ρ קרקטר של H , אז

$$\langle \chi, \rho^G \rangle_G = \langle \chi_H, \rho \rangle_H$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\langle \chi, \rho^G \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \left(\frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \rho^\circ(x^{-1}gx) \right) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(xy^{-1}x^{-1}) \rho(y) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \sum_{x \in G} \chi(y^{-1}) \rho(y) \\ &= \langle \chi_H, \rho \rangle_H\end{aligned}$$

דוגמא:

מסדר שלוש, שעושה תמורה ציקלת של שלושה אברים Q יש אותומורפיזם של חבורת הקוטרניונים מסדר 4 ושל ההפיכים שלהם. ממכפלה זו אפשר לבנות מכפלה חצי ישרה, הנותנת חבורה מסדר 24 איזומורפית ל-

$$G = SL(2, 3)$$

חבורת המטריצות ההפיכות בעלות דטרמיננטה 1 מעל השדה של שלושה אברים. המרכז של Q נשאר מרכזי.

Type: Q8

Group: < a, b | a^4=b^4=e, b^2=a^2, b*a=a*b^3 >

2 3 3 2 2 2

1a 2a 4a 4b 4c
2P 1a 1a 2a 2a 2a
3P 1a 2a 4a 4b 4c

X.1 1 1 1 1 1
X.2 1 1 -1 1 -1
X.3 1 1 1 -1 -1
X.4 1 1 -1 -1 1
X.5 2 -2 . . .

Name: SO_14, SL23

Size: 24

Type: Q8:C3

Group: < a, b, c | a^3=b^4=c^4=e, c^2=b^2, b*a=a*b*c^3, c*a=a*b^3, >

2 3 3 2 1 1 1 1
3 1 1 . 1 1 1 1

1a 2a 4a 3a 6a 3b 6b
2P 1a 1a 2a 3b 3b 3a 3a
3P 1a 2a 4a 1a 2a 1a 2a
5P 1a 2a 4a 3b 6b 3a 6a

X.1 1 1 1 1 1 1 1
X.2 1 1 1 A A /A /A
X.3 1 1 1 /A /A A A
X.4 2 -2 . -1 1 -1 1
X.5 2 -2 . -/A /A -A A
X.6 2 -2 . -A A -/A /A
X.7 3 3 -1

$$\begin{aligned} A &= E(3)^2 \\ &= (-1 - \sqrt{3})/2 = -1 - b3 \end{aligned}$$

הזכרנו לעיל שהקרקטרים נותנים בסיס לפונקציות המחלקה של H . תהי H תת-חבורה נורמלית של חבורה סופית G , $x \in G$. נגדיר $\phi^x(h) = \phi(xhx^{-1})$ לכל פונקצית מחלקה ϕ על H .
למה: תהי H תת-חבורה נורמלית של חבורה סופית G . יהיו ϕ, χ פונקציות מחלקה על H , ו- $x \in G$

$$1. \quad \phi^x \text{ פונקצית מחלקה}$$

$$2. \quad (\phi^x)^y = \phi^{xy}$$

$$3. \quad \langle \theta^x, \phi^x \rangle_H = \langle \theta, \phi \rangle_H$$

$$4. \quad \langle \chi_H, \phi^x \rangle_H = \langle \chi_H, \phi \rangle_H$$

$$5. \quad \phi^x \text{ קרקטר אם "ם } \phi \text{ קרקטר}$$

הפעולה של G על ידי צמודה נותן תמורה של הקרקטרים האי-פריקים $Irr(H)$.

משפט קליפורד: תהי H תת-חבורה נורמלית של חבורה סופית G . יהי $\chi \in Irr(G)$. יהי $\phi \in Irr(H)$ כך שהוא מרכיב של χ_H . ונניח ש-

$$\phi = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$$

הם הצמודים השונים של ϕ . אז

$$\chi_H = e \sum_{i=1}^r \phi_i$$

$$\text{כאשר } e = \langle \chi_H, \phi \rangle_H.$$

הוכחה: ϕ מרכיב של χ_H , כלומר,

$$0 < \langle \chi_H, \phi \rangle_H = \langle \chi, \phi^G \rangle_G$$

כאשר השוויון הוא לפי משפט ההדדיות של פרובניוס. הוכחנו ש- χ מרכיב של הקרקטר המושרת ϕ^G .
 לכן המרכיבים של χ_H יהיו תת-קבוצה של המרכיבים של $(\phi^G)_H$. לכל $h \in H$

$$\phi^G(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi(xhx^{-1})$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi(xhx^{-1})$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi^x(h)$$

כל $\theta \in Irr(H)$ שאיננו בקבוצה $\{\phi = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r\}$ איננו מרכיב של $(\phi^G)_H$, ולכן, לפי שציינו בתחילת ההוכחה, גם לא מרכיב של χ_H . לפי סעיף 4 בלמה, כל המקדמים שווים למספר אחד, e .
 $\square$