

קדקודים ודיפקט

נניח ש K שדה מספיק גדול ו- G חבורה סופית.

$$KG \simeq \oplus B_i$$

כאשר תת-האלגברות B_i נקראים הבלוקים. רצ'רד בראור הוכיח שתכונות חשובות של הבלוקים תלויות בתת-חבורת p , D_i , קבועה עד כדי צמידות, הנקראת חבורת הדיפקט של הבלוק. התאוריה עמוקה, אבל החישוב של חבורת הדיפקט יחסית קל:

- מציאת כל הקרקטרים הרגילים שבבלוק, בעזרת המטריצה $W = N^{-1}XM$, מודולו p
- חישוב האידמפוטנט של הבלוק כסכום של האידמפוטנטים של הקרקטרים, לפי הנוסחה

$$e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{j=1}^t \chi_i(g_j^{-1}) \hat{C}_j$$

חבורת הדיפקט הוא תת-חבורה p -סילו הכי גדולה של $C_G(x)$, המרכז של אבר x בתומך של e_i .

דוגמה: ב- $G = D_6$ כאשר $p = 2$: יש שני בלוקים ומודולו 2 נקבל

$$e_1 = \frac{1}{3}(e + b^2 + b^4)$$

$$e_2 = \frac{1}{3}(b^2 + b^4)$$

המרכז של e הוא כל G וחבורת ה- p סילו מסדר 4, אזומורפית ל- $C_2 \times C_2$. המרכז של b^2 נוצר על ידי b וחבורת p -סילוב נוצרה על ידי b^3 אבר מסדר 2.

מודול חופשי וחופשי יחסית לתת-חבורה

תהי A אלגברה מעל חוג שדה K . מודול M נקרא A -מודול חופשי אם $M \simeq A^n$ כמודול. נוכיח תנאי שקול שיהיה יותר קל להכליל:

משפט: A -מודול M הוא חופשי אם"ם קיים K -תת-מרחב X כך שלכל A -מודול N ולכל טרנספומציה ליניארית $f: X \rightarrow N$ קיים A -מודול הומומורפיזם יחיד $g: M \rightarrow N$ כך שהצמצום ל- X הוא f .

כעת ניקח $A = KG$, ו- H תת-חבורה של G . נהפוך את המשפט להגדרה.

הגדרה: A -מודול M הוא **חופשי יחסית ל- H** אם"ם קיים H -מודול X כך שלכל A -מודול N ולכל H -הומומורפיזם $f: X \rightarrow N_H$, קיים A -מודול הומומורפיזם יחיד $g: M \rightarrow N$ כך שהצמצום ל- X הוא f .

הערה: אם M נוצר על ידי X , אז הוא חופשי יחסית ל- H אם"ם

$$\dim M = |G : H| \dim X$$

בעצם, $M = \text{Ind}_H^G X$.

קדקוד של מודול:

סימון: אם $M \simeq N \oplus N'$ נכתוב $N | M$

נקח R להיות שדה ממאפיין p או חוג הערכה בשלישייה מודולרית.

הגדרה: RG -מודול M הוא פרויקטיבי יחסית ל- H אם H קיים H -מודול X כך ש- $M | X^G$

משפט: RG -מודול M הוא פרויקטיבי יחסית ל- H אם H קיים H -מודול N כך ש- $\phi: N \rightarrow M$ אפימורפיזם $\phi_H: N_H \rightarrow M_H$ קיים פיצול $\psi_H: M_H \rightarrow N_H$, ψ_H קיים RG -מודול הומומורפיזם יחיד $\psi: M \rightarrow N$ כך שהיא פיצול של ϕ .

ההוכחה של משפט זה ושל המשפט הבא שהוכחנו בכיתה הם בפרק 4 בדפים באתר:

משפט: נניח ש- H תת-חבורה של G שמכיל חבורת p -סילוב, כאשר p המאפיין 1 . RG -מודול M הוא פרויקטיבי יחסית ל- H , אם M_H פרוקטיבי, גם M פרוקטיבי