

הזכרנו לעיל שהקרקטרים נותנים בסיס לפונקציות המחלקה של H . תהי H תת-חבורה נורמלית של חבורה סופית G , $x \in G$. נגדיר $\phi^x(h) = \phi(xhx^{-1})$ לכל פונקציה מחלקה ϕ על H .
למה: תהי H תת-חבורה נורמלית של חבורה סופית G . יהיו ϕ, χ פונקציות מחלקה על H , ו- $x \in G$

$$1. \phi^x \text{ פונקציה מחלקה}$$

$$2. (\phi^x)^y = \phi^{xy}$$

$$3. \langle \theta^x, \phi^x \rangle_H = \langle \theta, \phi \rangle_H$$

$$4. \langle \chi_H, \phi^x \rangle_H = \langle \chi_H, \phi \rangle_H$$

$$5. \phi^x \text{ קרקטר אם } \phi \text{ קרקטר}$$

הפעולה של G על ידי הצמדה נותנת תמורה של הקרקטרים האי-פריקים $Irr(H)$.

משפט קליפורד: תהי H תת-חבורה נורמלית של חבורה סופית G . יהי $\chi \in Irr(G)$. יהי $\phi \in Irr(H)$ כך שהוא מרכיב של χ_H . ונניח ש-

$$\phi = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$$

הם הצמודים השונים של ϕ . אז

$$\chi_H = e \sum_{i=1}^r \phi_i$$

$$\text{כאשר } e = \langle \chi_H, \phi \rangle_H$$

הוכחה: ϕ מרכיב של χ_H , כלומר,

$$0 < \langle \chi_H, \phi \rangle_H = \langle \chi, \phi^G \rangle_G$$

כאשר השוויון הוא לפי משפט ההדדיות של פרובניוס. הוכחנו ש- χ מרכיב של הקרקטר המושרת ϕ^G .
 לכן המרכיבים של χ_H יהיו תת-קבוצה של המרכיבים של $(\phi^G)_H$. לכל $h \in H$

$$\phi^G(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi(xhx^{-1})$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi(xhx^{-1})$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi^x(h)$$

כל $\theta \in Irr(H)$ שאיננו בקבוצה $\{\phi = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r\}$ איננו מרכיב של $(\phi^G)_H$, ולכן, לפי שצינו בתחילת ההוכחה, גם לא מרכיב של χ_H . לפי סעיף 4 בלמה, כל המקדמים שווים למספר אחד, e .
 $\square$

פונקציות מחלקה לתוך שדה F מהווים F -אלגברה אם מכפלה פנימי, כאשר הסכום הוא סכום נקודתי והכפל הוא גם כפל נקודתי. הכפל מתאים למכפלה טנזורית של הקרקטרים. הזהות באלגברה הוא הקרקטר הטריביאלי. מכפלה של קרקטר אי-פריק על ידי קרקטר ליניארי (מדרגה 1) הוא קרקטר אי פריק. בדרך כלל הכפל של שתי קרקטרים לא ליניאריים הוא לא אי-פריק אלא סכום של קרקטרים אי-פריקים.

הגדרה: גרף המקיי $M(G, \theta)$ של קרקטר θ הוא גרף מכוון שבו צמתים הם הקרקטרים האי-פריקים, ויש חץ אחד מצומת α לכל מרכיב שמופיע ב- $\theta \cdot \alpha$. אנו מעוניינים כי גרפי מקיי נתונים יקרו להרבה בלוקים מודולריים.

דוגמא: ניקח $G = S_3$. יש שלושה קרקטרים אי פריקים, שנציין ב- χ_1, χ_2, χ_3 . כאשר χ_1 הוא הקרקטר הטריביאלי. ל- $M(G, \chi_1)$ יש שלושה צמתים עם לולאות. ל- $M(G, \chi_2)$ יש חצים בין χ_1 -ו- χ_2 ולולאה ב- χ_3 . המסובך יותר הוא הגרף $M(G, \chi_3)$.

$$\chi_3 \cdot \chi_1 = \chi_3$$

$$\chi_3 \cdot \chi_2 = \chi_3$$

$$\chi_3 \cdot \chi_3 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$$

לכן יש לולאה ב- χ_3 וחצים בין χ_3 ל-שני הקרקטרים הליניאריים.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & . & 1 \\ 3 & 1 & 1 & . \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 1a & 3a & 2a \\ 2P & 1a & 3a & 1a \\ 3P & 1a & 1a & 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} X.1 & 1 & 1 & 1 \\ X.2 & 1 & 1 & -1 \\ X.3 & 2 & -1 & . \end{array}$$

משפט (מייר, ש.): בחבורה G שבה חבורת p -סילו P נורמלית, הקוויבר של אלגברת החבורה מעל שדה מקרקטריסטיקה 0 הוא גרף מקיי של חבורת המנה H לגבי הקרקטר המתאר את הפעולה של H על היוצרים של P על יד צמידות.

משפט זו מרשה לנו לתת מספר דוגמאות של קוויברים של אלגברת החבורה.

מסקנה: אם G שנקנא, הקוויבר הוא $|H|$ צמתים ובכל אחד מספר לולאות שווה למספר היוצרים של p .

דוגמא: $G = C_3 \times C_2 \times C_2$. הקוויבר הוא שלוש צמתים ושתי לולאות על כל אחד.

עובדה: הדרגה של הקרקטר שעבורו מחשבים את גרף המקיי הוא מספר היוצרים של P

```

Name: SO_5, A4
Size: 12
Type: A4
Group: < a, b, c | a^3=b^2=c^2=e, b*a=a*b*c, c*a=a*b, rgc>
4 3
Series: [ a, b, c ]
List: 5

```

Character Table

SO_5					
	2	2	2	.	.
	3	1	.	1	1
	1a	2a	3a	3b	
2P	1a	1a	3b	3a	
3P	1a	2a	1a	1a	
X.1	1	1	1	1	
X.2	1	1	A	/A	
X.3	1	1	/A	A	
X.4	3	-1	.	.	
A = E(3)					
= (-1+ER(-3))/2 = b3					

```

2 [ [ 1, 2, 3, 4 ] ]
3 [ [ 1, 2, 3 ], 4 ]

```

```

Linear Generators: [ X2 ]
Nonlinear Orbits: [ X4 ]

```

דוגמא:

בחבורה המתחלפת $G = A_4 = (C_2 \times C_2) : C_3$, חבורת ה-2-סילו נורמלית ואיזומורפית ל $P = C_2 \times C_2$. נניח שהשדה k הוא מקרקטריסטיקה 2. אפשר לבחור יוצרים

$$x = b + \omega^2 c + \omega bc$$

$$y = b + \omega c + \omega^2 bc$$

הראשון וקטור עצמי לגבי צמידות עם ערך עצמי ω^2 , כי

$$a^{-1}xa = bc + \omega^2 b + \omega c$$

$$= \omega^2 x$$

באופן דומה, y הוא וקטור עצמי של צמידות ב- a עם ערך עצמי ω . לכן הקוויבר הוא $M(G, \theta)$ כאשר $\theta = \chi_2 + \chi_3$ הוא הסכום של שני הקרקטרים הלא-טריביאליים של C_3 .